পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা-পর্ষৎ কর্তৃক অনুমোদিত সিলেবাস অনুযায়ী মাধ্যমিক, উচ্চতর মাধ্যমিক ও সর্বার্থসাধক বিদ্যালয়সমূহের নবম ও দশম শ্রেণীর জন্য লিখিত।

আবশ্যিক গণিত

(CORE MATHEMATICS)

(পাটীগণিত : বীজগণিত : জ্যামিতি : পরিমিতি : রাশিবিজ্ঞান)

উচ্চতর মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের

নবম ও দশম শ্রেণীর পাঠ্য

(পরিবর্তিত, পরিবর্ধিত ও পরিমার্জিত ষষ্ঠ সংস্করণ)

শ্রীশচীন্দ্রনাথ মিত্র

[কলিকাতা স্কটিশ চার্চ্ কলেজিয়েট স্কুলের প্রধান গণিত শিক্ষক]

ও

শ্রীসুধীরকুমার গাঙ্গুলী

[কলিকাতা চেতলা বয়েজ উচ্চতর মাধ্যমিক স্কুলের প্রধান গণিত শিক্ষক ও সহকারী প্রধান শিক্ষক।]

ইণ্ডিয়ান বুক কনসার্ন

৩, রমানাথ মজুমদার ষ্ট্রীট,

কলিকাতা-৯

ভূমিকা

সুপরিকল্পিত শিক্ষাই মানবজীবনের ধী ও প্রজ্ঞাশক্তির প্রকৃত উৎকর্ষ সাধক। গণিতশাস্ত্র যে এই কার্যে প্রধান অগ্রণী এবং মনন শক্তির প্রকৃত সংহতিকারক, বর্তমানে ইহা সর্বজনস্বীকৃত। এই মহান উদ্দেশ্যের প্রতি যথাসম্ভব লক্ষ্য রাখিয়া, পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা-পর্ষৎ কর্তৃক মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের নবম ও দশম শ্রেণীর শিক্ষার্থীর উপযোগী পাঠ নির্দেশ অনুসারে বর্তমান গ্রন্থটি রচিত।

গ্রন্থখানির রচনারীতি কিছু মৌলিকতার দাবী রাখে। নিম্নে তাহারই কয়েকটির পরিচয় প্রদত্ত হইল :—

(১) প্রথমতঃ ইহার ভাষা প্রাঞ্জল ও সাবলীল এবং সুকুমারমতি শিক্ষার্থীদের পক্ষে সহজবোধ্য।

(২) পরীক্ষকগণ পরীক্ষার্থীর নিকট হইতে যেরূপ উত্তর আশা করেন, উদাহরণ গুলি সেইরূপেই সন্নিবিষ্ট। প্রতিটি উদাহরণ সুবোধ্য ও স্বয়ংসম্পূর্ণ;

(৩) প্রত্যেক প্রশ্নমালায় কতিপয় উদাহরণ প্রদত্ত আছে। এই উদাহরণগুলিই শিক্ষক মহোদয়গণ বোর্ডে লিখিয়া অতি সহজেই বুঝাইতে পারিবেন, নূতন করিয়া কষিতে হইবে না।

(৪) প্রশ্নমালার ভিতরেই উদাহরণগুলি সন্নিবিষ্ট, শিক্ষার্থীদের দৃষ্টি অতি সহজেই ইহাতে আকৃষ্ট হইবে।

(৫) প্রত্যেক প্রশ্নমালায় ক্লাসে করিবার জন্য কয়েকটি অঙ্ক নির্দিষ্ট আছে। মেধাবী শিক্ষার্থীরা সব কয়টি অনায়াসে করিতে পারিবে। বাড়ীতে করিবার অঙ্কগুলিও (Home Task) নির্দেশ দেওয়া আছে। ইহাদের মধ্যে গ্রীষ্মবকাশ ও পূজাবকাশের জন্যও যথেষ্ট অঙ্ক প্রদত্ত আছে।

(৬) শিক্ষকগণ অতি সহজে এই গ্রন্থ হইতেই প্রশ্নপত্র রচনা করিতে পারিবেন, অন্য পুস্তক নিষ্প্রয়োজন।

(৭) প্রত্যেক প্রশ্নমালার শিরোভাগে ক্লাসের ও বাড়ীর অঙ্ক নির্দেশ আছে। মেধাবী ছাত্রদের খোরাক মিটাইবার পক্ষে অঙ্কের সংখ্যা পর্যাপ্ত।

(৮) সংক্ষেপে ও সহজভবায় প্রত্যেক বিষয় বুঝাইবার প্রয়াস পাইয়াছি।

(৯) জ্যামিতির বহু প্রশ্ন সরলভাবে এবং নিখুঁত ও সুদৃশ্য চিত্রসহ বুঝান হইয়াছে। বহু প্রশ্ন বাড়ীতে করিবার জন্যও প্রদত্ত হইয়াছে।

(১০) যাহাতে বিদ্যার্থীরা উত্তরপত্রে পরীক্ষকের প্রতি সুষ্ঠুভাবে ভাষা প্রয়োগ করে, সেইজন্য উহাদের ভিতর 'ধর' 'মনে কর' প্রভৃতি ভাষা যথাসম্ভব বর্জিত হইয়াছে।

(১১) সর্বশেষে সারা ভারতের বিভিন্ন বিশ্ববিদ্যালয়, মধ্যশিক্ষা পর্ষদ ও প্রতিযোগিতামূলক প্রশ্নপত্র হইতে বহু সরল ও দুরূহ প্রশ্নাবলী সংগৃহীত হইয়াছে। ইহাতে শিক্ষার্থীরা পর্ষদের ভাবী প্রশ্নপত্রের প্রকৃত রূপ সহজেই ধরিতে পারিবে।

(১২) প্রায় প্রত্যেক প্রশ্নমালার শেষে Objective test দেওয়া হইয়াছে।

ছাত্রজীবনের স্মৃতি সুদীর্ঘ বৎসরের গণিতের অধ্যাপনা ও পরীক্ষক-জীবনের অভিজ্ঞতার ফলপ্রসূ এই গ্রন্থখানি শিক্ষক ও শিক্ষার্থীদের কতটা উপযোগী হইয়াছে তাহা তাঁহারাই বিচার করিবেন। গ্রন্থটির বৈশিষ্ট্য ও মৌলিকত্ব যদি ছাত্র সম্প্রদায়ের জ্ঞানানুশীলনের সহায়ক হয় তবেই আমাদের শ্রম সার্থক মনে করিব। তবে এই প্রসঙ্গে কল্যাণী পান্নালাল উচ্চ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ের—গণিতশাস্ত্রের প্রধান শিক্ষক শ্রীননীগোপাল ঘোষের নাম উল্লেখ না করিলে ত্রুটি থাকিয়া যাইবে। শ্রীঘোষ গ্রন্থটি পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে পাঠ করিয়া বহু মূল্যবান মতামত প্রকাশ করিয়া আমাদের কৃতজ্ঞতাপাশে আবদ্ধ করিয়াছেন। বর্তমান ষষ্ঠ সংস্করণে ইহা সম্পূর্ণ ত্রুটিমুক্ত করিতে যথাসাধ্য চেষ্টা করিয়াছি।

এইবার ঋণ স্বীকারের পালা। দেশী ও বিদেশী বহু গ্রন্থের আমরা সাহায্য লইয়াছি, সেই সব শ্রদ্ধেয় গ্রন্থকারদের কাছে আমরা কৃতজ্ঞ। যাঁহাদের সক্রিয় সহযোগিতায় আমরা এই সুবৃহৎ গ্রন্থ রচনায় সফলকাম হইয়াছি তাঁহাদের কাছেও আমাদের সশ্রদ্ধ আন্তরিক কৃতজ্ঞতা জানাই। ইতি—

শচীন্দ্র নাথ মিত্র
সুধীরকুমার গাঙ্গুলী

BOARD OF SECONDARY EDUCATION
WEST BENGAL

SYLLABUS

MATHEMATICS (COMPULSORY)

(This course is intended to be mainly a revision of the work done in earlier classes and reoriented to the use of Mathematics in daily life. The teacher is only expected to define the various terms used in the course-content and show their practical utility.. It is not desired that he should burden the student with too many mathematical details, methods and problems.)

Class IX

Unit 1—ARITHMETIC.

All questions should be straightforward. Application of Algebra should be permitted in Arithmetic.

Revision of previous work—Vulgar and Decimal Fractions including Recurring Decimal; Extraction of Square Root; Square and Cubic measures : Simple examples of Unitary Method including Time and Work, Time and Distance ; Percentages and easy cases of Simple Interest. Simple ideas of Approximation (excluding Contracted Method and Infinite Series).

Compound Interest (calculation of interest only) ; Profit and Loss.

Unit 2—ALGEBRA,

Revision of previous work—Directed Numbers ; Fundamental Laws ; Problems and Simple Equations ; the following formulae with their applications :

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3, a^3-b^3 ;

Easy Factors ; H. C. F. ; L. C. M. Easy Fractions.

Simple Simultaneous Equations involving two unknowns ; Problems leading to Equations, Simple and Simultaneous ; Graph of Simple Equations

Unit 3—GEOMETRY

THEORETICAL

Revision of previous work as in the Board's Syllabus up to Class VIII. To prove—

1. The opposite sides and angles of a parallelogram are equal, each diagonal divides the parallelogram into congruent triangles, and diagonals of a parallelogram bisect one another.
2. A quadrilateral is a parallelogram if—
   (i) both pairs of opposite sides are equal, or
   (ii) both pairs of opposite angles are equal, or
   (iii) both pairs of opposite sides are equal and parallel, or
   (iv) its diagonals bisect one another.
3. If there are three or more parallel straight lines, and the intercepts made by them on any one straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal.

The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side.

The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and equal to half of it

4. The formal proof should be preceded by practical work with squared paper in all the cases of this paragraph—
   (i) Parallelograms on the same base and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.
   (ii) Triangles on the same base (or on equal bases) and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.
   (iii) Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.

(iv) If a triangle and a parallelogram stand on the same base and are between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallellogram.

(v) In a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides containing the right angle.

(vi) If a triangle is such that the square on the side is equal to the sum of the squares on the other two sides, then the angle contained by these two sides is a right angle.

5. To prove :—

The locus of points which are equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.

The locus of points which are equidistant from two intersecting straight lines consists of the pair of straight lines which bisects the two angles between the two given lines

6. (i) The perpendicular drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent.

(ii) The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.

(iii) The medians of a triangle are concurrent.

PRACTICAL

1. Revision of previous work.

   (i) Bisection of angles and straight lines

   (ii) Construction of a perpendicular to the straight line.

   (iii) Construction of an angle equal to a given angle.

   (iv) Construction of parallels to given straight lines.

   (v) Construction of triangles with given parts.

   (vi) Division of a straight line into a given number of equal parts.

2. Construction of quadrilaterals.
3. Construction of a parallelogram equal to a given triangle and having one of its angles equal to a given angle.
4. Construction of a triangle equal in area to given rectilineal figure.

CLASS X

Unit 1—ARITHMETIC.

All questions should be straightforward. Applications of Algebra should be permitted in Arithmetic.

Ratio and Proportion ; Simple examples on Unitary Method including direct Problems on Income Tax, Foreign Exchange and Draft ; Metric System dealing with tropics of conversion

(Adequate practice should be given in the use of the metric system of weights and measure including area and volume.)

Unit 2.—STATISTICS.

Frequency Tables ; Averages—Mean, Median and Mode, Mean and Standard Deviations ; Graphical representations—Histogram, Frequency Polygon.

(All data used for imparting the above-mentioned rudiments of Statistics should be collected by the pupils themselves. Examples : Weights, heights, ages of pupils, their school attendance and progress in studies, etc.)

Unit 3—ALGEBRA.

Simple quadratic equations as can be solved by easy factorisation.

Graphical solutions of Simultaneous Equations of the First Degree ; Ratio and Proportion.

Unit 4—GEOMETRY.

THEORETICAL

1. To prove—

There is one circle and, only one which passes through three given points not in a straight line.

2. Axioms—

In equal circles (or, in the same circle) equal chords cut off equal arcs and substend equal angies at the eentre and conversely.

To Prove—

3. A straight line, drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter, is at right angles to the chord and converse.
4. In equal circles (or, in the same circle) equal chords are equiditant from the centres and conversely.
5. The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtands at any point on the remaining part of the circumference.
6 Angles in the same segment of a circle are equal and if the line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.
7. The angle of a semi-circle is a right angle ; the angle in a segment greater than a semi-circle is less than a right angle ; and the angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle.
8. The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary and the converse.

The following theorems are also to be included :—

(i) The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) The two tangents to a circle from an external point are equal and they subtend equal angles at the centre.

(ii) If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.

PRACTICAL

Simple cases of construction of Circles ; Construction of Designs with Geometrical Figures.

Unit 5 (a)—MENSURATION

Area of a Triangle ; Circumference and Area of a Circle ; Surface and Volume of Rectangular Parallelopiped, Cylinder and Sphere

Unit 5 (b)—GEOMETRY OF SPHERE

Elementary ideas of Geometry of Sphere leading to the definition of Latitude, Longitude

The following demonstrations and experiments are suggested for Class X, in connection with the different units, as indicated below :—

1. DEMONSTRATION & EXPERIMENTS.

(Note—"D" stand for demonstration and "E" for experiments)

Unit 1—ARITHMETIC

D. Explanation of Specimen Cheques ; Drafts , Bills ; Foreign Currencies , etc.

Unit 2—STATISTICS.

E. Determination of weights, heights and ages of pupils and their Graphical Representations.

Unit 4—GEOMETRY.

D. Explanation of Models of Geometrical Figures,

Unit 5 (a)—MENSURATION.

E. Measurement of Areas of Rectangular Figures and Triangles ; Circumference and Area of a Circle.

Unit 5 (b)—GEOMETRY OF SPHERE.

D. Geometry of sphere.

বিষয় নির্দেশ ॥

বীজগণিত

[নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

[দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

পাটীগণিত

[নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

[দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

জ্যামিতি

[নবম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

[দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ]

বীজগণিত

[নবম শ্রেণীর পাঠ্য]

পুনরালোচনা (Revision)

1

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা
Directed Numbers

1·1. **নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা :** পাটীগণিতে '+' ও '−' এই দুই চিহ্ন সংখ্যাগুলির মধ্যে বসিয়া উহাদের যোগ ও বিয়োগ এই দুই প্রক্রিয়া বুঝায়। চিহ্ন দুইটি কোন সংখ্যারই অঙ্গ নহে। সংখ্যা হইতে সম্পূর্ণ পৃথক। ইহারা কেবলমাত্র যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া নির্দেশ করে। 6+4 এর অর্থ 6 এর সহিত 4 যোগ করিতে হইবে। 6−4 এর অর্থ 6 হইতে 4 বিয়োগ করিতে হইবে। পাটীগণিতে সংখ্যাগুলি চিহ্নহীন এবং কেবলমাত্র গণনার সাহায্য করে। ইহাদের **সাধারণ সংখ্যা** (Common Number) বলে।

কিন্তু এই সকল সাধারণ সংখ্যা দ্বারা সর্বদা স্পষ্ট অর্থ বুঝা যায় না। যেমন, A ও Bর বয়সের পার্থক্য 4 বৎসর। ইহাতে A এবং B এর মধ্যে কে বড় কে ছোট তাহা বুঝা যায় না। কিংবা, কোন স্থানের উষ্ণতা 10° বলিলে ঠিক বুঝা যায় না যে উষ্ণতা হিমাঙ্কের উপর 10° না হিমাঙ্কের নীচে 10°। এইরূপ বহুক্ষেত্রে দেখা যায় যে 4, 10 প্রভৃতি সংখ্যাগুলি প্রকৃত অর্থ বুঝিবার পক্ষে যথেষ্ট নহে।

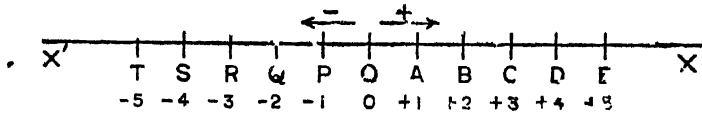
বীজগণিতে এইরূপ লাভ-ক্ষতি, উত্থান-পতন, হ্রাস-বৃদ্ধি, উপর-নীচ, পূর্ব-পশ্চিম, উত্তর-দক্ষিণ, উন্নতি-অবনতি প্রভৃতি বিপরীত-ধর্মী রাশিগুলির একটির বামদিকে '+' ও অপরটির বামদিকে '−' চিহ্ন বসাইয়া উহাদের প্রকৃত অর্থ অনেকটা বুঝান যায়। A ও Bর বয়সের পার্থক্য +5 বলিলে, বুঝা যায় B অপেক্ষা A 5 বৎসর বড় ; এবং −5 বলিলে বুঝা যায় B অপেক্ষা A 5 বৎসরের ছোট। উষ্ণতা +10° বলিলে বুঝা যাইবে হিমাঙ্কের উপরে 10° এবং −10° বলিলে হিমাঙ্কের নীচে 10° উষ্ণতা ইত্যাদি। এইরূপে বিপরীতধর্মী রাশিগুলির একটিতে '+' বা

ধনচিহ্ন বলাইয়া এবং অপরটিতে '−' বা **ঋণচিহ্ন** বলাইয়া প্রকাশ করা হয়। এইজন্য এই দুই চিহ্নকে **ভেদচিহ্ন** (Sign of affection) বলে। ধনচিহ্ন-যুক্ত সংখ্যা বা রাশিগুলিকে **ধনরাশি বা ধনসংখ্যা** (Positive number) এবং ঋণচিহ্ন যুক্ত সংখ্যা বা রাশিগুলিকে **ঋণরাশি বা ঋণসংখ্যা** (Negative number) বলা হয়। ধনচিহ্ন অনেক সময় উহ্য থাকে কিন্তু ঋণচিহ্ন কখনও উহ্য থাকে না। এইরূপে বিশিষ্ট অর্থে ব্যবহৃত সংখ্যাকে **নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা** (Directed number) বলে।

ধনরাশি ও ঋণরাশির চিহ্নগুলি সরাইয়া লইলে সংখ্যার যে মান হয় তাহাকে **পরম মান** (Absolute value) বলে। উহাদের প্রকাশ করিতে হইলে দুইটি উল্লম্ব রেখার '||' মধ্যে সংখ্যাটি লেখা হয়। যথা,

$|7|=7$ (পরম মান) ; $|-2|=2$ (পরম মান)।

1·2. চিত্র দ্বারা ধন ও ঋণ রাশির প্রকাশ :

← − + →
X' T S R Q P O A B C D E X
−5 −4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4 +5

XX' একটি সরলরেখার উপর O একটি **মূল বিন্দু** (Origin)। O বিন্দুর ডানদিকে A, B, C, D, E প্রভৃতি বিন্দু পরস্পর সমান দূরে অবস্থিত, অর্থাৎ $OA=AB=BC=CD=DE$, বামদিকেও ঐরূপ একই মাপের পরস্পর সমদূরে P, Q, R, S, T প্রভৃতি বিন্দু। এখানে $OP=PQ=QR=RS=ST$। এখন, OA, OB, OC, OD, OE প্রভৃতি $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$ প্রভৃতি নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা প্রকাশ করিতেছে; এবং OP, OQ, OR, OS, OT প্রভৃতি $-1, -2, -3, -4, -5$ প্রভৃতি নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা প্রকাশ করিতেছে। ডানদিকের গতি + এবং বামদিকের গতি − ধরিয়া নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা প্রকাশ করা হয়। O-কে শূন্য ধরিতে হইবে এবং ডানদিকের সংখ্যাগুলি ধনসংখ্যা এবং বামদিকের সংখ্যাগুলি ঋণসংখ্যা বলিয়া **ডানদিকের সংখ্যাগুলি শূন্য অপেক্ষা বৃহৎ** এবং **বামদিকের সংখ্যাগুলি শূন্য অপেক্ষা ক্ষুদ্র**। এই স্কেলে $OX=+a$ বুঝাইলে, O হইতে বিপরীত দিকে সমান দূরে $OX'=-a$ বুঝাইবে। এইরূপ **সংখ্যার স্কেলে** (Number scale) যে কোনও একক ব্যবহার করা যায়। যেমন, মনে কর A-কে 5 টাকা দেওয়া হইল, সে উহা হইতে 3 টাকা খরচ করিল। তাহা হইলে OE(+5) তাহার টাকার অবস্থান বুঝাইতেছে; এবং EB(−3) তাহার খরচ বুঝাইতেছে; এবং OB(+2) তাহার অবশিষ্ট আছে।

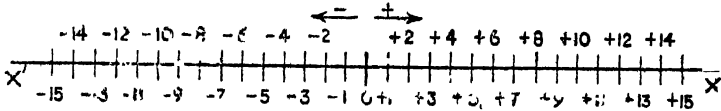
নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ

1·3. যোগ (Addition) :

← − + →

−14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 +2 +4 +6 +8 +10 +12 +14

X′ X

−15 −13 −11 −9 −7 −5 −3 −1 0 +1 +3 +5 +7 +9 +11 +13 +15

খাতায় কিংবা ব্লাক্‌বোর্ডে উপরে প্রদর্শিত একটি স্কেল আঁকিয়া লইলে নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার যোগ ও বিয়োগের প্রকৃতি ভালভাবে বুঝিতে পারা যাইবে।

$(+7)+(+3)=$ কত ? O হইতে ডানদিকে $+7$ দাগ অবধি গিয়া, সেখান হইতে আরও ডানদিকে 3 দাগ পর্যন্ত যাও। দেখ, $+10$ দাগ অবধি পৌছাইলে। সুতরাং $(+7)+(+3)=+10$.

অনুরূপ ভাবে $(-7)+(-3)=-10$, $(+7)+(-3)=+4$, $(-7)+(+3)=-4$ ইত্যাদি। অতএব,

$(+a)+(+b)=+(a+b)$

$(-a)+(-b)=-(a+b)$

$(+a)+(-b)=+(a-b)$ [aর পরমমান b অপেক্ষা বড় হইলে]

$\qquad\qquad\quad =-(b-a)$ [bর „ a „ „ „]

$(-a)+(+b)=-(a-b)$ [aর „ b „ „ „]

$\qquad\qquad\quad =+(b-a)$ [bর „ a „ „ „]

নিয়ম : 1. দুইটি নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা একই চিহ্নযুক্ত হইলে (+ অথবা −), উহাদের পরম মানের যোগফলের পূর্বে সংখ্যা দুইটির চিহ্ন বসাইবে। বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে, বৃহত্তরটির পরম মান হইতে ক্ষুদ্রতরটির পরম মান বিয়োগ করিয়া, বিয়োগফলের পূর্বে বৃহত্তরটির চিহ্ন বসাইবে।

2. দুইটির অধিক একই চিহ্নযুক্ত নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার যোগফল পাইতে হইলে, উহাদের পরম মানের যোগফলের পূর্বে সংখ্যাগুলির চিহ্ন বসাইবে। বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইলে, ধন-চিহ্ন বিশিষ্ট সংখ্যাগুলির এবং ঋণ-চিহ্ন বিশিষ্ট সংখ্যাগুলির পৃথক পৃথক যোগ করিয়া পূর্বের (1) নং নিয়ম অনুযায়ী যোগ করিবে।

যে সংখ্যাগুলিকে যোগ করা হয় তাহাদিগকে **যোজ্য সংখ্যা** বলে এবং উহাদের যোগ করিয়া যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে **যোগফল** (Sum) বলে।

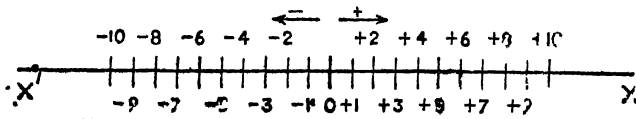
অনেকগুলি সংখ্যা ধনচিহ্ন বা ঋণচিহ্ন অথবা উভয় চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকিলে তাহাদের যোগফলকে **বীজগণিতীয় যোগফল** (Algebraic Sum) বলে। যেমন $a+b+c$, $-a-b-c$, $a+b-c-d+e$ প্রভৃতি।

1·4. বিয়োগ (Subtraction) : যে সংখ্যা বিয়োগ করা হয় তাহাকে **বিয়োজ্য** (Subtrahend), যাহা হইতে বিয়োগ করা হয় তাহাকে **বিয়োজন** (Minuend) এবং বিয়োগ করিবার পর যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে **বিয়োগফল** (Remainder or Difference) বলে। বিয়োগের নিয়ম খুবই সহজ। যোগ জানিলেই বিয়োগ করিতে পারা যায়।

নিয়ম : বিয়োগ করিতে হইলে বিয়োজ্য অর্থাৎ যাহা বিয়োগ করিতে হইবে তাহার চিহ্ন বদলাইয়া (অর্থাৎ + কে −, কিংবা − কে +) বিয়োজন অর্থাৎ যাহা হইতে বিয়োগ করিতে হইবে তাহার সহিত যোগ করিলে, এই যোগফলই উহাদের বিয়োগফল হইবে।

যেমন, $(+7)-(+3)=(+7)+(-3)=4$; $(+7)-(-3)=(+7)+(+3)=10$; $(-7)-(+3)=(-7)+(-3)=-10$; $(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=-4$.

সংখ্যা স্কেলের সাহায্যেও বিয়োগ করা যায়। এখানে ডানদিকে যাইলে + চিহ্ন হইবে এবং বামদিকে যাইলে − চিহ্ন হইবে।

আমরা দেখিয়াছি 7 হইতে 3 বিয়োগ করিতে হইলে, 3এর সহিত কত যোগ করিলে 7 হয় তাহাই নির্ণয় করি। অর্থাৎ $3+4=7$, সুতরাং $7-3=4$। এইরূপ যোগের সাহায্যেই বিয়োগ করিয়া থাকি।

পূর্বের উদাহরণগুলিতে (+3) দাগ হইতে ডানদিকে +4 দাগ আগাইলে +7 দাগে পৌছান যায়। সুতরাং $(+7)-(+3)=+4$.

তদ্রূপ (−3) দাগ হইতে ডানদিকে +10 দাগ আগাইলে +7 দাগে পৌছান যায়। সুতরাং $(+7)-(-3)=+10$. ইত্যাদি।

1·5. গুণ ((Multiplication) : একই সংখ্যাকে নির্দিষ্ট সংখ্যক বার যোগ করার সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়াকে **গুণ** বলে। যে সংখ্যাকে গুণ করা হয় তাহাকে **গুণ্য** (Multiplicand), যাহা দ্বারা গুণ করা হয় তাহাকে **গুণক** (Multiplier) এবং গুণ করিয়া যে ফলটি পাওয়া যায় তাহাকে **গুণফল** (Product) বলে।

1. যদি কোনও লোক প্রতিদিন 8 টাকা করিয়া একটি বাক্সে রাখেন, তাহা হইলে তিনি 4 দিনে রাখিবেন— $(+8)+(+8)+(+8)+(+8)=(+8)\times 4 = 32$ টাকা ; $\therefore$ $(+8)\times(+4)=+(8\times 4)=+32.$

2. ঐ লোকটি প্রতিদিন 8 টাকা করিয়া রাখেন, তাহা হইলে -4 দিনে অর্থাৎ 4 দিন আগে তিনি মোট কত রাখেন নাই ? $(+8)+(+8)+(+8)+(+8) = 32$ টাকা কম রাখিয়াছেন। অর্থাৎ -32 টাকা রাখিয়াছেন। $\therefore$ $(+8)\times(-4) = -(8\times 4) = -32.$

3. যদি লোকটি বাক্স হইতে প্রতিদিন 8 টাকা বাহির করেন, তাহা হইলে 4 দিনে মোট বাহির করিয়াছেন $8\times 4=32$ টাকা। অর্থাৎ তিনি রাখিয়াছেন -32 টাকা। $\therefore$ $(-8)\times(+4)=-(8\times 4)=-32.$

4. প্রতিদিন (-8) টাকা তিনি বাক্সে রাখিতেন অর্থাৎ 8 টাকা করিয়া তাঁহার খরচ হয়। -4 দিনে অর্থাৎ 4 দিন আগে $8\times 4=32$ টাকা ছিল। তাহাই প্রতিদিন 8 টাকা করিয়া খরচ করিবেন। $\therefore$ $(-8)\times(-4)=+(8\times 4)=+32.$

সুতরাং, **গুণ্য ও গুণক একই চিহ্নযুক্ত সংখ্যা হইলে গুণফল ধন-চিহ্নযুক্ত হইবে এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে গুণফল ঋণ-চিহ্নযুক্ত হইবে। উভয় ক্ষেত্রেই গুণ্য ও গুণকের পরম মানের গুণফল, গুণফলের পরম মান হইবে।**

যেমন, $(+a)\times(+b)=+(ab)$; $(-a)\times(-b)=+(ab).$
$(+a)\times(-b)=-(ab)$; $(-a)\times(+b)=-(ab).$

1·6. ভাগ (Division) : যাহাকে ভাগ করা হয় তাহাকে **ভাজ্য** (Dividend), যাহা দ্বারা ভাগ করা হয় তাহাকে **ভাজক** (Divisor) এবং ভাগ করিয়া যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে **ভাগফল** (Quotient) বলে। পাটিগণিতে দেখা যায় $40\div 8$ এর ভাগফল, এমন একটি সংখ্যা, এক্ষেত্রে 5, যাহাকে 8 দ্বারা গুণ করিলে 40 হয়।

অর্থাৎ $8\times 5=40$ $\therefore$ $40\div 5=8.$ অতএব $(+40)\div(+8)=(+5).$

$\therefore$ $(+ab)\div(+a)=(+b)$; $(+ab)\div(-a)=(-b).$
$(-ab)\div(-a)=(+b)$; $(-ab)\div(+a)=(-b).$

সুতরাং, ভাজ্য এবং ভাজক একই চিহ্নযুক্ত হইলে, ভাগফল ধন-চিহ্ন বিশিষ্ট হয় ; বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট হইলে, ভাগফল ঋণ-চিহ্ন বিশিষ্ট হয়। উভয় ক্ষেত্রেই উহাদের পরম মানের ভাগফল নির্ণেয় ভাগফলের পরম মান হইবে।

প্রশ্নমালা 1

[1 ও 2 ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. লেখচিত্র সাহায্যে নির্ণয় কর :

(*a*) একটি ট্রেন পূর্বদিকে 50 কিলোমিটার গিয়া পশ্চিমদিকে 30 কিলোমিটার গেল। লেখচিত্র সাহায্যে দেখাও এখন ট্রেনটি কতদূরে আছে।

(*b*) ব্যবসায়ে মাসিক আয় 500 টা, ব্যয় 350 টা., লাভ বা লোকসান কত ?

(*c*) বাক্সে 150 টা. রাখিলাম, পরে 50 টা. বাহির করিলাম, কত টাকা রহিল ?

(*d*) কোন দ্রব্য 100° সে. উষ্ণতায় উত্তপ্ত করিবার পর 110° সে. উষ্ণতা কমিয়া গেল, এখন দ্রব্যটির উষ্ণতা কত ?

2. লেখচিত্র সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

(i) $(+7)+(+4)$. (ii) $(+7)+(-4)$.

(iii) $(-7)+(-4)$. (iv) $(-7)+(+4)$.

(v) $(+5)\times(-3)$. (vi) $(-28)\div(-7)$.

(vii) $(+28)\div(-4)$ (viii) $(-28)\div(+4)$.

3. শূন্যস্থান পূরণ কর :

(i) $(-4)+(\quad)=(+11)$. (ii) $(\quad)\div(-6)=(-7)$.

(iii) $(-7)\times(-6)=(\quad)$. (iv) $(42)-(\quad)=(-21)$.

4. লেখচিত্র সাহায্যে মান নির্ণয় কর :

(i) $(-10)+(+7)$. (ii) $(-25)+(-15)$. (iii) $(+100)+(-100)$.

(iv) $(-7)-(-3)$. (v) $(+14)-(-7)$. (vi) $(+7)-(-10)$.

5. একটি দ্রব্যের উষ্ণতা 65°C, আরও −15° উষ্ণতা বাড়িল ; এখন উষ্ণতা কত ?

6. কোন ব্যক্তি পূর্বে 15 কিলোমিটার গিয়া পশ্চিমে 25 কিলোমিটার যাইবার পর সে এখন প্রারম্ভিক স্থান হইতে কত দূরে এবং কোন্ দিকে আছে? নীচের সম্ভাব্য উত্তরগুলির মধ্যে শুদ্ধ উত্তরটি লিখ।

(ক) পূর্বে 40 কিলো. মি. (খ) পশ্চিমে 40 কিলো. মি. (গ) পশ্চিমে 10 কিলো. মি. (ঘ) পূর্বে 10 কিলো মি.।

7. এক ব্যক্তি ব্যবসায়ে প্রথমে 1000 টাকা লাভ করিল, পরে তাহার 700 টাকা ক্ষতি হইল। নীচের সম্ভাব্য উত্তরগুলি হইতে শুদ্ধ উত্তরটি লিখ।

(ক) লাভ 1700 টা. (খ) ক্ষতি 1700 টা. (গ) ক্ষতি 300 টা. (ঘ) লাভ 300 টা.।

8. $(+400) \div (-40)$: নীচের সম্ভাব্য উত্তরগুলির মধ্যে শুদ্ধ উত্তরটি লিখ।

সম্ভাব্য উত্তর: (ক) -10 (খ) $+40$ (গ) 440 (ঘ) $+10$.

9. কলিকাতা হইতে বরাহনগর 6 কিলোমিটার উত্তরে এবং বেহালা 8 কিলোমিটার দক্ষিণে। বেহালা হইতে বরাহনগর কতদূরে এবং কোন্ দিকে?

10. কোনও স্থানের উষ্ণতা 32° সে., বৃষ্টি পড়িয়া 8° সে. উষ্ণতা কমিয়া গেল। এক্ষণে উষ্ণতা কত ডিগ্রী সেন্টিগ্রেড?

11. প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য x টাকা; 100 গ্রামের মূল্য কত?

12. দুইটি রাশির গুণফল $100ab$, একটি রাশি যদি $50a^2$ হয় অপরটি কত?

সম্ভাব্য উত্তর:

(i) $50ab$, (ii) $500\frac{b}{a}$, (iii) $2\frac{b}{a}$, (iv) $2\frac{a}{b}$.

2

মৌলিক নিয়মাবলী

Fundamental Laws

A. যোগ ও বিয়োগ

2·1. কয়েকটি রাশিকে একত্র করিয়া ফল নির্ণয় প্রণালীকে **যোগ** (Addition) বলে। রাশিগুলির প্রত্যেকটিকে **যোজ্যরাশি** (Addenda বা Summand) এবং যোগ করিয়া যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে **যোগফল** (Sum) বলে।

2·2. দুইটি ধনরাশির বা দুইটি ঋণরাশির যোগফলে, উহাদের পরম মানের **যোগফলের** পূর্বে ধনচিহ্ন বা ঋণচিহ্ন বসাইতে হইবে। যথা,

$(+7)+(+3)=+(7+3)=(+10)$; $(-7)+(-3)=-(7+3)=(-10)$.

দুইটি ভিন্ন চিহ্ন-যুক্ত রাশির যোগফলে উহাদের পরম মানের **বিয়োগফলের** পূর্বে বৃহত্তরটির চিহ্ন বসাইতে হইবে। যথা,

$(+7)+(-3)=+(7-3)=(+4)$; $(-7)+(+3)=-(7-3)=(-4)$.

2·2-1. **বিনিময় সূত্র** (Commutative Law) : যে রাশিগুলিকে যোগ করা হয় তাহাদের ইচ্ছামত ক্রম পরিবর্তন করিলেও যোগফল একই থাকে। যেমন, $7+3=10$; $3+7=10$. $\therefore$ $7+3=3+7$.

$\therefore$ $a+b=b+a$, $a+b+c=b+a+c=b+c+a=c+b+a$.

2·2-2. **সংযোগ সূত্র** (Associative Law) : যোজ্য রাশিগুলিকে ইচ্ছামত কয়েকটি **দলে** (Group) বিভক্ত করা যায়। এই দলগুলির যোগফলই নির্ণেয় যোগফল। যথা, $5x+7x+x+3x=16x$; $(5x+x)+(7x+3x)=6x+10x=16x$; $(5x+3x)+(7x+x)=8x+8x=16x$. প্রভৃতি।

2·3-1. **সদৃশ ও অসদৃশ পদ** (Like and Unlike terms) : এক জাতীয় পদগুলিকে **সদৃশ পদ** বলে। 5টি খাতা, 10টি খাতা, 20টি খাতা ; কিংবা $3a$, $7a$, $10a$, ইত্যাদি। সদৃশ পদের যোগ হয়। $3a+7a+10a=20a$. $4a^2+7a^2+9a^2=20a^2$. অসদৃশ পদের যোগ করিবার সময় উহাদের সাজাইয়া যোগ চিহ্নগুলি মধ্যে রাখিয়া প্রকাশ করিতে হয়। যেমন, $5a$, $7a^2$, $3ab$, $4b^2$ এর যোগফল হইবে $5a+7a^2+3ab+4b^2$.

2·3-2 **সদৃশ একপদ রাশির যোগ** : সহগগুলির বীজগণিতিক যোগ করিয়া তাহার পরে সাধারণ বীজগণিতীয় রাশিটি বসাইতে হয়।

উদাহরণ 1. যোগ কর: $3x^2, 7x^2, 10x^2$.

$3x^2+7x^2+10x^2=(3+7+10)x^2=20x^2$. (যোগফল)

+ চিহ্নযুক্ত পদগুলি একত্র করিয়া ও − চিহ্নযুক্ত পদগুলি একত্র করিয়া উহাদের পৃথক যোগফল বিয়োগ করিতে হয়।

উদাহরণ 2. যোগ কর: $\frac{1}{2}a^2, -\frac{1}{4}a^2, -\frac{3}{4}a^2, a^2$.

$$\tfrac{1}{2}a^2+(-\tfrac{1}{4}a^2)+(-\tfrac{3}{4}a^2)+a^2=(\tfrac{1}{2}a^2+a^2)+(-\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{3}{4}a^2)$$

$$=(\tfrac{1}{2}+1)a^2+(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{3}{4})a^2=\tfrac{3}{2}a^2-a^2=\tfrac{1}{2}a^2. \text{ (যোগফল)}$$

2·3-3. **বহুপদ রাশির যোগ:** রাশিগুলি একটির নীচে একটি এরূপভাবে সাজাইতে হয় যে সদৃশ পদগুলি একই স্তম্ভে (Column) থাকে। পরে প্রতি সদৃশ পদের স্তম্ভ পৃথক পৃথক যোগ করিয়া উহাদের নিজ নিজ চিহ্ন সমেত পাশাপাশি রাখিলেই প্রকৃত যোগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 3. $3x^2y+4xy^2$, $7x^3+4y^3$, $3x^3+4x^2y+3xy^2+y^3$, $3x^3+3x^2y+3xy^2+6y^3$.

$$\begin{array}{rrrr} & 3x^2y+ & 4xy^2 & \\ 7x^3 & & & +\ 4y^3 \\ 3x^3 & +4x^2y+ & 3xy^2+ & y^3 \\ 3x^3 & +3x^2y+ & 3xy^2+ & 6y^3 \\ \hline \end{array}$$

যোগফল: $\mathbf{13x^3+10x^2y+10xy^2+11y^3}$.

2·4. **বিয়োগ:** যোগের বিপরীত প্রক্রিয়া বিয়োগ। একটি রাশি হইতে আর একটি রাশি সরাইয়া লইলে যাহা পড়িয়া থাকে তাহা বাহির করিবার প্রণালীকে **বিয়োগ** (Subtraction) বলে।

নিয়ম: 1. সদৃশ রাশির বিয়োজ্যের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া অর্থাৎ + কে − করিয়া, কিংবা − কে + করিয়া বিয়োজনের সহিত যোগ করিলে, নির্ণেয় বিয়োগফল পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. $7x^2$ হইতে $3x^2$ বিয়োগ কর।

$7x^2$ হইতে $+3x^2$ বিয়োগ করিতে হইবে। $+3x^2$র চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া $-3x^2$ হইল। ইহা $7x^2$র সহিত যোগ করিতে হইবে। অর্থাৎ $7x^2+(-3x^2)$ $=7x^2-3x^2=(7-3)x^2=4x^2$. (বিয়োগফল).

2. বিয়োজনের নীচে স্তম্ভাকারে বিয়োজ্যের সদৃশ পদগুলি বসাইতে হইবে। পরে বিয়োজ্যের প্রতি পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিতে হইবে,

অর্থাৎ + কে −, কিংবা − কে + করিতে হইবে। এই পরিবর্তিত পদগুলির সহিত প্রতি স্তম্ভের বিয়োজনের সদৃশ পদগুলি যোগ করিয়া যোগফল পাশাপাশি সাজাইলে বিয়োগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 2. $13a^2+14ab-7b^2$ হইতে $10a^2-6ab+13b^2$ বিয়োগ কর।

$$\begin{array}{lr} \text{বিয়োজন} & 13a^2+14ab-7b^2 \\ \text{বিয়োজ্য} & 10a^2-\ 6ab+13b^2 \\ & -\quad\ +\quad\ - \\ \hline \text{অর্থাৎ যোগ} & 13a^2+14ab-\ 7b^2 \\ & -10a^2+\ 6ab-13b^2 \\ \hline \therefore\ \text{বিয়োগফল} & \mathbf{3a^2+20ab-20b^2}. \end{array}$$

প্রশ্নমালা 2A

[1 হইতে 3 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1 যোগ কর :

(1) $ab^2, 2ab^2, -4ab^2, -7ab^2$.

$ab^2+2ab^2+(-4ab^2)+(-7ab^2)=(1+2-4-7)ab^2=-8\boldsymbol{ab^2}$.

(2) $3x^2y^2, -4x^2y^2, -3ab^2, 11ab^2$.

(3) $210xyz, -450xyz, 730\ xyz, -50xyz, -110xyz$.

2. যোগফল নির্ণয় কর :

(1) $a-b, b-c, c-d, d-e$.

$(a-b)+(b-c)+(c-d)+(d-e)$

$=a-b+b-c+c-d+d-e=\boldsymbol{a-e}$.

(2) $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-a^2$.

(3) $x^2y^2+y^2z^2-z^2x^2, y^2z^2+z^2x^2-x^2y^2, z^2x^2+x^2y^2-y^2z^2$.

3. বিয়োগ কর :

(1) $4ab-4bc+7ac$ হইতে $3ab+2bc+4ac$.

$$\begin{array}{r} 4ab-4bc+7ac \\ 3ab+2bc+4ac \\ -\quad\ -\quad\ - \\ \hline \mathbf{ab-6bc+3ac} \end{array}$$

(2) $ab+ac+bd+cd$ হইতে $ab+cd-ac-bd$.

(3) $\frac{1}{2}a-b-\frac{1}{3}c$ হইতে $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c$.

(4) 0 হইতে $3a^2+4b^2-6c^2$.

4. **যোগ কর :**

(1) $x^3+3x^2y+3xy^2,\ -x^3-6xy^2-3x^2y,\ 4xy^2+3x^2y$.

(2) $13a^3+15a^2b+20b^3,\ -6b^3+5ab^2+7a^2b+7c^3,$
$17a^3+8a^2b+15ab^2+13c^3,\ 5a^3+5b^3+5c^3$.

(3) $x^2+3xy+y^2+x-y+z,\ -4x^2-4xy-y^2-x+y-z,$
$-3x^2+xy+2y^2+4x-7y+z,\ -4x^2-4xy-3y^2-5x+8y-z$

(4) $\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}xy-\frac{1}{4}y^2,\ -x^2-\frac{2}{3}xy+2y^2,\ \frac{2}{3}x^2-xy-\frac{5}{4}y^2$.

5 **বিয়োগ কর :**

(1) $-10a+15b-20c$ হইতে $-15a+20b-25c$

(2) $yz-zx+xy-4xyz$ হইতে $-yz+zx-xy-5xyz$.

(3) 2 হইতে $4a^2+5a+5$ এবং 0 হইতে $3a^2+7a+5$.

(4) $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y-5z$ হইতে $-\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y-\frac{12}{5}z$.

6. **শূন্যস্থান পূরণ কর :**

(1) $(3a-4b+7c)+(4a+3b-8c)=7^*-*-c$.

(2) $(\quad)-(7a^2-3b^2-8c^2)=5a^2+4b^2-9c^2$.

7. যদি $a=1,\ b=2,\ c=-3$ হয় তাহা হইলে,
$a^2bc+2ab^2c+3abc^2-a^2-b^2-c^2$ এর মান নির্ণয় কর।

8. $V=5a+4b-6c,\ X=-3a-9b+7c,\ Y=20a+7b-5c,$
এবং $Z=13a-5b+9c$ হইলে,
$V-(X+Y)+Z$ এর মান নির্ণয় কর। [M. U. 1883]

9. (1) $x^3+x^2y-y^3$ অপেক্ষা $3x^3-2x^2y+2y^3+4$ কত কম ?

(2) $3a^4+4a^2b^2+8b^4$ অপেক্ষা $2a^4-2a^2b^2+2b^4$ কত অধিক ?

10. একটি বালক $x+y$টি অঙ্ক কষিল, তন্মধ্যে $y-2x$টি শুদ্ধ হইল। কতগুলি তাহার ভুল হইয়াছে ? শুদ্ধ উত্তরটি খাতায় লিখ।

সম্ভাব্য উত্তর : (i) $x+2y-2x$, (ii) $-x+2y$, (iii) $3x$, (iv) $2y-x$.

B. গুণ ও ভাগ

2·5. গুণ : পঞ্চম পৃষ্ঠায় তোমরা জানিয়াছ—

$(+a)\times(+b)=+(ab)$; $(+a)\times(-b)=-(ab)$;

$(-a)\times(-b)=+(ab)$; $(-a)\times(+b)=-(ab)$.

2·5-1. বিনিময় সূত্র (Commutative Law) : গুণ করিবার সময় উৎপাদকগুলিকে যে কোন ক্রমে (order) লওয়া যায়, ইহাতে গুণফলের কোনও পরিবর্তন হয় না।

$a\times b=b\times a$; $a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=b\times a\times c$ ইত্যাদি।

2·5-2. সংযোগ সূত্র (Associative Law) : গুণ করিবার সময় উৎপাদকগুলিকে যে কোন দলে (Group) সঙ্ঘবদ্ধ করা যায়, তাহাতে গুণফলের কোনও পরিবর্তন হয় না।

$$abc=(a\times b)\times c=(a\times c)\times b=a\times(b\times c).$$

$$abcx=ac\times bx=ax\times bc=ab\times cx.$$

2·5-3. সূচক সূত্র (Index Law) : নীচে সূচক নিয়মটি দেওয়া হইল—

$\because\ a^2=a\times a,\ a^3=a\times a\times a.$

$\therefore\ a^2\times a^3=(a\times a)\times(a\times a\times a)$
$=a\times a\times a\times a\times a=a^5=a^{2+3}.$

অতএব 1. $a^m\times a^n=(a\times a\times a\cdots m \text{ পদ})\times(a\times a\times a\ldots n \text{ পদ})$
$=(a\times a\times a\times a\times a\times a\ldots m+n \text{ পদ})=a^{m+n}.$

$\therefore\ \boldsymbol{a^m\times a^n=a^{m+n}}.$ ইহাকে সূচক নিয়ম বলে।

এইরূপে $a^m\times a^n\times a^p\cdots=a^{m+n+p\cdots}$

2. $(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times a^m\cdots n$ পদ পর্যন্ত
$=a^{m+m+m+m+\cdots n}$ পদ পর্যন্ত
$=a^{mn}.\ \therefore\ (a^m)^n=a^{mn}.$

3. $(a^n)^m=a^n\times a^n\times a^n\times a^n\cdots m$ বার
$=a^{n+n+n+n\cdots m}$ বার
$=a^{nm}.$

$\therefore\ (a^n)^m=a^{mn}$ অতএব $(a^m)^n=(a^n)^m.$

4. $(ab)^m=ab\times ab\times ab\times ab\times ab\cdots m$ বার,
$=(a\times a\times a\times a\cdots m \text{ বার})\times(b\times b\times b\times b\cdots m \text{ বার})$
$=a^m\times b^m.\ \therefore\ (ab)^m=a^mb^m.$

দ্রষ্টব্য : a^3এর অর্থ হইল a কে তিনবার গুণ করা, অর্থাৎ $a \times a \times a$। a অক্ষরটির ডান দিকে মাথার কাছে ছোট করিয়া যতবার গুণ করা হইবে সেই সংখ্যাটি লিখিতে হয়। a কে যতবার গুণ করা হইল তাহাই হইল aর ঘাত বা শক্তি (Power)। যে সংখ্যা এই ঘাত সূচিত করে (এখানে 3) তাহাকে **সূচক** (Index) এবং যাহাকে বার বার গুণ করা হয় তাহাকে **নিধান** (Base) বলে। এখানে 3 সূচক ও a নিধান।

সূচক নিয়ম হইতে দেখা গেল যে,

1. **নিধানগুলি সমান হইলে, তাহাদের ভিন্ন ভিন্ন সূচকগুলির যোগফল গুণফলের সূচক হইবে।**

অর্থাৎ $x^a \times x^b \times x^c = x^{a+b+c}$

2. **নিধানগুলি ভিন্ন, কিন্তু সূচক সমান হইলে, গুণফলে নিধানগুলিকে গুণ করিয়া একটি সূচক ঘাত হইবে।** অর্থাৎ $a^m \times b^m \times c^m = (abc)^m$.

3. **নিধানগুলি সমান ও সূচকগুলিও সমান হইলে উপরের দুইটি নিয়ম খাটিবে।** অর্থাৎ $a^m \times a^m = a^{m+m} = a^{2m}$.

4. **নিধানগুলি অসমান ও সূচকগুলিও অসমান হইলে কোনও সূচক নিয়মই খাটিবে না।** যেমন, $a^m \times b^n = a^m \times b^n$.

2·5-4. **বিচ্ছেদ সূত্র** (Distributive Law) :

$(a+b)m = (a+b)+(a+b)+(a+b)+)a+b)\cdots m$ বার

$= (a+a+a+a\cdots m$ বার$)+(b+b+b+b\ldots m$ বার$)$

$= am+bm.$

এইরূপে $(a+b+c+d\cdots)m = am+bm+cm+dm\cdots\cdots$

এই প্রণালীকে **বিচ্ছেদ সূত্র** বলে। এই সূত্রের সাহায্যে দ্বিপদ বা বহুপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা গুণ করা হয়।

উদাহরণ 1. $(a+b)x = \mathbf{ax+bx}.$

উদাহরণ 2. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$ কে $2abc$ দ্বারা গুণ কর।

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)2abc = 2abc.a^3+2abc.a^2b+2abc.ab^2+2abc.b^3$

$= \mathbf{2a^4bc+2a^3b^2c+2a^2b^3c+2ab^4c.}$

পাটিগণিতের গুণনের ন্যায় গুণ্যের নীচে গুণক রাখিয়াও গুণ করা যায়।

উদাহরণ 3.

গুণ্য : $a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3$

গুণক : $2ab$

গুণফল : $\mathbf{2a^5b+6a^4b^2+6a^3b^3+2a^2b^4}.$

2·5-5. বহুপদ রাশিকে বহুপদ রাশিদ্বারাও বিচ্ছেদ সূত্র প্রণালীতে গুণ করা যায়।

$\because$ $(a+b)x=ax+bx.$ এক্ষণে x এর পরিবর্তে $c+d$ বসাইলে

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd.$$

উদাহরণ 1. $a+b+c$ কে $x+y$ দ্বারা গুণ কর।

$$(a+b+c)\times(x+y)=a(x+y)+b(x+y)+c(x+y)$$
$$=\mathbf{ax+ay+bx+by+cx+cy}.$$

অথবা, $(a+b+c)\times(x+y)=(a+b+c)x+(a+b+c)y$
$$=\mathbf{ax+bx+cx+ay+by+cy}.$$

উদাহরণ 2. $a+b+c+d$ কে $p+q$ দ্বারা গুণ কর।

গুণ্য : $a+b+c+d$

গুণক : $p+q$

p দ্বারা গুণফল : $ap+bp+cp+dp$

q দ্বারা গুণফল : $aq+bq+cq+dq$

$\therefore$ গুণফল : $\mathbf{ap+bp+cp+dp+aq+bq+cq+dq}$

2·5-6. ক্রমিক গুণফল (Continued Product) :

তিন বা তাহার অধিক সংখ্যক রাশি পর পর গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে ক্রমিক গুণফল বলে। দুইটি রাশি প্রথমে গুণ করিয়া যে গুণফল পাওয়া যায়, সেই গুণফলকে তৃতীয় রাশি দ্বারা গুণ করিতে হয়। এইরূপে পর পর গুণফলকে গুণ করিতে করিতে সর্বশেষে ক্রমিক গুণফল পাওয়া যায়। সুবিধামত রাশিগুলিকে যে কোন ক্রমে লইয়াও গুণ করা যায়।

উদাহরণ—ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

$$x-a,\ x+a,\ x^2+a^2,\ x^4+a^4.$$

$x+a$	x^2+a^2	x^4+a^4
$x-a$	x^2-a^2	x^4-a^4
x^2+ax	$x^4+a^2x^2$	$x^8+a^4x^4$
$\quad -ax-a^2$	$\quad -a^2x^2-a^4$	$\quad -a^4x^4-a^8$
$x^2 \quad -a^2$	$x^4 \quad -a^4$	$x^8 \quad -a^8$

$\therefore$ ক্রমিক গুণফল $=\mathbf{x^8-a^8}$.

প্রশ্নমালা 2 B

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা গুণ কর :

1. $a+b+c, a+b-c.$

2. $x^2+xy+y^2, x^2-xy+y^2.$

3. $x^2+x-2, x^2+x+6.$ 4. $-a^5+a^4b-a^3b^2, -a-b.$

5. $a^2-2ax+4x^2, a^2+2ax+4x^2.$

6. $x^4-ax^3+a^3x-a^4, x^2+ax+a^2.$

7. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca, a+b+c.$

8 $9a^2+4b^2+c^2-2bc-3ac-6ab, 3a+2b+c.$

গুণফল নির্ণয় কর :

9. $(a-b), (b-c), (c-a).$ 10. $a+b, a+2b, a-2b, a-b.$

11. $x^2+ax-b^2, x^2+bx-a^2, x-(a+b).$

12 $(x^{-1}-y^{-1}), (x^{-1}+y^{-1}), (x^{-2}+y^{-2}).$

13. $1-a+2a^2-3a^4, 3a-5+2a^2.$ [C. U. 1918]

14. $a^8-a^6+2a^4+a^2+1, a^4+a^2-1.$ [C. U. 1892]

15. $a^2+b^2-ab+a+b+1, a+b-1.$ [D B. 1934]

16 $4x^2+9y^2+z^2+3yz-2zx+6xy, 2x-3y+z.$ [C. U. 1912]

17. $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}a-\frac{1}{3}.$ 18. $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}.$

19. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b, a-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b.$ 20 $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}, a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}.$

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

21. $x+1, x+2$ এবং $x+3.$ 22. $x-y, x^2+xy+y^2$ এবং $x^3+y^3.$

23. $x^2+2ax+a^2, x^2-2ax+a^2$ এবং $x^4+2x^2a^2+a^4.$

[B..U. 1926]

24. $a+b+c, b+c-a, c+a-b$ এবং $a+b-c.$ [Pat U. 1922]

25. শুদ্ধ উত্তরটি খাতায় লিখ। ডাইনে সম্ভাব্য উত্তরগুলি দেওয়া আছে।

$(a-b+c)(b-c+a)-(c-b+a)(c+a+b)=$ (1) $a(b+c+a),$

(2) $2a(b-c+a),$

(3) $2c(b-c-a).$

2·6. **ভাগ (Division) :** ভাজ্য যদি ভাজক দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য না হয়, তাহা হইলে ভাগ কার্যের শেষে যে সংখ্যা পড়িয়া থাকে তাহার নাম **ভাগশেষ** বা **অবশিষ্ট** (Remainder)। অবশিষ্ট না থাকিলে, **ভাজক × ভাগফল = ভাজ্য।** সুতরাং, **ভাজ্য ÷ ভাজক = ভাগফল**, এবং **ভাজ্য ÷ ভাগফল = ভাজক** হইবে। অতএব ভাগ প্রকৃতপক্ষে গুণেরই বিপরীত প্রক্রিয়া।

b-দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে এবং Q ভাগফল হইলে,

$$a \div b = Q,\ a = bQ\ ;\ a \div Q = b.$$

এবং a কে b দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল Q এবং ভাগশেষ R হইলে,

$$a = bQ + R\ ;\ (a - R) \div b = Q.$$

2·6-1. **ভাগের সূচক সূত্র (Index Law) :** m ও n অখণ্ড ধন রাশি হইলে এবং m, n অপেক্ষা বৃহৎ হইলে, $m = m - n + n = (m - n) + n.$

[1.] $a^m = a^{m-n+n} = a^{m-n} \times a^n.$

$\therefore\ a^m \div a^n = a^{m-n}$ কিন্তু $a \neq 0$, [$\neq$ অর্থ সমান নহে।]

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \cdots\cdots\cdots m$ পদ পর্যন্ত

$= \frac{a \times a \times a \times a \times \cdots\cdots m \text{ পদ পর্যন্ত}}{b \times b \times b \times b \times \ldots\ldots m \text{ পদ পর্যন্ত}} = \frac{a^m}{b^m}.$ কিন্তু $\frac{a}{b} \neq 0.$

দ্রষ্টব্য : $a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$

$m = n$ হইলে, $a^n \div a^n = \frac{a^n}{a^n} = 1$ এবং $a^n \div a^n = a^{n-n} = a^0.$

অতএব $a^0 = 1.$

শূন্য ব্যতীত যে কোন রাশির সূচক শূন্য হইলে উহার মান সর্বদাই 1 হইবে। $x^0 = 1$, $(3x)^0 = 1$, $(\frac{5}{4})^0 = 1$, $3x^0 = 3$; ইহাই ভাগের সূচক সূত্রের প্রয়োগ।

[2.] $\frac{1}{a^4} = \frac{a^0}{a^4} = a^{0-4} = a^{-4}.$ [যেহেতু $a^0 = 1$]

$\therefore\ a^4 = \frac{1}{\frac{1}{a^4}} = \frac{1}{1 \div a^4} = \frac{1}{a^0 \div a^4} = \frac{1}{a^{0-4}} = \frac{1}{a^{-4}}.$

অতএব, কোন রাশিকে হর হইতে লবে অথবা লব হইতে হরে আনিতে হইলে উহার সূচকের চিহ্ন পরিবর্তন করিতে হয়।

2·6-2. **ভাগের চিহ্ন বিষয়ক নিয়মাবলী :** ভাজক ও ভাজ্যের একই চিহ্ন থাকিলে ভাগফল ধন-চিহ্ন যুক্ত হইবে। বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে ভাগফল ঋণ-চিহ্ন যুক্ত হইবে।

2·6-3. **একপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ :** ভাজ্যের চিহ্নযুক্ত সংখ্যা-সহগকে (numercial coefficient) ভাজকের সংখ্যা-সহগ দ্বারা ভাগ করিতে হইবে, এবং ভাজ্যের অক্ষরগুলিকে ভাজকের অক্ষরগুলি দ্বারা সূচক সূত্র অনুসারে ভাগ করিতে হইবে। এইরূপে ভাগফলের পরম মান পাইয়া ভাগফলের চিহ্ন বিষয়ক নিয়মানুসারে চিহ্ন বসাইতে হইবে।

উদাহরণ : $24a^3b^4c^3 \div 3ab^2c.$

$24 \div 3 = 8$; $a^3 \div a = a^{3-1} = a^2$, $b^4 \div b^2 = b^{4-2} = b^2$;

$c^3 \div c = c^{3-1} = c^2$, ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই + চিহ্নযুক্ত,

$\therefore$ ভাগফল + হইবে, অতএব ভাগফল $= 8a^2b^2c^2$

উদাহরণ : $-56x^7y^7z^7 \div 7x^2y^3z^4.$

$-56 \div 7 = -8$; $x^7 \div x^2 = x^{7-2} = x^5$, $y^7 \div y^3 = y^{7-3} = y^4$,

$z^7 \div z^4 = z^{7-4} = z^3$. $\therefore$ ভাগফল $= -8x^5y^4z^3$.

2·6-3·1. আর একটি নিয়মেও ভাগ করা যায়। ভাজ্যটি ভগ্নাংশের লবে রাখিয়া ভাজকটি হরে রাখিতে হয়। উভয়ের সাধারণ উৎপাদকগুলি পরিত্যাগ করিয়া ভাগের চিহ্ন বিষয়ক নিয়মানুযায়ী ভাগফলে চিহ্ন বসাইতে হইবে।

উদাহরণ : $-20a^3b^3c^3$ কে $-4ab^2c^2$ দিয়া ভাগ কর।

$$\text{ভাগফল} = \frac{-20a^3b^3c^3}{-4ab^2c^2} = \frac{-5 \times \cancel{4} \times a \times a^2 \times b \times b^2 \times c \times c^2}{-\cancel{4} \times a \times b^2 \times c^2} = 5a^2bc.$$

2·6-4. **বহুপদ রাশিকে একপদ রাশি দ্বারা ভাগ :**

$$\frac{am+bm+cm+\cdots\cdots}{m} = \frac{am}{m} + \frac{bm}{m} + \frac{cm}{m} + \cdots = a+b+c+\cdots$$

ইহাই ভাগের বিচ্ছেদ সূত্র (Distributive Law)। ইহাতে বহুপদ রাশিকে একপদ রাশিদ্বারা ভাগ করিতে হইলে, চিহ্নযুক্ত ভাগের প্রত্যেক পদকে ভাজক দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাহাদের সমষ্টি লইলে নির্ণেয় ভাগফল পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ : $8x^2yz+16xy^2z-24xyz^2$ কে $4xyz$ দিয়া ভাগ কর।

$$\text{ভাগফল}=\frac{8x^2yz+16xy^2z-24xyz^2}{4xyz}=\frac{8x^2yz}{4xyz}+\frac{16xy^2z}{4xyz}+\frac{-24xyz^2}{4xyz}.$$

$$=(8\div4)x^{2-1}y^{1-1}z^{1-1}+(16\div4)x^{1-1}y^{2-1}z^{1-1}$$
$$+(-24\div4)x^{1-1}y^{1-1}z^{2-1}$$

$$=2x^1y^0z^0+4x^0y^1z^0+(-6)x^0y^0z^1$$

$$=2x+4y-6z \quad [\because \; x^0=1,\; y^0=1,\; z^0=1.]$$

2·6-5. **বহুপদ রাশিকে দ্বিপদ ও বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ : বহুপদ রাশিকে দ্বিপদ বা বহুপদ রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইলে, ভাজ্য ও ভাজকের যে কোন সাধারণ একটি অক্ষরের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম মান অনুসারে সাজাইয়া লইতে হয়।** $ax^4+a^2x^3+a^3x^2+a^4x$ এই রাশিটি লক্ষ্য করিলে বুঝিতে পারা যায় যে, a অক্ষরের ঊর্ধ্বক্রম এবং x অক্ষরের অধঃক্রম মান অনুসারে সাজান আছে। এইরূপে ভাজ্য ও ভাজককে সাজাইতে হইবে।

উদাহরণ : $6x^2-5x-4$ কে $3x-4$ দিয়া ভাগ কর।

$$\begin{array}{r|l|l}
3x-4 & 6x^2-5x-4 & 2x+1 \\
 & 6x^2-8x & \\
 & -\quad + & \\ \hline
 & 3x-4 & \\
 & 3x-4 & \\ \hline
\end{array}$$

$\therefore$ ভাগফল $=2x+1$.

প্রক্রিয়া 1. সর্বপ্রথম ভাজ্য ও ভাজককে x-এর ঘাতের অধঃক্রম মান অনুসারে সাজান হইল। সাজান থাকিলে ভাগ কার্য সরাসরি আরম্ভ করিতে হইবে।

2. ভাজ্যের প্রথম পদকে ভাজকের প্রথম পদ দিয়া ভাগ করিয়া ভাগফলের প্রথম পদ নির্ণয় করা হইল। এস্থলে $6x^2$ কে $3x$ দিয়া ভাগ করিয়া $2x$ হইল ; $2x$ ভাগফলের প্রথম পদ।

3. ভাগফলের প্রথম পদ দিয়া ভাজকের প্রত্যেক পদকে গুণ করিয়া গুণফল ভাজ্যের সদৃশ পদগুলির নীচে রাখিয়া বিয়োগ করিতে হইবে। এস্থলে $2x$ দিয়া $3x-4$ কে গুণ করিয়া $6x^2-8x$ হইল। ইহা ভাজ্যে $6x^2-5x$ হইতে বিয়োগ করিয়া $3x$ হইল।

4. অবশিষ্ট এবং আবশ্যক হইলে ভাজ্য হইতে সুবিধামত পদ নামাইয়া পূর্বোক্ত প্রক্রিয়ায় ভাগফলের দ্বিতীয় পদ নির্ণয় করিতে হইবে। নির্ণেয় ভাগফলের দ্বিতীয় পদ দ্বারা ভাজককে গুণ করিয়া এই অবশিষ্ট হইতে বিয়োগ করিতে হইবে। এস্থলে

$3x$ কে $3x$ দিয়া ভাগ করিয়া $+1$ হইল ; $+1$ দিয়া $3x-4$ কে গুণ করিয়া $3x-4$ হইল, ইহা $3x-4$ হইতে বিয়োগ করা হইল। এই প্রক্রিয়ায় যতক্ষণ না ভাজ্যের সকল পদ নিঃশেষ হইয়া যায় ততক্ষণ ভাগকার্য চালাইয়া যাইতে হইবে।

উদাহরণ : $15a^2-11ab-12b^2$ কে $3a-4b$ দিয়া ভাগ কর।

$$
\begin{array}{r|l|l}
3a-4b & 15a^2-11ab-12b^2 & 5a+3b \\
 & 15a^2-20ab & \\
 & -\quad + & \\
\hline
 & \quad 9ab-12b^2 & \\
 & \quad 9ab-12b^2 & \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=5a+3b$.

2·6-6. 0 দ্বারা যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগ :

0 চিহ্নটির প্রকৃত মান শূন্য, অর্থাৎ মানহীন, কিছুই না। 0 যদি $+$, $-$, $\times$ ও $\div$ চিহ্ন দ্বারা কোনও সংখ্যা বা রাশির সহিত যুক্ত হয়, তাহা হইলে কিরূপ হয় তাহা দেখান হইতেছে। মনে করা যাউক a একটি রাশি।

$a+0=a$; 0 যোগ করাতে মানের কোনও পরিবর্তন হইল না। তদ্রূপ $a-0=a$; $0-a=-a$.

$a\times0=0$ এবং $0\times a=0$. aকে শূন্য বার অর্থাৎ কিছুই না বার লওয়ার অর্থ 0, কিংবা 0 কে a বার লওয়ার অর্থ অনেকবার শূন্যকে লওয়া হইলেও তাহার মান কিছুই পরিবর্তন হইল না।

$0\div a=0$, অর্থ 0-র ভিতর a কয়বার যায় ? 0-র কোন মানই নাই, সুতরাং 0-র ভিতর a, 0 সংখ্যক বার যায়।

$a\div0$ অর্থহীন। কারণ aকে 0 দ্বারা ভাগ করিলে যদি b ভাগফল হয় তবে bকে 0 দ্বারা গুণ করিলে a হওয়া উচিত। কিন্তু $b\times0=0$. ইহা ধনাত্মক, ঋণাত্মক, ভগ্নাংশ কোনও সংখ্যাই হইতে পারে না। সুতরাং a হইতে পারে না। অতএব $a\div0$ অর্থহীন।

প্রশ্নমালা 2C

[1 হইতে 10, 24 হইতে 28 ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ কর :

1. $x^2+2xy+y^2$, $x+y$.　　2. a^3-b^3, $a-b$.

3. x^6-6x+5, x^2-2x+1.　　[C. U. 1914]

4. $a^3+b^3+c^3-3abc,\ a+b+c.$ [P. U. 1921]

$$
\begin{aligned}
a+b+c\,)\ & a^3-3abc+b^3+c^3\ (a^2-ab-ac+b^2+c^2-bc \\
& \underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
& -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
& \underline{-a^2b-ab^2-abc} \\
& -a^2c+ab^2-2abc+b^3+c^3 \\
& \underline{-a^2c-ac^2-abc} \\
& ab^2+ac^2-abc+b^3+c^3 \\
& \underline{ab^2+b^2c\qquad +b^3} \\
& ac^2-abc-b^2c+c^3 \\
& \underline{ac^2\qquad +bc^2+c^3} \\
& -abc-b^2c-bc^2 \\
& \underline{-abc-b^2c-bc^2}
\end{aligned}
$$

সুতরাং ভাগফল $=\mathbf{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}$

5. $a^4-6a-4,\ a-2.$ 6. $a^6-b^6,\ a^2-ab+b^2.$

7. $x^3+y^3-1+3xy,\ x+y-1.$ [D. B. 1927]

8. $(b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2),\ a^2-(b+c)a+bc$

a-র অধঃক্রমিক মান অনুসারে সাজাইয়া ভাগ করিতে হইবে।

$$
\begin{aligned}
a^2-(b+c)a+bc\,)\ & (b-c)a^3-(b^3-c^3)a+bc(b^2-c^2)\ ((b-c)a+(b^2-c^2) \\
& \underline{(b-c)a^3-(b^2-c^2)a^2+bc(b-c)a} \\
& (b^2-c^2)a^2-(b^3-c^3+b^2c-bc^2)a+bc(b^2-c^2) \\
& \underline{(b^2-c^2)a^2-(b^3-c^3+b^2c-bc^2)a+bc(b^2-c^2)}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ভাগফল $=a(b-c)+(b^2-c^2)=\mathbf{ab-ac+b^2-c^2}.$

9. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b),\ a+b+c.$ [C. U. 1928]

10. $1+x-8x^2+19x^3-15x^4,\ 1+3x-5x^2.$ [C. U. 1919]

11. $a^6+\frac{b^6}{27},\ a^2+ab+\frac{b^2}{3}.$ [C. U. 1930]

12. $6x^5-17x^4+42x^3-66x^2+72x-72,\ 2x^2-3x+6.$ [C. U. 1912]

13. $x^4-y^4+a^4+2a^2x^2,\ x^2-y^2+a^2.$

14. $6+x^2-19x+6x^3,\ 2+x.$ 15. $a+a^5+a^6,\ a^2+a+1.$

16. $a^3-b^3+c^3+3abc,\ a-b+c.$

17. $a^3+b^3-c^3+3abc,\ a+b-c.$

18. $8a^3-8b^3-27c^3-36abc,\ 2a-2b-3c.$

19. $4x^4+1,\ 2x^2+2x+1.$ 20. $6x^3+x^2-44x+21,\ 3x-7$

21. $6x^4-2x^3-23x^2+5x+20,\ 2x^2-5.$

22. $2x^3-x^2-x-3,\ 2x-3.$ 23. $x^4+x^2+1,\ x^2+x+1.$

24. $4x^4+11x^3+27x^2+17x+5,\ x^2+2x+5.$ [D. B. 1924]

25. $1-32x^5-128x^7,\ 1-2x+4x^2.$ [B. U. 1914]

26. $1-16a^4,\ 8a^3+4a^2+2a+1.$ [B. U. 1920]

27. $\frac{1}{3}x^4-\frac{11}{12}x^3+4\frac{1}{8}x^2-2\frac{3}{4}x+6,\ \frac{2}{3}x^2-\frac{5}{8}x+1.$ [P. U. 1892]

28. $625x^4-16,\ 5x+2.$ 29. $a^3+b^3-3a^2+3a-1,\ a+b-1.$

30. $x(x^2-yz)+y(y^2-xz)+z(z^2-xy),\ x+y+z.$

31. (i) $a-b^{-1},\ a^{\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}.$

(ii) $4x^3-12x^2+(a+4)x-3$ রাশিটি $2x-3$ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য হইলে, a-র মান কত হইবে ?

32. ভাগ করিয়া দেখাও,

(i) $\dfrac{x^2-16x+60}{x-9}=x-7-\dfrac{3}{x-9}.$

(ii) $\dfrac{a^3-\frac{1}{27}b^3}{a+\frac{1}{3}b}=a^2-\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2-\dfrac{\frac{2}{27}b^3}{a+\frac{1}{3}b}.$

33. (a) একটি ঘরের ক্ষেত্রফল ab বর্গগজ, দৈর্ঘ্য যদি $6a$ ফুট হয় তবে প্রস্থ কত হইবে ?

(b) একটি ভাগ অঙ্কে ভাজক a, ভাগফল - b, ভাগশেষ c, ভাজ্য কত ?

C. বন্ধনীর ব্যবহার ঃ

Use of Brackets.

27. **বন্ধনী ঃ** কোনও একাধিক পদের রাশিমালা, একটি মাত্র পদরূপে গণ্য করিতে হইলে উহাদের বন্ধনীর মধ্যে রাখিতে হয়।

সাধারণতঃ তিন প্রকারের বন্ধনী ব্যবহার করা হয়। **প্রথম বন্ধনী** বা **লঘু বন্ধনী**, (First Brackets or Parentheses), ইহার চিহ্ন ( )। **দ্বিতীয় বন্ধনী** বা **ধনুর্বন্ধনী** (Second Brackets or Braces), ইহার চিহ্ন { }। **তৃতীয় বন্ধনী** বা **গুরুবন্ধনী** (Third Brackets or Square Brackets), ইহার চিহ্ন [ ] এইরূপ। আরও অধিক বন্ধনী প্রয়োজন হইলে **রেখা বন্ধনী** (Vinculum) ব্যবহার করা হয়। যে সকল পদকে একটি মাত্র রাশি মনে করিতে হইবে তাহাদের মাথার উপর একটি আনুভূমিক সরলরেখা টানিয়া বুঝান হয় যে তাহারা একটি মাত্র রাশি। $a-b+\overline{c-d+e}$, এখানে $c-d+e$-র মাথায় রেখা বন্ধনী দিয়া বুঝান হইতেছে যে উহা একটি মাত্র রাশি।

সাধারণতঃ একটি মাত্র বন্ধনী প্রয়োজন হইলে প্রথম বন্ধনী ব্যবহার করা হয়। উহার অধিক প্রয়োজন হইলে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও রেখা বন্ধনী যথাক্রমে ব্যবহৃত হয়।

2·7-1. বন্ধনী অপসারণ : বন্ধনী অপসারণের কয়েকটি নিয়ম :

1. সর্বপ্রথম রেখা বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়। তাহার পর ক্রমান্বয়ে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় বন্ধনী অপসারণ করাই সাধারণ নিয়ম। কিন্তু বিপরীত ক্রমেও উহাদের অপসারণ করা যায়।

2. একটি একটি করিয়া বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়। একের অধিক একসঙ্গে অপসারণ করিতে চেষ্টা করিলে ভুল হইবার যথেষ্ট সম্ভাবনা থাকে।

3. বন্ধনীর বাম দিকে বন্ধনী-সংলগ্ন + চিহ্ন থাকিলে বন্ধনী-মধ্যস্থ রাশিগুলির চিহ্ন যাহা আছে সেইরূপ রাখিয়াই বন্ধনী অপসারণ করা হয়। অর্থাৎ + চিহ্ন + চিহ্নই থাকিবে, − চিহ্ন − চিহ্নই থাকিবে, চিহ্নের কোনও পরিবর্তন হইবে না।

4. বন্ধনীর বামে বন্ধনী-সংলগ্ন − চিহ্ন থাকিলে বন্ধনী-মধ্যস্থ পদগুলির পূর্বের + চিহ্ন − চিহ্নতে এবং − চিহ্ন + চিহ্নতে পরিবর্তন করিতে হয়।

5. বন্ধনীর পূর্বে বা পরে বন্ধনী-সংলগ্ন কোনও সংখ্যা বা রাশি থাকিলে, চিহ্নসমেত ঐ রাশিটি দ্বারা বন্ধনী মধ্যস্থ প্রত্যেক পদকে গুণ করিয়া বন্ধনী অপসারণ করা হয়।

6. কোনও রাশি, সংখ্যা বা বন্ধনীযুক্ত রাশি যদি কোনও বন্ধনীর সহিত সংলগ্ন থাকে এবং তাহাদের মধ্যে কোনও চিহ্ন না থাকে তবে উহাদিগকে পরস্পর গুণ বা 'এর' বুঝায় এবং উহাদের একটি মাত্র রাশি বলিয়া গণ্য করিতে হয়।

2·7-2. বন্ধনীভুক্তকরণ : পদগুলিকে বন্ধনীভুক্ত করিতে হইলে বন্ধনীর পূর্বে + চিহ্ন দিলে পদের কোনও চিহ্ন পরিবর্তন করিতে হয় না। বন্ধনীর পূর্বে − চিহ্ন দিলে বন্ধনী-মধ্যস্থ পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করিতে হয়। যে সব পদের সাধারণ উৎপাদক থাকে তাহাকে বন্ধনীর পূর্বে রাখিয়া, ঐ উৎপাদক দিয়া প্রতি পদকে ভাগ করিয়া ভাগফলগুলি বন্ধনী মধ্যে রাখিতে হয়।

প্রশ্নমালা 2D

[1 হইতে 17 পর্যন্ত ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ।]

বন্ধনী অপসারণ করিয়া সরল কর :

1. $a+[b+\{c+(d+\overline{e+f})\}]$

$=a+[b+\{c+(d+e+f)\}]$

$=a+[b+\{c+d+e+f\}]$

$=a+[b+c+d+e+f]$

$=\mathbf{a+b+c+d+e+f}$.

2. $a-[a-\{a-(a-a-b+a)+a\}+a]$
$=a-[a-\{a-(a-a+b+a)+a\}+a]$
$=a-[a-\{a-a+a-b-a+a\}+a]$
$=a-[a-a+a-a+b+a-a+a]$
$=a-a+a-a+a-b-a+a-a$
$=4a-4a-b=-\boldsymbol{b}$

3. $x-[x-\{x-(2x-\overline{x-y})+x\}+x]+y$
$=x-[x-\{x-(2x-x+y)+x\}+x]+y$
$=x-[x-\{2x-(x+y)\}+x]+y$
$=x-[2x-\{2x-x-y\}]+y$
$=x-[2x-x+y]+y$
$=x-x-y+y=0$

4. $-[-2x-\{3y-(2x-3y)+(3x-2y)\}+2x]$
$=-[-2x-\{3y-2x+3y+3x-2y\}+2x]$
$=-[-2x-\{4y+x\}+2x]$
$=-[-2x-4y-x+2x]$
$=-[-x-4y]=\boldsymbol{x+4y}.$

5. $3(2a+b)-4(3a-3b)+2a(b+3)$
$=(+3)\times(2a+b)+(-4)\times(3a-3b)+(2a)\times(b+3)$
$=6a+3b+(-12a+12b)+2ab+6a$
$=6a+3b-12a+12b+2ab+6a=\boldsymbol{15b+2ab}.$

6 $4x^2-(x-2)(x-3)-x^2-x(x-5)$
$=4x^2-(x^2-5x+6)-x^2-(x^2-5x)$
$=4x^2-x^2+5x-6-x^2-x^2+5x=\boldsymbol{x^2+10x-6}.$

7. $x-[a-\{4a-(3a-\overline{2a-x})\}]$
$=x-a+\{4a-(3a-\overline{2a-x})\}$
$=x-a+4a-(3a-\overline{2a-x})$
$=x+3a-3a+\overline{2a-x}=x+2a-x=\boldsymbol{2a}.$

8. $(a-b)-(a+b)$. 9. $\{a-(b-c)\}+\{a+(b-c)\}+\{b-(c+a)\}$.

10. $-[-\{-(a-\overline{b-c})\}]$.

11. $-[-\{-(b+\overline{c-a})\}]+[-\{-(c+\overline{a-b})\}]$.

12. $-[x-\{z+(x-z)-(z-x)-z\}-x]$.

13. $a-[-b+\{-c-(-a-b-c\}]$.

14. $-a-[-b-\{-c-(-a-\overline{-b-c})\}]$.

15. $x-[-x-\{-x-(-x-x)-x\}-x]$.

16. $x-[a-\{2a-(3a-\overline{4a-x})\}]$. 17. $2p-q+\{q-(p-\overline{r+p})\}$.

18. $3a-[a+b-2\{a+b+c-(a-b+c)+a\}+a]$. [C. U.]

19. $a-[a-\{a-(a-b)\}]$. 20. $1-\{1-(1-1-x)\}$.

21. $2x-[3y-\{4x-(5y-\overline{6x-7y})\}]$.

22. $-2x-[-5y-\{-6z-(-4x-\overline{-5y-7z}\}]$.

23. $a-2(b-c)-[-\{-(4a-b-c-2\ \overline{a+b+c})\}]$.

24. $-10(a+b)-[c+b+a-3\{(2b+a-(a+\overline{c-b})\}]$.

25. $-10[a-6\{a-(b-c)\}]+60\{b-(c+a)\}$.

26. $\{m-n-(3x-2y)\}-[3m+2n-\{x-y+(m+2n)-(2y-x)\}]$ [M. U.]

27. বন্ধনীভুক্ত কর :

$a-b+c-d+e-f$.

$$\begin{aligned} a-b+c-d+e-f &= a-[b-c+d-e+f] \\ &= a-[b-\{c-d+e-f\}] \\ &= a-[b-\{c-(d-e+f)\}] \\ &= \mathbf{a}-[\mathbf{b}-\{\mathbf{c}-(\mathbf{d}-\mathbf{e}-\overline{\mathbf{f}})\}]. \end{aligned}$$

28. $2x-3y+4y+9x$

$$\begin{aligned} 2x-3y+4y+9x &= 2x+4y-3y+9x. \\ &= 2(x+2y)-3(y-3x). \end{aligned}$$

29. $(x-a)(x-b)(x-c)-[bc(x-a)-\{(a+b+c)x$
$-a(b+c)\}x] =$ কত ? [A. U.]

30. $a\{a-(c-b)\}$ এবং $c\{a-(b-c)\}$ এর সমষ্টি হইতে $b\{a-(b+c)\}$ বিয়োগ কর। [M. U.]

3

A. সরল সমীকরণ

Simple Equation

3·1. **সমীকরণ** (Equation) : দুইটি বীজগণিতীয় রাশি সমতা চিহ্ন (=) দ্বারা পরস্পর যুক্ত হইলে, তাহাকে **সমীকরণ** বলে। সমতা চিহ্নের উভয় পার্শ্বের রাশিদ্বয়কে **পার্শ্ব** (Side) বা **পক্ষ** (Members) বলে। বাম দিকেরটিকে **বামপক্ষ** বা **বামপার্শ্ব** (Left-hand Side) এবং ডান দিকেরটিকে **ডানপক্ষ** বা **ডানপার্শ্ব** (Right-hand Side) বলে। সমীকরণে ব্যবহৃত **অক্ষরের বিশেষ বিশেষ** মান ব্যবহৃত করিলে, এবং উহাতে উভয় পক্ষের সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিলে, সেই সমীকরণটিকে **সাপেক্ষ সমীকরণ** (Conditional Equation) বা শুধু **সমীকরণ** (Equation) বলে। যখন অক্ষরগুলির **যে কোনও** মানের দ্বারা সমীকরণের উভয় পার্শ্বের সমতা ঠিক থাকে তখন সেই সমীকরণকে **অভেদ সমীকরণ** (Identical Equation) বা কেবল **অভেদ** (Identity) বলে। যে মানের দ্বারা সমীকরণ **সিদ্ধ** (Satisfied) হয় তাহাকে সমীকরণের **বীজ** (Root) বলে। নির্ণেয় রাশিটি অজ্ঞাত থাকে বলিয়া উহাকে **অজ্ঞাত রাশি** (Unknown Quantity) বলে, এবং অজ্ঞাত রাশির বীজ নির্ণয় করার প্রণালীকে **সমীকরণ সমাধান** (Solving the Equation) বলে। যে সমীকরণে একঘাত বিশিষ্ট এবং একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে তাহাকে **সরল সমীকরণ** (Simple Equation) বলে।

3·2. **সমীকরণের স্বতঃসিদ্ধ** : নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলি সমাধান করিবার সময় প্রয়োগ করিতে হয়।

1. **সমান সমান রাশির সহিত সমান সমান রাশি বা একই রাশি যোগ বা বিয়োগ করিলে যোগফলগুলি বা বিয়োগফলগুলিও সমান হয়।**

2. **সমান সমান রাশির সহিত সমান সমান রাশি বা একই রাশি গুণ বা ভাগ করিলে, গুণফল বা ভাগফলগুলিও সমান হয়।**

দ্রষ্টব্য : শূন্য দ্বারা গুণ বা ভাগ করা চলিবে না।

3·3. **পক্ষান্তর-করণ** (Transposition) : সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে সমীকরণের এক পক্ষের যে কোন পদের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া অপর পক্ষে

লওয়া যায়, ইহাতে সমীকরণের সমতার কোনও পরিবর্তন হয় না। ইহাকেই **পক্ষান্তরকরণ** বলে।

3·4. **নিয়ম :** প্রথমে উভয়পক্ষকে সরল করিতে হইবে ; পরে অজ্ঞাত রাশিযুক্ত পদগুলি সমতা চিহ্নের বামদিকে ও জ্ঞাত রাশিযুক্ত পদগুলি সমতা চিহ্নের ডান দিকে পক্ষান্তর করিতে হয়। এই সময় চিহ্ন পরিবর্তন করিতে হয়। '+' ও '−' চিহ্নযুক্ত পদগুলি যথাক্রমে '−' ও '+' চিহ্নযুক্ত পদ হইবে এবং '×' ও '÷' চিহ্নযুক্ত পদগুলি যথাক্রমে '÷' ও '×' চিহ্নযুক্ত পদ হইবে। পরে সরল করিয়া অজ্ঞাত রাশিটির বীজ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 3 A

[1 হইতে 20 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সমাধান কর :

1. (i) $6x=12$. (ii) $\frac{2}{3}x=8$. (iii) $ax=b$.

(i) $6x=12$ [$\because$ x-র সহগ 6 $\therefore$ 6 দিয়া উভয়পক্ষকে ভাগ করি হইবে।

বা, $\frac{6x}{6}=\frac{12}{6}$ $\therefore$ $x=2$.

(ii) $\frac{2}{3}x=8$

বা, $\frac{2}{3}x\div\frac{2}{3}=8\div\frac{2}{3}$, [উভয় পক্ষকে সহগ $\frac{2}{3}$ দিয়া ভাগ করিতে হইবে]

বা, $\frac{2}{3}\times x\times\frac{3}{2}=8\times\frac{3}{2}$ বা, $x=12$.

(ii) $ax=b$, বা, $\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$, $\therefore$ $x=\frac{b}{a}$.

2. $2x-8=2$. 3. $3x+7=25$. 4. $2x-1=x+3$.

5. $7x=18-2x$. 6. $7x+23+15=2x+x+10$

বা, $7x-2x-x=10-23-15$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $4x=-28$ [সরল করিয়া]

বা, $x=-\frac{28}{4}$ [x-এর সহগ দিয়া ভাগ করিয়া]

$\therefore$ $x=-7$.

7. $4x-3=3x+4.$ 8. $0=9-6x-19+10x$

9. $-3x-5=-7x+1$ 10. $6x+7-19=7x-13-3x-21.$

11. (a) $ax+b=c.$ (b) $ax-b=cx-d$

12. $5x-6(x-5)=5(x-4)+2(x+5).$

13. $15(x-1)+4(x+3)=2(7+x).$

বা $15x-15+4x+12=14+2x$

বা $15x+4x-2x=14+15-12$

বা $17x=17$ $\therefore$ $x=\frac{17}{17}=1.$

14. $2(x-3)+2=3(x-1).$ 15 $0=3-2(x-2)+3x-5.$

16. $3x+4+10x-17=14-23x+16-7x.$

17. $\frac{x+5}{6}-\frac{x+1}{9}=\frac{x+3}{4}$

[হরগুলির ল. সা. গু. 36 দিয়া উভয় পক্ষের প্রতি পদকে গুণ করিতে হইবে]

বা $36\times\frac{x+5}{6}-36\times\frac{x+1}{9}=36\times\frac{x+3}{4}$

বা $6(x+5)-4(x+1)=9(x+3)$

বা $6x+30-4x-4=9x+27$

বা $6x-4x-9x=27-30+4$

বা $-7x=1$ $\therefore$ $x=-\frac{1}{7}.$

18. $8(x-1)+17(x-3)=4(4x-9)+4.$

19. $\frac{x-2}{3}-\frac{x-6}{7}=\frac{x-4}{5}.$ 20. $\frac{x-3}{4}-\frac{x-5}{6}=\frac{x-7}{8}$

21. $5x-(3x-7)-\{4-2x-(6x-3)\}=10.$

22 $25x-19-[3-\{4x-5\}]=3x-(6x-5)$

23. $(x+1)(2x+1)=(x+3)(2x+3)-14.$

24. $3(x-1)^2-3(x^2-1)=x-15.$

25. $(x+1)^2+2(x+3)^2=3x(x+2)+35.$

26. $x(x+1)+(x+1)(x+2)=(x+2)(x+3)+x(x+4)-9.$

27. $(x+4)(x-3)(x+5)+84=(x+1)(x+2)(x+3).$

28. $x(x+a)+x(x+b)=x(2x+c)+a+b-c.$

29. $3y-4=16-2y$. 30. $m^2-2mx+n^2=0$.

31. $\frac{x}{2}+1=\frac{x}{3}+2$. 32. $\frac{x}{b}-a=\frac{x}{a}-b$.

33. $\frac{5x-1}{7}+\frac{9x-5}{11}=\frac{9x-7}{5}$. [C U. 1912]

34. $\frac{x+5}{6}-\frac{x+1}{9}=\frac{x+3}{4}$. 35. $\frac{2x+1}{5}-\frac{3x-2}{6}=\frac{1}{2}$.

36. $\frac{2x-3}{3}-\frac{3x-5}{5}+\frac{5x+3}{3}-\frac{7x+5}{10}=4$.

37. $\cdot12(1-\cdot5x)=x-\cdot02$. 38 $\frac{x+\cdot75}{\cdot125}-\frac{x-\cdot25}{\cdot25}=15$.

39. $\cdot5x+\frac{\cdot02x+\cdot07}{\cdot08}-\frac{x+2}{9}=5\frac{1}{8}$. 40. $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$.

41. $\frac{x+2}{3}+2=\frac{x+4}{5}+\frac{x+6}{7}$. 42. $\frac{3x}{4}+\frac{1-2x}{5}=2\frac{1}{8}-\frac{x-\frac{1}{4}}{3}$.

*43. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.

[P. U. 1910]

*44. $\frac{x+10}{5}-4\frac{3}{4}-\frac{x}{4}=\frac{x-2}{3}-(x-1)$. [A. U. 1916]

*45. (a) $S=ut+\frac{1}{2}ft^2$, এই সমীকরণে $S=10320$, $u=22$, এবং $t=60$ হইলে, f নির্ণয় কর।

(b) $v^2=2fs$, এই সমীকরণে $s=100$, $f=\frac{16}{5}$ হইলে vর মান নির্ণয় কর।

(c) $\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mu^2=FS$, এই সমীকরণে $m=12$, $u=11$, $v=5$ এবং $S=96$ হইলে Fর মান কত হইবে ?

B. সরল সমীকরণ সাধ্য প্রশ্নাবলী

Problems leading to Simple Equations

3.5 সমস্যা (Problems) : যে সকল প্রশ্ন সমীকরণ সাহায্যে সমাধান করা যায় তাহাদের **সমস্যা** বা **প্রশ্ন** বলে। এই সকল প্রশ্নে এক বা একাধিক **অজ্ঞাত রাশি** (Unknown quantity) এবং এক বা একাধিক **জ্ঞাত রাশি** (Known quantity) থাকে। এইরূপ সমস্যাগুলি সমীকরণ সাহায্যে অতি সহজে সমাধান করা যায়। প্রশ্নে যদি একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে তাহা হইলে তাহা

সরল সমীকরণ সাহায্যে সমাধান করা যায়। যে রাশিটি অজ্ঞাত তাহাকে x ধরিয়া বিশেষ সাবধানের সহিত প্রশ্ন হইতে এই অজ্ঞাত x-র সহিত সম্বন্ধ স্থাপন করিয়া সমতা চিহ্নের উভয় পক্ষ গঠন করিতে হয়। এইরূপে গঠিত সমীকরণটি বার বার দেখিয়া নির্ভুল করিতে হয় এবং শুদ্ধ সমীকরণটি সমাধান করিয়া অজ্ঞাত রাশি xটি বাহির করিলেই সমস্যা সমাধান হইয়া যাইবে। একের অধিক অজ্ঞাত রাশি থাকিলে, একটি অজ্ঞাত রাশিকে x ধরিয়া অপরগুলিকে ঐ একই x দ্বারা প্রকাশ করিতে হয়। এখন একটি মাত্র x দ্বারা গঠিত সমীকরণটি সমাধান করিতে হইবে।

সমীকরণ শুদ্ধভাবে গঠিত হইলে সমস্যাটি শুদ্ধভাবে সমাধান হইবে। নির্ণীত বীজ দ্বারা প্রশ্নের সর্তগুলি সিদ্ধ হয় কি না তাহা পরীক্ষা করিয়া লইতে হইবে। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ সাহায্যে সমীকরণ গঠন করিয়া প্রশ্ন সমাধান প্রণালী বুঝান হইতেছে।

প্রশ্নমালা 3 B

[1 হইতে 14 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. A ও B-র মাসিক আয় 340 টাকা ; B-র মাসিক আয় 120 টাকা হইলে, A-র মাসিক আয় কত ?

মনে কর A-র মাসিক আয় x টাকা, তাহা হইলে, প্রশ্নানুসারে সমীকরণ হইল

$$x+120=340 \quad \text{বা,} \quad x=340-120 \quad \therefore \quad x=220$$

অতএব A-র মাসিক আয় 220 টাকা।

2. রাম ও শ্যামের বয়সের সমষ্টি 85, রামের বয়স 36 হইলে শ্যামের বয়স কত ?

3. গাড়ী ও ঘোড়ার মূল্য 2555 টাকা, ঘোড়ার মূল্য 1005 টাকা হইলে গাড়ীর মূল্য কত ?

4. কোন্ সংখ্যার 8 গুণ হইতে 25 বিয়োগ করিলে 175 হয় ?

মনে কর সংখ্যাটি x, সুতরাং প্রশ্নানুসারে,

$$8x-25=175, \quad \text{বা,} \quad 8x=175+25,$$

$$8x=200, \quad \therefore \quad x=\frac{200}{8}=25. \quad \therefore \quad \text{নির্ণেয় সংখ্যাটি } 25.$$

5. কোন্ সংখ্যার 4 গুণের সহিত 20 যোগ করিলে 60 হয় ?

6. কোন্ সংখ্যার $\frac{2}{3}$ অংশ হইতে $\frac{1}{5}$ অংশ বিয়োগ করিলে 75 হয় ?

7. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 93 ; সংখ্যা তিনটি কি কি ?

মনে কর ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি x, তাহা হইলে অপর দুইটি $x+1$, $x+2$.

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $x+(x+1)+(x+2)=93$.

বা, $x+x+1+x+2=93$, বা, $3x+3=93$,

বা, $3x=93-3$, বা, $3x=90$, $\therefore$ $x=\frac{90}{3}=30$.

অতএব সংখ্যা তিনটি **30, 31, 32.**

8. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 210 হইলে, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

9. চারিটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 398 হইলে, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

10 পাঁচটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 540 হইলে, সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর।

11. দুইটি সংখ্যার যোগফল 52 এবং উহাদের বিয়োগফল 18 ; সংখ্যা দুইট নির্ণয় কর।

মনে কর একটি সংখ্যা x, তাহা হইলে অপর সংখ্যাটি $52-x$

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $x-(52-x)=18$

বা, $x-52+x=18$, বা, $2x=18+52$

বা, $2x=70$, $\therefore$ $x=\frac{70}{2}=35$.

$\therefore$ একটি সংখ্যা 35 এবং অপরটি $52-35=17$.

12. দুইটি সংখ্যাব যোগফল 80 এবং বিয়োগফল 11, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

13. দুইটি সংখ্যার যোগফল 326 এবং বিয়োগফল 7, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

14. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 100 এবং প্রথম সংখ্যাটির 3 গুণ দ্বিতীয় সংখ্যাটির $\frac{3}{4}$ অংশ অপেক্ষা 23 অধিক। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

15. A, B, C-র মধ্যে 126 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন A, B অপেক্ষা 5 টাকা বেশী পায় এবং B, C অপেক্ষা 10 টাকা বেশী পায়।

16. A, B, C-র মধ্যে 380 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও, যেন B, A অপেক্ষা 30 টাকা বেশী পায় এবং C, B অপেক্ষা 20 টাকা বেশী পায়।

17. 180 জন বালক বালিকার মধ্যে 65 টাকা এরূপভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যেন প্রত্যেক বালিকা 25 পয়সা ও প্রত্যেক বালক 50 পয়সা পাইল। বালক ও বালিকার সংখ্যা নির্ণয় কর।

18. 45 টাকা 750 জন বালক বালিকাদের মধ্যে এমনভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যেন প্রত্যেক বালিকা 5 পয়সা ও প্রত্যেক বালক 10 পয়সা পাইল। বালক ও বালিকার সংখ্যা নির্ণয় কর।

19. দুইটি সংখ্যার পার্থক্য 4, বৃহত্তরটির $\frac{1}{2}$ ক্ষুদ্রতরটির $\frac{1}{6}$ অপেক্ষা 8 বেশী; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর, ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি x, তাহা হইলে বৃহত্তরটি $x+4$,

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $\frac{1}{2}(x+4)-\frac{1}{6}x=8$

বা $6\times\frac{1}{2}(x+4)-6.\frac{1}{6}x=8\times6$

বা $3(x+4)-x=48$, বা $3x+12-x=48$.

বা $3x-x=48-12$, বা $2x=36$, $\therefore$ $x=18$.

$\therefore$ সংখ্যা দুইটি 18 এবং $18+4=22$.

20. কোনও একটি সংখ্যার চতুর্থাংশ হইতে পঞ্চমাংশ 3 কম। সংখ্যাটি কি?

21. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার অষ্টমাংশ, ষষ্ঠাংশ এবং চতুর্থ ংশের যোগফল 13 হয়।

22. এরূপ তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের 10, 17 এবং 26 দ্বারা যথাক্রমে ভাগ করিলে ভাগফলের সমষ্টি 10 হইবে।

23. একটি সংখ্যা হইতে 3 বিয়োগ করিয়া, বিয়োগফলকে 4 দিয়া ভাগ করা হইল। ভাগফলের সহিত 4 যোগ করিয়া 5 দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল 2 হইল। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

24. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ। 16 বৎসর পরে পুত্রের বয়স পিতার বয়সের অর্ধেক হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

মনে কর, পুত্রের বর্তমান বয়স x বৎসর, তাহা হইলে পিতার বর্তমান বয়স $3x$,

সুতরাং, প্রশ্নানুসারে, $x+16=\frac{1}{2}(3x+16)$

বা, $2(x+16)=2\times\frac{1}{2}(3x+16)$

বা, $2x+32=3x+16$, বা, $2x-3x=16-32$.

বা, $-x=-16$, $\therefore$ $x=16$.

অতএব পুত্রের বয়স 16 বৎসর এবং পিতার বয়স $3\times16=48$ বৎসর।

25. পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ। 24 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

26. এক ব্যক্তির 30 বৎসর বয়সে একটি পুত্র জন্মিল। কত বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ হইবে?

27. A, B অপেক্ষা 25 বৎসর বড়। 20 হইতে A-র বয়স যত অধিক 85 হইতে B-র বয়স তত কম। উহাদের বয়স কত?

28. A র বয়স B র বয়সের 6 গুণ। 15 বৎসর পরে A র বয়স B র বয়সের 3 গুণ হইবে। উহাদের বর্তমান বয়স কত ?

29. C র বয়সের দ্বিগুণ A র বয়স, এবং 5 গুণ B র বয়স। 2 বৎসর পূর্বে B র বয়স A ও C র বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ ছিল। A, B, C র বর্তমান বয়স কত ?

*30. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 8 ফুট বেশী। যদি দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়ই 2 ফুট বর্ধিত হইত তাহা হইলে ক্ষেত্রফল 60 বর্গফুট অধিক হইত। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

*31. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 3 ফুট বেশী। যদি দৈর্ঘ্য 3 ফুট বাড়ান হয় এবং প্রস্থ 2 ফুট কমান হয় তাহা হইলে ক্ষেত্রফল ঠিকই থাকে। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

*32. একটি ঘরের প্রস্থ দৈর্ঘ্যের $\frac{2}{3}$ অংশ। যদি দৈর্ঘ্য 3 ফুট কম ও প্রস্থ 3 ফুট বেশী হইত, তাহা হইলে ঘরটি বর্গাকৃতি হইত। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

প্রশ্নমালা 3 C

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. একটি আখের $\frac{1}{3}$ অংশ একটি বালককে দেওয়া হইল। $\frac{1}{4}$ অংশ অপর একটি বালককে দিবার পর দেখা গেল বাকী $2\frac{1}{2}$ ফুট পড়িয়া আছে। আখটি পূর্বে কত লম্বা ছিল ?

মনে কর, আখটির দৈর্ঘ্য x ফুট।

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $x-(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x)=2\frac{1}{2}$

বা, $x-\frac{7}{12}x=\frac{5}{2}$, বা $\frac{5}{12}x=\frac{5}{2}$,

$\therefore\ x=\frac{5}{2}\times\frac{12}{5}=6$. $\therefore$ আখটির দৈর্ঘ্য $=6$ ফুট।

2. একটি বাঁশের $\frac{1}{2}$ অংশ মাটিতে, $\frac{1}{3}$ অংশ জলের মধ্যে; জলের উপর যে অবশিষ্ট অংশ তাহা মাত্র 1 মিটার দীর্ঘ। বাঁশটির মোট দৈর্ঘ্য কত ?

3. এক ব্যক্তি তাঁহার মোট সম্পত্তির $\frac{1}{3}$ অংশ জ্যেষ্ঠ পুত্রকে এবং $\frac{1}{4}$ অংশ দ্বিতীয় পুত্রকে দিয়া অবশিষ্ট 2000 টাকা কনিষ্ঠ পুত্রকে দিলেন। লোকটির সম্পত্তির মোট মূল্য কত ছিল ?

4. এক ব্যক্তি তাঁহার মোট অর্থের $\frac{1}{3}$ অংশ দিয়া জমি কিনিলেন এবং $\frac{1}{5}$ অংশ দ্বারা অট্টালিকা নির্মাণ করিলেন। দেখা গেল তাঁহার অবশিষ্ট মাত্র 2700 টাকা আছে। পূর্বে তাঁহার কত টাকা ছিল ?

5. একটি বাঁশের $\frac{1}{4}$ অংশ কাল ও $\frac{1}{3}$ অংশ সাদা রং করা হইল। অবশিষ্ট অংশটি মাত্র $2\frac{2}{3}$ মিটার পড়িয়া রহিল। বাঁশটি মোট কত লম্বা ছিল ?

6. এক ব্যক্তি তাঁহার অর্থের $\frac{1}{4}$ অংশ স্ত্রীকে, $\frac{2}{5}$ অংশ পুত্রকে দিয়া অবশিষ্টাংশ 99 টাকা দান করিলেন। তাঁহার কত টাকা ছিল ?

7. একটি খুঁটির $\frac{1}{3}$ অংশ জলে, 2 ফুট জলের উপর এবং $\frac{1}{2}$ অংশ পাঁকে আছে। খুঁটিটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. 1948]

8. 90কে এমন দুই অংশে ভাগ কর যে এক অংশের 5 গুণ, অপর অংশের 7 গুণ অপেক্ষা 6 অধিক হয়।

মনে কর, একটি অংশ x, তাহা হইলে অপর অংশ $90-x$.

সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $5x=7(90-x)+6$

বা, $5x=630-7x+6$, বা, $5x+7x=630+6$

বা, $12x=636$. $\therefore$ $x=\frac{636}{12}=53$.

$\therefore$ একটি অংশ 53 এবং অপর অংশ $90-53=37$.

9. 60কে এমন দুই অংশে ভাগ কর যে এক অংশের 4 গুণ ও অপর অংশের 3 গুণের যোগফল 220 হয়।

10. তিনটি ক্রমিক অখণ্ড সংখ্যার সমষ্টি 147, সংখ্যা তিনটি কি কি ?

11. একটি বাক্সে টাকায় ও আধুলিতে মোট 420টি মুদ্রা আছে। টাকাগুলির মোট মূল্য অপেক্ষা আধুলিগুলির মোট মূল্য 60 টাকা অধিক। কোন্ প্রকার মুদ্রা কয়টি আছে ?

12. প্রত্যেক বালককে 60 পয়সা ও প্রত্যেক বালিকাকে 80 পয়সা করিয়া মোট 352 টাকা 480 জন বালক বালিকার মধ্যে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। কয়জন বালক ও কয়জন বালিকা ছিল ?

13. দশ বৎসর পূর্বে একটি লোকের বয়স তাহার পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল। দশ বৎসর পরে তাহার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। লোকটির বর্তমান বয়স কত ? [C. U. 1947]

14. 54কে এমন দুইটি অংশে ভাগ কর যে এক অংশের দ্বিগুণ অপর অংশের তিনগুণ অপেক্ষা 8 অধিক হয়। [W. B. S. F. 1954]

15. এক পিতার বয়স 20 বৎসর পূর্বে পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে তাঁহার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়স কত ? [C. U. 1951]

16. 840 টাকায় একটি ঘোড়া কিছু ক্ষতিতে বিক্রয় হইল। যদি উহা 1050 টাকায় বিক্রয় হইত তাহা হইলে পূর্ব ক্ষতির $\frac{4}{5}$ অংশ লাভ হইত। উহার প্রকৃত মূল্য কত? [C. U. 1912]

17. একটি লোক তাহার দেনার $\frac{1}{3}$ অংশ অপেক্ষা 200 টাকা অধিক দিবার পর দেখিল যে সে যাহা দিয়াছে তাহা অপেক্ষা আরও 210 টাকা তাহার দেনা রহিয়া গিয়াছে। তাহার কত দেনা ছিল? [C. U. 1913]

18. একটি বাক্সে 120টি মুদ্রা আছে। উহাদের মোট মূল্য 10 টাকা। তাহাদের মধ্যে কতকগুলি দশ পয়সা এবং বাকীগুলি পাঁচ পয়সার মুদ্রা। কোন্ প্রকারের মুদ্রা কতগুলি আছে?

*19. এক রাজা 30 বৎসর বয়সের সময় সিংহাসনে আরোহণ করেন এবং তাঁহার জীবনের $\frac{5}{11}$ অংশ কাল রাজত্ব করেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করিয়াছিলেন? [C. U. 1930]

*20. 768 টাকায় 24টি টেবিল ও চেয়ার ক্রয় করা হইল। প্রতি চেয়ারের মূল্য 12 টাকা ও প্রতি টেবিলের মূল্য 60 টাকা হইলে, চেয়ার ও টেবিলের সংখ্যা কত?

*21. একটি লোক 25 দিন কাজ করিবার জন্য চুক্তিবদ্ধ হইল। কিন্তু সর্ত রহিল যে, যে দিন সে কাজ করিবে 1 টাকা 25 পয়সা করিয়া পাইবে, কিন্তু যে দিন সে কাজ করিবে না জরিমানা হিসাবে প্রতিদিনের জন্য 75 পয়সা কাটিয়া রাখা হইবে। 25 দিন পরে সে 11 টাকা 25 পয়সা পাইল। সে কতদিন কাজ করিয়াছিল?

*22 30 দিনের জন্য একটি লোক নিযুক্ত করা হইল। কথা রহিল যে, সে যে দিন কাজ করিবে 5 টাকা 50 পয়সা করিয়া পাইবে, কিন্তু যে দিন সে কামাই করিবে জরিমানা হিসাবে 2 টাকা 25 পয়সা করিয়া কাটা যাইবে। লোকটি 30 দিনের পর মোট 103 টাকা পাইলে সে কতদিন কামাই করিয়াছিল?

———

4

কতিপয় সূত্র ও তাহাদের প্রয়োগ

Some Formulae with their applications

4·1. পূর্ববর্তী শ্রেণীদ্বয়ে কয়েকটি বীজগণিতীয় সূত্র আলোচনা করা হইয়াছে। সেইগুলি এখানে পুনরালোচনা করা হইবে ও উহাদের বৈশিষ্ট্যগুলিও উল্লেখ করা হইবে।

বীজগণিতীয় প্রতীক দ্বারা প্রকাশিত পরস্পর সম্বন্ধযুক্ত রাশিগুলিকে **সূত্র** (Formula) বলে। এই প্রতীকগুলির যে কোনও মান বসাইলে সূত্রটি সিদ্ধ হয়।

সূত্র 1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2.$$

দুইটি রাশির সমষ্টির বর্গ, রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটির বর্গ ও উহাদের গুণফলের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান হইবে। অর্থাৎ (প্রথম রাশি+দ্বিতীয় রাশি)^2=(প্রথম রাশি)^2 + (দ্বিতীয় রাশি)^2 + 2(প্রথম রাশি) × (দ্বিতীয় রাশি)।

অনুসিদ্ধান্ত: $a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

$\therefore\ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab.$

প্রশ্নমালা 4 A

[1 হইতে 17 এবং 25 হইতে 30 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

বর্গ নির্ণয় কর:

1. $2a+3b$.

$$(2a+3b)^2=(2a)^2+2.(2a).(3b)+(3b)^2$$
$$=4a^2+12ab+9b^2.$$

2. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y$

$$(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}y)^2=(\tfrac{1}{2}x)^2+2.(\tfrac{1}{2}x).(\tfrac{1}{4}y)+(\tfrac{1}{4}y)^2$$
$$=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{1}{4}xy+\tfrac{1}{16}y^2.$$

3. $7x+12y$. **4.** $3p+8q$. **5.** a^2b+3b^2c.

6. $\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}y$. 7. $\frac{1}{11}x+\frac{11}{2}y$. 8. $9a^2+8b^2$.

9. $(a+b+c)$.

$$(a+b+c)^2=\{(a+b)+c\}^2$$
$$=(a+b)^2+2.(a+b).\ c+c^2$$
$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=\boldsymbol{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$$

বর্গ নির্ণয় কর :

10. $xy+yz+zx$. 11. $7a+8b+9c$.

12. $2a+3b+4c+5d$. 13. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+\frac{3}{4}c+\frac{5}{8}d$.

14. 220.

$$(220)^2=(200+20)^2$$
$$=(200)^2+2.(200).(20)+(20)^2$$
$$=40000+8000+400=48400.$$

15. 550. 16. 1050. 17. 2100

18. $7m+14n$. 19. $x+\frac{1}{x}$. 20. $4x+\frac{5}{4x}$.

21. $a+2b+c$. 22. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z$. 23. $a^2+b^2+c^2+d^2$.

24. (*i*) 606, (*ii*) 820, (*iii*) 1010, (*iv*) 1500, (*v*) 2005.

সরল কর :

25. $(a+b)^2+2(a+b)(a-b)+(a-b)^2$,

$a+b=x$ এবং $a-b=y$ ধরিলে, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$$
$$=\{(a+b)+(a-b)\}^2 \quad [\ x \text{ ও } y\text{র মান বসাইয়া}\ ]$$
$$=(a+b+a-b)^2=(2a)^2=\boldsymbol{4a^2}.$$

26. $16a^2+8a(4x+7y)+(4x+7y)^2$.

27. $(2x+3y)^2+2(2x+3y)(4x-3y)+(4x-3y)^2$.

মান নির্ণয় কর :

28. $49a^2+126ab+81b^2$. যখন $a=3$ এবং $b=-1$.

$49a^2+126ab+81b^2=(7a)^2+2(7a)(9b)+(9b)^2$

$=(7a+9b)^2=\{7.3+9(-1)\}^2$ [a ও bর মান বসাইয়া]

$=(21-9)^2=12^2=144.$

29. $4x^2+20xy+25y^2$, যখন $x=3$ এবং $y=1$.

30. $36x^2+96xy+64y^2$, যখন $x=10$ এবং $y=5$.

সরল কর :

31. $8{\cdot}26\times8{\cdot}26+8{\cdot}26\times3{\cdot}48+1{\cdot}74\times1{\cdot}74$

32. $60{\cdot}39\times60{\cdot}39+60{\cdot}39\times79{\cdot}22+39{\cdot}61\times39{\cdot}61$.

33. $0{\cdot}75\times0{\cdot}75+0{\cdot}25\times0{\cdot}25+0{\cdot}5\times0{\cdot}75$. [C. U. 1940]

34. $1{\cdot}79\times1{\cdot}79+2{\cdot}42\times1{\cdot}79+1{\cdot}21\times1{\cdot}21$. [C. U. 1930]

35. $24{\cdot}723\times24{\cdot}723+25{\cdot}277\times49{\cdot}446+25{\cdot}277\times25{\cdot}277$.

36. $(3x-2y)^2+(y-2x)^2-(3x-2y)(2y-4x)$, যখন $5x=3y$. [W. B. S. F. 1954]

*37. $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^2+2(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}x)+(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}x)^2$.

পূর্ণ বর্গরূপে প্রকাশ কর :

*38. $121a^2+264ab+144b^2$.

*39. $(3a+2b)^2+2(3a+2b)(2a+3b)+(2a+3b)^2$.

*40. $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y)^2+2(\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}y)(\frac{3}{4}x+\frac{2}{8}y)+(\frac{3}{4}x+\frac{2}{8}y)^2$.

4·2. সূত্র 2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$

$=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2.$

দুইটি রাশির অন্তরের বর্গ, রাশিদ্বয়ের প্রত্যেকটির বর্গসমষ্টি ও উহাদের গুণফলের দ্বিগুণের অন্তরের সমান হইবে। অর্থাৎ (প্রথম রাশি - দ্বিতীয় রাশি)^2 = (প্রথম রাশি)^2 + (দ্বিতীয় রাশি)^2 − 2 (প্রথম রাশি) × (দ্বিতীয় রাশি)।

অনুসিদ্ধান্ত : $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ বা, $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$,

(i) $\boldsymbol{a^2+b^2=(a-b)^2+2ab}$. ...(1)

(ii) এবং $\boldsymbol{a^2+b^2=(a+b)^2-2ab}$ ...(2)

(1) ও (2) যোগ করিয়া $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$

(iii) বা $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$.

(iv) সুতরাং $a^2+b^2=\dfrac{(a+b)^2}{2}+\dfrac{(a-b)^2}{2}$

সূত্র (1) হইতে সূত্র (2) বিয়োগ করিলে পাওয়া যায়

(v) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

অর্থাৎ $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$.

বা, $ab=\frac{1}{4}\ [(a+b)^2-(a-b)^2]=\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}$.

(vi) $ab=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2+4ab.$$

(vii) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$.

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=a^2+2ab+b^2-4ab.$$

(viii) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$.

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$

বা, $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca$.

(ix) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$.

(x) $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2$.

প্রশ্নমালা 4 B

[1 হইতে 18 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

বর্গ নির্ণয় কর :

1. $\cdot 2x-\cdot 3y$

$$(\cdot 2x-\cdot 3y)^2=(\cdot 2x)^2-2(\cdot 2x)(\cdot 3y)+(\cdot 3y)^2$$
$$=\cdot 04x^2-\cdot 12xy+\cdot 09y^2.$$

2. $2x-3y-4z$.

$$(2x-3y-4z)^2=\{(2x)-(3y+4z)\}^2$$
$$=(2x)^2-2(2x)(3y+4z)+(3y+4z)^2$$
$$=4x^2-4x(3y+4z)+(3y)^2+2(3y)(4z)+(4z)^2$$
$$=4x^2-12xy-16zx+9y^2+24yz+16z^2$$
$$=4x^2+9y^2+16z^2-12xy+24yz-16zx.$$

3. $8a-\frac{1}{8a}$.

4. $\frac{7}{13}x-\frac{13}{7}y$.

5. $a-b+c$.

6. $a^2+b^2-c^2-d^2$.

7. (i) 470.

$470^2=(500-30)^2=(500)^2-2(500)(30)+(30)^2$

$=250000-30000+900=250900-30000=220900$.

(ii) 998. (iii) 1990.

সরল কর :

8. $(x-y)^2-2(x-y)(x+y)+(x+y)^2$.

$x-y=a$ এবং $x+y=b$ ধরিলে, প্রদত্ত রাশিমালা

$=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

$=\{(x-y)-(x+y)\}^2$ [x ও yর মান বসাইয়া]

$=(x-y-x-y)^2=(-2y)^2=4y^2$.

9. $36m^2-84mn+49n^2$.

10. $(2a+3b)^2-2(2a+3b)(3a+2b)+(3a+2b)^2$.

মান নির্ণয় কর :

11. $64x^2-80xy+25y^2$, যখন $x=2$ এবং $y=3$.

12. $49m^2-84mn+36n^2$, যখন $m=2$ এবং $n=1$.

13. $9{\cdot}29\times9{\cdot}29-9{\cdot}29\times18{\cdot}54+9{\cdot}27\times9{\cdot}27$.

*14. $26{\cdot}01\times26{\cdot}01-52{\cdot}02\times25{\cdot}01+25{\cdot}01\times25{\cdot}01$.

*15. $11{\cdot}11\times11{\cdot}11-22{\cdot}22\times10{\cdot}11+10{\cdot}11\times10{\cdot}11$.

সরল কর :

16. $81(a+b)^2-72(a+b)(b+c)+16(b+c)^2$.

*17 $(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b)^2-2(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b)(\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b)+(\frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b)^2$.

বর্গ নির্ণয় কর :

18. $7p-3q$.

19. x^2y-xy^2.

20. $\frac{12}{13}l-\frac{13}{12}m$.

21. $a^2-b^2-c^2-d^2$.

22 (i) 995. (ii) 9998. (iii) 99·8.

প্রশ্নমালা 4 C

[1 হইতে 7 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. $x+y=7$ এবং $xy=12$ হইলে, x^2+y^2 এর মান কত?

যেহেতু $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=7^2-2.12$ [মান বসাইয়া]

$=49-24=25.$

2. $a+b=5$ এবং $ab=6$ হইলে, a^2+b^2র মান নির্ণয় কর।

3. $a-b=2$ এবং $ab=99$ হইলে, a^2+b^2র মান নির্ণয় কর।

4. $a+\frac{1}{a}=10$ হইলে, $a^2+\frac{1}{a^2}$র মান নির্ণয় কর।

যেহেতু $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\therefore \quad a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2a.\frac{1}{a}$

$=10^2-2$ $\left[a+\frac{1}{a}\right.$র মান বসাইয়া। $\left.\right]$

$=100-2=98.$

5. $x-\frac{1}{x}=-3$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}=$কত?

6. $x+\frac{1}{x}=3$ হইলে, $x^2+\frac{1}{x^2}=$কত? [C. U. 1931]

7. দুইটি পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর রূপে প্রকাশ কর :—

(i) $35=7\times5=\left(\frac{7+5}{2}\right)^2-\left(\frac{7-5}{2}\right)^2$ [অনু (iv) অনুসারে]

$=6^2-1^2.$

(ii) 16. (iii) 15. (iv) 96. (v) 140.

8. $a+\frac{1}{a}=1$ হইলে, দেখাও যে $a^2+\frac{1}{a^2}=-1.$

9. $x+\frac{1}{x}=5$ হইলে, প্রমাণ কর $x^2+\frac{1}{x^2}=23.$

10. $p=3+\frac{1}{p}$ হইলে, প্রমাণ কর $p^4=119-\frac{1}{p^4}$ [B. U. 1930]

11. $m-\frac{1}{m}=20$ হইলে, $\left(m+\frac{1}{m}\right)^2$ এবং $m^2+\frac{1}{m^2}$ এর মান কত?

12. $p+\frac{1}{p}=\sqrt{2}$ হইলে, $p^2+\frac{1}{p^2}$র মান কত ?

13. $x+\frac{1}{x}=a$ হইলে, প্রমাণ কর $x^2+\frac{1}{x^2}=a^2-2$.

14. $x-\frac{1}{x}=2p$ হইলে, প্রমাণ কর $x^2+\frac{1}{x^2}=2(2p^2+1)$.

15. $x+\frac{1}{x}=5$ হইলে, $x^4+\frac{1}{x^4}$ এর মান নির্ণয় কর। [D. B. 1936]

16. $a-\frac{1}{2a}=4$ হইলে, প্রমাণ কর $a^2+\frac{1}{4a^2}=17$.

17. $a^2+b^2=25$, $ab=12$ হইলে, $(a-b)^2=$ কত ?

18. $a-b=-4$, $ab=12$ হইলে $a^2+b^2=$ কত ?

19 $x+y=3$, $xy=2$ হইলে, $(x-y)^2=$ কত ? [C. U. 1943]

20. $x=a+\frac{1}{a}$ এবং $y=a-\frac{1}{a}$ হইলে, $x^4+y^4-2x^2y^2$ এর মান কত ?

দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর :

21. (i) 21. (ii) 90. (iii) 56. (iv) 121. 22. $(x-a)(x-b)$.

23. $(x+1)(x+2)(x+3)$. 24. $24c^2d^2$.

25. দুইটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গের যোগফলরূপে প্রকাশ কর :

(a) $82=2.41$ $=2(25+16)$
$=2(5^2+4^2)$ $=(5+4)^2+(5-4)^2$ [অনুসিদ্ধান্ত (iii) অনুসারে]
$=9^2+1^2$.

(b) $2(9a^2+16b^2)$
$2(9a^2+16b^2)=2\{(3a)^2+(4b)^2\}$
$=(3a+4b)^2+(3a-4b)^2$. [অনুসিদ্ধান্ত (iii) অনুসারে]

6. দুইটি অখণ্ড সংখ্যার বর্গের যোগফলরূপে প্রকাশ কর :

(i) 10. (ii) 26. (iii) 40. (iv) 362. (v) 488.

দুইটি রাশির বর্গের যোগফলরূপে প্রকাশ কর :

27. (a) $2(64x^2+36y^2)$. (b) $2(36p^2+16q^2)$.
(c) $2(169m^2+100n^2)$.

মান নির্ণয় কর :

28. $ab+bc+ca$, যখন $a+b+c=15$ এবং $a^2+b^2+c^2=77$.

29. $xy+yz+zx$, যখন $x+y+z=9$, এবং $x^2+y^2+z^2=31$.
30. $x^2+y^2+z^2$, যখন $x+y+z=13$, এবং $xy+yz+zx=50$.
31. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$, যখন $a=x+y, b=x-y, c=x+2y$.
*32. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$, যখন $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$.
*33. $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2$, যখন $x+y+z=6$, $xy+yz+zx=1$.
*34. প্রমাণ কর : $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$.

যখন $x=b+c,\ y=c+a,\ z=a+b$.

4·3. সূত্র 3. $(a+b)(a-b)=a(a+b)-b(a+b)$
$=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

$\therefore\ (a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

দুইটি রাশির সমষ্টি ও অন্তরের গুণফল ঐ রাশিদ্বয়ের বর্গের অন্তরফলের সমান।

প্রশ্নমালা 4 D

[1 হইতে 14 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

গুণ কর :

1. $(2a+5b)(2a-5b)$.

$(2a+5b)(2a-5b)=(2a)^2-(5b)^2=4a^2-25b^2$.

2. $(x+y+z)(x-y-z)$.

$(x+y+z)(x-y-z)=\{(x)+(y+z)\}\{(x)-(y+z)\}$
$=(x)^2-(y+z)^2=x^2-(y^2+2yz+z^2)=x^2-y^2-z^2-2yz$.

3. $(6x-5y)(5y+6x)$. 4. $(7a+12b)(7a-12b)$.
5. $(x+\sqrt{2}x+1)(x-\sqrt{2}x+1)$.
6. $\left(p-\frac{q}{2}\right)\left(p+\frac{q}{2}\right)$. 7. $\left(\frac{p}{2}+\frac{q}{2}+1\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{q}{2}-1\right)$.
8. $44\times36.[(40+4)\times(40-4)]$ 9. 105×95.
10. $(a+\sqrt{2}b)(a-\sqrt{2}b)$. 11. $(2\sqrt{2}+7\sqrt{3})(2\sqrt{2}-7\sqrt{3})$.
12. $(x+2y+3z)(x+2y-3z)$. 13. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.
14. $(p+\sqrt{2pq}+q)(p-\sqrt{2pq}+q)$.
15. (i) $(a-b-c-d)(a-b+c+d)$. (ii) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$
16. (i) 90×110. (ii) 120×80. (iii) 210×190.

ক্রমিক গুণফল নির্ণয় কর :

17. (a) $x^2+y^2, x^2-y^2, x^4+y^4$. (b) $x^4+y^4, x^4-y^4, x^8+y^8$.

18. $x^2-x+1, x^2+x+1, x^4-x^2+1$ [C. U. 1911, '26]

19. $x^2+y^2, x^2-y^2, x^4+y^4, x^8+y^8$.

20. $a^3-b^3, a^3+b^3, a^6+b^6, a^{12}+b^{12}$.

21. $a+b+c, b+c-a, c+a-b, a+b-c$. [C. U. 1910]

*22. $x^2-y^2+z^2+2xz$ এর মান নির্ণয় কর যখন $x=b-c, y=c-a, z=a-b$.

*23. $x^2+2xy-z^2-2yz$ কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

[C. U. 1943]

*24. $x=b+c-2a, y=c+a-2b, z=a+b-2c$ হইলে $x^2+y^2-z^2+2xy$ এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1919]

*25. (a) প্রমাণ কর যে $(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$.

(b) প্রমাণ কর যে $(a+b)^4-(a-b)^4=8ab(a^2+b^2)$.

4·4. সূত্র 4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ··· (i)

$=a^3+b^3+3ab(a+b)$ ··· (ii)

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$$
$$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

অনুসিদ্ধান্ত : সূত্র 4 হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাওয়া যায়

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3.$$
$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b).$$
$$(a+b)^3-(a^3+b^3)=3ab(a+b).$$

অনুসিদ্ধান্ত : $(a+b+c)^3$

$$=\{a+(b+c)\}^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+2bc+c^2)+(b^3+3b^2c+3bc^2+c^3)$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$
$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc$$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+3bc(b+c)$

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$

$=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$=\boldsymbol{a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)}.$

$\therefore\ \boldsymbol{(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)}.$

প্রশ্নমালা 4 E

[1 হইতে 12, 16 হইতে 23 ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

ঘন নির্ণয় কর :

1. $3a+4b.$

$(3a+4b)^3=(3a)^3+3(3a)^2(4b)+3(3a)(4b)^2+(4b)^3$

$=\boldsymbol{27a^3+108a^2b+144ab^2+64b^3}.$

2. (i) $ax+by.$ (ii) $1+3a.$ (iii) $2abc+2a.$

3. 55.

$(55)^3=(50+5)^3=(50)^3+3(50)^2(5)+3(50)(5)^2+(5)^3$

$=125000+37500+3750+125=\boldsymbol{166375}.$

4. (i) 22. (ii) 110. (iii) 220.

5. যদি $a+b=5$ হয়, a^3+b^3+15ab এর মান নির্ণয় কর।

$a^3+b^3+15ab=a^3+b^3+3ab.5$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)$ [5 এর স্থলে $a+b$ বসাইয়া]

$=(a+b)^3=5^3=\boldsymbol{125}.$

6. $a+\frac{1}{a}=4$ হইলে, দেখাও যে $a^3+\frac{1}{a^3}=52.$ [D. B. 1948]

$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3a.\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=4^3-3\times 4$ [$a+\frac{1}{a}$ এর মান বসাইয়া]

$=64-12=\boldsymbol{52}.$

7. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3+c^3=3abc$.

$\because\ a+b+c=0. \quad \therefore\ a+b=-c.$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=(a^3+b^3)+c^3=\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}+c^3$

$=(-c)^3-3ab(-c)+c^3=-c^3+3abc+c^3=3abc.$

8. যদি $a^3+b^3=9$, $a+b=3$ হয়, abর মান নির্ণয় কর।

$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

বা, $3ab(a+b)=(a+b)^3-(a^3+b^3)$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $3ab\times3=3^3-9$, [মান বসাইয়া] বা, $9ab=18$ $\therefore\ ab=18\div9=2$.

9. যদি $a+b=3$, $ab=2$ হয়, a^3+b^3র মান নির্ণয় কর।

10. যদি $a+b=8$ এবং $ab=15$ হয়, a^3+b^3 এর মান নির্ণয় কর।

11. যদি $x+\frac{1}{x}=2a$ হয়, তবে $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

12. যদি $a+\frac{1}{a}=\sqrt{3}$ হয়, তবে $a^3+\frac{1}{a^3}$ এর মান নির্ণয় কর।

ঘন নির্ণয় কর :

13. (a) $x+2y$. (b) $3a^2+4b^2$. (c) ax^2+by^2

(d) $x+\frac{1}{x}$. (e) $2a+\frac{3}{b}$. (f) $3p+\frac{1}{3p}$.

14. (i) $2a+b+2c$. (ii) $2a+3b+4c$. (iii) $a^2+b^2+c^2$.

15. (i) 33. (ii) 105. (iii) 201. (iv) 910.

সরল কর :

16. $(a+b)^3+(a-b)^3+6a(a^2-b^2)$.

17. $(x+a)^3+(x+b)^3+3(2x+a+b)(x+a)(x+b)$.

18. $(a+b+c)^3+6a\{a^2-(b+c)^2\}+(a-b-c)^3$.

19. $(2x-3y)^3+(3x-2y)^3+15(2x-3y)(3x-2y)(x-y)$.

20. $(2a+b)^3+(2a-b)^3+12a(4a^2-b^2)$.

21. (i) $(737)^3+(263)^3+3(737)^2(263)+3(263)^2(737)$.

(ii) $(18\cdot725)^3+(1\cdot275)^3+(18\cdot725)(1\cdot275)\times60$.

মান নির্ণয় কর :

22. $8x^3+36x^2+54x+27$, যখন $x=2$.

23. $125x^3+150x^2y+60xy^2+8y^3$, যখন $x=8$, $y=-2$.

24. x^3+y^3+3xy, যখন $x+y=1$.

25. a^3+b^3+3abc, যখন $a+b=c$.

26. $x^3+\frac{1}{x^3}$, যখন $x+\frac{1}{x}=1$. [C. U. 1935, '45]

27. $x+y=5$ এবং $xy=7$ হইলে, $x^3+y^3+4(x-y)^2$ এর মান কত ?

28. $x+\frac{1}{x}=p$ হইলে, $x^3+\frac{1}{x^3}$ এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1926]

29. $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হইলে দেখাও যে $a^3+\frac{1}{a^3}=0$. [C. U. '24, S. F.'57]

30. $2x+\frac{2}{x}=3$ হইলে প্রমাণ কর যে, $8\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=-9$.

31. **প্রমাণ কর যে :** $(3x+2y)^3+(2x+3y)^3+15(x+y)(3x+2y)(2x+3y)$ একটি পূর্ণ ঘন রাশি।

32. **a^3+b^3র মান নির্ণয় কর, যখন**

(i) $a+b=5$ এবং $ab=6$.
*(iii) $a+b=12$ এবং $ab=35$.
(ii) $a+b=8$ এবং $ab=15$.
*(iv) $a+b=20$ এবং $ab=180$.

33. **প্রমাণ কর :**

(i) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b)$.
*(ii) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(a-b+c)^3-(a+b-c)^3=24abc$.
*(iii) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$.
*(iv) $(a-b)^3+(a+b)^3+3(a-b)^2(a+b)+3(a+b)^2(a-b)=8a^3$.

4·5. **সূত্র 5.** $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ... (i)

$=a^3-b^3-3ab(a-b)$ ... (ii)

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$$
$$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b).$$

অনুসিদ্ধান্ত : 5 নম্বর সূত্র হইতে পক্ষান্তর করিয়া পাওয়া যায়

$$a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)^3$$
$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$(a^3-b^3)-(a-b)^3=3ab(a-b).$$

প্রশ্নমালা 4 F

[1 হইতে 14, 28 হইতে 30 ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

ঘন নির্ণয় কর :

1. $2x-3y$.

$$(2x-3y)^3=(2x)^3-3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2-(3y)^3$$
$$=8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3.$$

2. $a-b-c$.

$$(a-b-c)^3=\{(a-b)-c\}^3.$$
$$=(a-b)^3-3(a-b)^2c+3(a-b)c^2-c^3$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-3c(a^2-2ab+b^2)+3c^2(a-b)-c^3$$
$$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-3a^2c+6abc-3b^2c+3ac^2-3bc^2-c^3$$
$$=a^3-b^3-c^3-3a^2b-3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc-3b^2c-3bc^2$$
$$=a^3-b^3-c^3-3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2+2bc)-3bc(b+c)$$
$$=a^3-b^3-c^3-3a^2(b+c)+3a(b+c)^2-3bc(b+c)$$
$$=a^3-b^3-c^3-3(b+c)(a^2-ab-ac+bc)$$
$$=a^3-b^3-c^3-3(b+c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$$
$$=a^3-b^3-c^3-3(b+c)(a-b)(a-c).$$

3. $4m-5n$. 4. $5x^2-\frac{1}{5x^2}$. 5. $a^2-b^2+c^2$.

45.

$$(45)^3=(50-5)^3$$
$$=(50)^3-3(50)^2(5)+3(50)(5)^2-(5)^3$$
$$=125000-37500+3750-125$$
$$=128750-37625=91125.$$

7. (i) 17. (ii) 97. (iii) 192.

8. $a-b=2$ এবং $ab=48$ হইলে; a^3-b^3 এর মান নির্ণয় কর।

$$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$$
$$=(2)^3+3(48)2 \quad [\ ab \text{ এবং } (a-b) \text{ এর মান বসাইয়া }]$$
$$=8+288=296.$$

9. $x-\frac{1}{x}=5$ হইলে, দেখাও যে $x^3-\frac{1}{x^3}=140$.

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)$$
$$=(5)^3+3.5=125+15=140.$$

10. $a-b=3$ এবং $a^3-b^3=387$ হইলে, ab এর মান নির্ণয় কর।

$3ab(a-b)=(a^3-b^3)-(a-b)^3$

বা $3ab.3=387-3^3$ বা $9ab=387-27=360.$

$\therefore\ ab=360\div 9=40.$

11. $a=2$ হইলে, $125a^3-75a^2+15a-8$ এর মান নির্ণয় কর।

$125a^3-75a^2+15a-8$
$=(5a)^3-3(5a)^2.1+3(5a).1^2-1^3-7.$
$=(5a-1)^3-7=729-7=722.$

12. $a-b=6$ হইলে প্রমাণ কর যে $a^3-b^3-18ab=216.$

$a^3-b^3-18ab=a^3-b^3-3ab(6)$
$=a^3-b^3-3ab(a-b)$
$=(a-b)^3=6^3=216.$

সরল কর :

13. $(3x+2y)^3-(3y+2x)^3-3(3x+2y)(3y+2x)(x-y).$

$3x+2y$ কে a এবং $3y+2x$ কে b ধরিতে হইবে, [G. U. '50]

তাহা হইলে $a-b=(3x+2y)-(3y+2x)$
$=3x+2y-3y-2x=x-y.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3-b^3-3ab(a-b)$
$=(a-b)^3=(x-y)^3.$ [$(a-b)$র মান বসাইয়া]

14. সরল কর :
$(x+y+z)^3-(x-y-z)^3-6(y+z)\{x^2-(y+z)^2\}.$

15. $a-b=3$ এবং $ab=108$ হইলে, a^3-b^3 এর মান নির্ণয় কর।

16. $2x-3y=6$ হইলে, দেখাও যে $8x^3-27y^3-108xy=216.$

ঘন নির্ণয় কর :

17. (i) $5a-7b.$ (ii) $1-8x^2.$
(iii) $2a+b-c.$ (iv) $a^2-b^2-c^2.$

18. (i) $a-\frac{1}{a}.$ (ii) $2p-\frac{1}{2p}.$

19. (i) 17. (ii) 48. (iii) 95. (iv) 191. (v) 499.

সরল কর :

20. $(3a+2b)^3-(2a+3b)^3-3(3a+2b)(2a+3b)(a-b)$.

21. $27(a+1)^3-27-81a(a+1)$.

22. $(a+1)^6-(a-1)^6-12a(a^2-1)^2$.

23. $(2m-3n)^3-3(2m-3n)^2(3m-2n)$
$+3(2m-3n)(3m-2n)^2-(3m-2n)^3$.

24. $\left(x+\frac{1}{x}-2\right)^3-\left(x-\frac{1}{x}-2\right)^3-\frac{6}{x}\left(x+\frac{1}{x}-2\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$.

25. $(a+b+c)^3+6a\{a^2-(b+c)^2\}+(a-b-c)^3$.

26. $(s-a+b)^3+(s+a-b)^3+6s(s-a+b)(s+a-b)$.

27. $(3{\cdot}466)^3-3(3{\cdot}466)^2\times(2{\cdot}966)+3\times(3{\cdot}466)\times(2{\cdot}966)^2$
$-(2{\cdot}966)^3$.

28. $(11{\cdot}643)^3-3\times(11{\cdot}643)^2\times(10{\cdot}543)+3\times(11{\cdot}643)$
$\times(10{\cdot}543)^2-(10{\cdot}543)^3$.

মান নির্ণয় কর :

29. $1-9x+27x^2-27x^3$ এর, যখন $x=-1$.

30. $a^3-b^3-12abc$ এর, যখন $a-b=4c$.

31. p^3-q^3-180 এর, যখন $pq=30$, $p-q=2$.

32. $8x^3-27y^3$ এর যখন $xy=2$ এবং $2x-3y=1$.

33. $x-\frac{1}{x}=p$ হইলে, দেখাও যে $x^3-\frac{1}{x^3}=p^3+3p$. [C. U. 1910, '36]

34. $2x-\frac{2}{x}=3$ হইলে, প্রমাণ কর যে $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$. [D. B. 1929]

35. $x+y=4$, $xy=7$ হইলে $x^3+y^3+4(x+y)^2$ এর মান নির্ণয় কর।

4·6. সূত্র 6. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3.$$

প্রশ্নমালা 4 G

[1 হইতে 11 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সূত্রের সাহায্যে গুণ কর :

1. $(5x+1)(25x^2-5x+1)$
$=(5x+1)\{(5x)^2-(5x)(1)+(1)^2\}$
$=(5x)^3+(1)^3=125x^3+1.$

2. $(3x+4)(9x^2-12x+16).$ 3. $(4x+1)(16x^2-4x+1).$

4. $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2).$ 5. $(ab+2a)(a^2b^2-2a^2b+4a^2).$

6. $(ax+by)(a^2x^2-axby+b^2y^2).$

7. $(3a^2+4b^2)(9a^4-12a^2b^2+16b^4).$

সরল কর :

8. $(a+b)(a^2-ab+b^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2).$
$=a^3+b^3+b^3+c^3=a^3+2b^3+c^3.$

9. $(x+2)(x^2-2x+4)-(x+1)(x^2-x+1).$

10. $(a+b)(a^2-ab+b^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)$
$+(c+a)(c^2-ca+a^2).$

11. $(2m+4)(4m^2-8m+16)-(m+1)(m^2-m+1).$

গুণ কর :

12. $(5m+7n)(25m^2-35mn+49n^2).$

13. $(7x+8y)(49x^2-56xy+64y^2).$

14. $(5a+6)(25a^2-30a+36).$

15. $(xyz+1)(x^2y^2z^2-xyz+1).$

16. $(4x^4-6x^2y^2+9y^4)(2x^2+3y^2).$

17. $(r^3+s^3)(r^6-r^3s^3+s^6).$

সরল কর :

18. $(x+7)(x^2-7x+49)+(x+2)(x^2-2x+4).$

19. $(5a+6b)(25a^2-30ab+36b^2)-(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
$-(4a+5b)(16a^2-20ab+25b^2).$

20. (i) $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$

(ii) $(x+a)(x^2-ax+a^2)(x^3-a^3)$.

4·7 **সূত্র 7.** $(\boldsymbol{a-b})(\boldsymbol{a^2+ab+b^2})=\boldsymbol{a^3-b^3}$.

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3.$$

প্রশ্নমালা 4 H

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ ।]

সূত্রের সাহায্যে গুণ কর :

1 $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$

$=(3x-4y)\{(3x)^2+(3x)(4y)+(4y)^2\}$

$=(3x)^3-(4y)^3=\boldsymbol{27x^3-64y^3}$.

2 $(2a-3)(4a^2+6a+9)$ 3. $(x-1)(x^2+x+1)$.

4 $(4a-1)(16a^2+4a+1)$. 5. $(2m-5n)(4m^2+10mn+25n^2)$.

6 $(5x^2-4y^2)(25x^4+20x^2y^2+16y^4)$.

সরল কর :

7 $(x-2)(x^2+2x+4)-(x-3)(x^2+3x+9)$

$=(x-2)\{(x^2+x.2+(2)^2\}-(x-3)\{(x)^2+x.3+(3)^2\}$

$=(x^3-2^3)-(x^3-3^3)=x^3-8-x^3+27=\mathbf{19}$.

8 $(x-7)(x^2+7x+49)-(x+6)(x^2-6x+36)$.

9 $(3p+2)(9p^2-6p+4)-(2p-4)(4p^2+8p+16)$.

10 $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^6+a^3b^3+b^6)+(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$(a^6-a^3b^3+b^6)-2a^9$.

11. $(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^3+a^3)$. [C. U. 1882]

12. $\{(a+b)^2+(a+b)(c+d)+(c+d)^2\}(a+b-c-d)$.

গুণ কর :

13 $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$. 14. $(1-2x^2)(1+2x^2+4x^4)$.

15. $(x^4+x^2+1)(x^2-1)$. 16. $(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}y^2)(\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{6}a^2y^2+\frac{1}{9}y^4)$.

17. $\left(a-\frac{2}{a}\right)\left(a^2+2+\frac{4}{a^2}\right)$.

সরল কর :

18. $(x-9)(x^2+9x+81)+(x-2)(x^2+2x+4)$.

19. $(3a-4)(9a^2+12a+16)-(2a-1)(4a^2+2a+1)$

20. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$.

4 8. সূত্র 8. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$$

$$(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$$

$$(x-a)(x+b)=x^2-(a-b)x-ab.$$

+, − চিহ্নগুলি বিশেষভাবে লক্ষ্য করিতে হইবে। দুইটি দ্বিপদ রাশির প্রথম পদ (x) একই হইলে, উহাদের **গুণফল** = **(প্রথম পদ)^2 + (দ্বিতীয় পদের বীজগণিতীয় সমষ্টি × প্রথম পদ) + (দ্বিতীয় পদদ্বয়ের বীজগণিতীয় গুণফল)।**

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$$

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

$$(x+a)(x+b)(x-c)=x^3+(a+b-c)x^2+(ab-ac-bc)x-abc.$$

$$(x+a)(x-b)(x-c)=x^3+(a-b-c)x^2-(ab+ac-bc)x+abc.$$

সুতরাং তিনটি দ্বিপদ রাশির প্রথম পদ (x) একই থাকিলে এবং দ্বিতীয় পদগুলি ভিন্ন হইলে, রাশি তিনটির গুণফলে x^3র সহগ 1 হইবে। দ্বিতীয় রাশি তিনটির বীজগণিতীয় যোগফল, x^2 এর সহগ হইবে। দ্বিতীয় রাশি তিনটির দুইটি দুইটি করিয়া তিনটি বীজগণিতীয় গুণফলের বীজগণিতীয় সমষ্টি, xএর সহগ হইবে। দ্বিতীয় রাশি তিনটির বীজগণিতীয় গুণফল হইবে শেষ বা চতুর্থ পদটি।

প্রশ্নমালা 4 I

[1 হইতে 11 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(x+2)(x+3)=x^2+(2+3)x+(2\times3)=x^2+5x+6.$
2. $(l+2)(l+5)$. 3. $(a+4)(a+6)$. 4. $(p+7)(p+6)$.
5. $(k+6)(k-2)$. 6. $(x+12)(x-2)$. 7. $(a-12)(a+4)$.
8. $(a-20)(a+5)$. 9. $(m-10)(m-5)$. 10. $(x+1)(x+2)(x+3)$.
11. $(x+2)(x-3)(x+1)$. 12. $(x+5)(x+7)$. 13. $(x+13)(x+7)$.
14. $(x+4)(x-9)$. 15. $(x+20)(x-10)$. 16. $(x+5)(x-1)$.
17. $(m-13)(m-9)$. 18. $(m-25)(m+24)$. 19. $(k-8)(k-7)$.
20. $(x-1)(x-3)$. 21. $(4x+5)(4x+6)$. 22. $(x+2)(x+4)(x+5)$.
23. $(x-4)(x+1)(x+5)$ 24. $(x+2)(x-3)(x+1)$. 25. $(x-4)(x-5)(x-1)$

4·9. **দ্বিপদ রাশির ঘাত :** কোন রাশিকে সেই রাশি দ্বারা এক বা একাধিক বা ক্রমিক গুণ করিলে রাশিটির ঘাত (Power) উৎপন্ন হয়। যেমন $(a+b)^1$; $(a+b)(a+b)$ অর্থাৎ $(a+b)^2$; $(a+b)(a+b)(a+b)$ অর্থাৎ $(a+b)^3$ ইত্যাদি। ঘাত উন্নীত করিয়া যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে রাশিটির **বিস্তৃতি** (Expansion) বলে ; এবং এই প্রক্রিয়াকে **উদ্ঘাতন** (Involution) বলে। দুইটি পদ বিশিষ্ট রাশিকে **দ্বিপদ রাশি** (Binomials) বলে। দ্বিপদ রাশির উদ্ঘাতনে কয়েকটি নিয়ম দেখা যায়। গুণ করিলে দেখা যায় যে,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$
$$(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4.$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$
$$(a-b)^5=a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5.$$ ইত্যাদি।

উপরের কয়েকটি ঘাতের বিস্তৃতি হইতে নিম্নলিখিত কয়েকটি নিয়ম পাওয়া যায়।

নিয়ম : (1) বিস্তৃতির পদসংখ্যা সর্বদাই ঘাতের সূচক অপেক্ষা এক অধিক। উপরের দৃষ্টান্তে দেখা যায় তৃতীয় ঘাতের পদসংখ্যা 3+1=4টি, পঞ্চম ঘাতের পদসংখ্যা 5+1=6টি, ইত্যাদি।

(2) বিস্তৃতির প্রথম ও শেষ পদ দুইটি দ্বিপদের প্রথম ও দ্বিতীয় পদ হইবে এবং উহাদের ঘাত=দ্বিপদ রাশিটির ঘাত। যেমন, a^5 ও b^5, $(a+b)^5$ এর প্রথম ও শেষ পদ। a^3 ও b^3, $(a+b)^3$ এর প্রথম ও শেষ পদ ইত্যাদি।

(3) বিস্তৃতির যে কোন পদের a ও bর ঘাতের সূচকদ্বয়ের যোগফল সর্বদা দ্বিপদ রাশিটির ঘাতের সূচকের সমান হইবে এবং প্রথম পদ অর্থাৎ aর ঘাতের সূচক সংখ্যা ক্রমশঃ 1 করিয়া কমিয়া 0তে আসিয়া পৌছাইবে এবং দ্বিতীয় পদ অর্থাৎ bর ঘাতের সূচক সংখ্যা 0 হইতে 1 করিয়া বর্ধিত হইতে থাকিবে। যেমন,

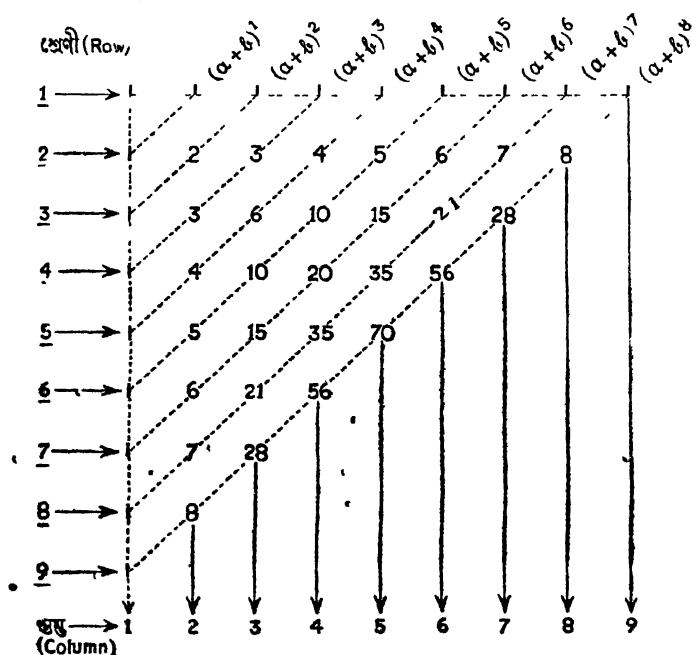
$a^3b^0, a^2b^1, a^1b^2, a^0b^3$, এখানে $3+0=2+1=1+2=0+3$, যোগফল সর্বদাই 3 এবং উহা $(a+b)^3$ এর সূচক 3 এর সহিত সমান। এখানে মনে রাখিতে হইবে যে $a^0=b^0=1$. এইরূপে পদগুলির ঘাতের সূচকগুলির নিয়ম পাওয়া গেল।

(4) বিস্তৃতিতে যে কোন পদের সহগের সংখ্যা বাহির করিতে হইলে প্রথম পদ অর্থাৎ aর ঘাতের সূচককে ঐ পদের সহগের সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া, গুণফলকে পদ

সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল হইবে উহা পরবর্তী পদের সহগ সংখ্যা হইবে। যেমন, $(a+b)^3$ এর দ্বিতীয় পদের সহগ বাহির করিবার সময়, প্রথম পদ $1a^3$ এর সূচক 3 এবং সহগ 1 ও পদ সংখ্যা 1. ∴ দ্বিতীয় পদের সহগ $=\frac{3\times 1}{1}=3$, তৃতীয় পদের সহগ $=\frac{3\times 2}{2}=3$. $(a+b)^5$ এর চতুর্থ পদের সহগ হইবে $\frac{10\times 3}{3}=10$.

(5) সহগগুলি লক্ষ্য করিলে বুঝিতে পারা যায় যে, পদ সংখ্যার অর্ধেক পদ পর্যন্ত সহগগুলি যে ক্রমে সজ্জিত থাকে শেষ পদ হইতে অর্ধেক পর্যন্ত সেই একই ক্রমে সজ্জিত থাকে। সেইজন্য সব কয়টি পদের সহগ নির্ণয় না করিয়া অর্ধেক পদ সংখ্যার বা অর্ধেক অপেক্ষা একটি বেশী পদ সংখ্যার সহগগুলি নির্ণয় করিলে অবশিষ্ট পদগুলির সহগ পাওয়া যাইবে। যেমন,

1, 2′, 1 ,
1, 3′, 3, 1 ;
1, 4, 6′, 4, 1 ,
1, 5, 10′, 10, 5, 1 ,
1, 6, 15, 20′, 15, 6, 1. ইত্যাদি।

4·10. প্যাস্‌কেলের ত্রিভুজ :

সুবিখ্যাত ফরাসী গাণিতিক প্যাস্‌কেল সহগ নির্ণয় করিবার জন্য একটি ত্রিভুজ আবিষ্কার করিয়াছিলেন। ইহাকে **প্যাস্‌কেলের ত্রিভুজ** (Pascal's triangle

বলে। ইহাতে কয়েকটি উলম্ব স্তম্ভে ও কয়েকটি আনুভূমিক শ্রেণীতে অঙ্কগুলি সজ্জিত করা আছে। সর্বোচ্চ প্রথম শ্রেণীতে পর পর কয়েকটি 1 বসাইতে হয় এবং সর্ববামের স্তম্ভেও একটির নীচে একটি করিয়া 1 বসাইতে হয়। তাহার পর যে কোন শূন্য পদে ঐ শূন্য পদের মাথার উপর যে অঙ্কটি থাকিবে উহার সহিত শূন্য পদের বাম দিকে যে অঙ্কটি থাকিবে তাহাদের যোগ করিয়া যোগফলটি ঐ শূন্য পদে বসাইতে হইবে। ঐরূপ পদ্ধতিতে অঙ্কগুলি বসান হইলে উপরের শ্রেণীর দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি স্থানটি বাম স্তম্ভের দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি স্থানের সহি ত তির্যক সরল রেখাদ্বারা যুক্ত করিলে ঐ সরলরেখাগুলি দ্বারা কর্তিত অঙ্কগুলি বিভিন্ন ঘাতের সহগ সূচিত করিবে।

$$(a+b)^4=(1)a^4+(4)a^3b+(6)a^2b^2+(4)ab^3+(1)b^4.$$

এই সহগগুলি $(a+b)^4$র নীচের তির্যক সরলরেখা, বাম দিকের উলম্ব স্তম্ভ এবং উপরের শ্রেণী দ্বারা গঠিত সমকোণী ত্রিভুজের অভিভুজের উপর সজ্জিত 1, 4, 6, 4, 1.

সেইরূপ $(a+b)^5$ এর সহগগুলি হইবে 1, 5, 10, 10, 5, 1.

$(a+b)^6$ এর সহগগুলি হইবে 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

প্রশ্নমালা 4 J

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

1. $(x+y)^7$. বিস্তৃতির মোট পদ সংখ্যা হইবে $(7+1)$ বা 8টি। সুতরাং $8\div2=4$টি পদের সহগ বাহির করিয়া লইলেই অবশিষ্ট 4টি সহগ জানা যাইবে।

প্রথম পদ $=1x^7y^0=x^7$ [এখানে সহগ 1 আছে। $y^0=1$]

দ্বিতীয় পদ $=\dfrac{1\times7}{1}x^6y^1=7x^6y$. তৃতীয় পদ $=\dfrac{7\times6}{2}x^5y^2=21x^5y^2$.

চতুর্থ পদ $=\dfrac{21\times5}{3}x^4y^3=35x^4y^3$.

পঞ্চম পদ $=\dfrac{35\times4}{4}x^3y^4=35x^3y^4$. ইহার সহগটি চতুর্থ পদের সহগের সমান।

ষষ্ঠ পদ $=\dfrac{35\times3}{5}x^2y^5=21x^2y^5$. ইহার সহগটি তৃতীয় পদের সহগের সমান।

সপ্তম পদ $=\dfrac{21\times2}{6}x^1y^6=7xy^6$. ইহার সহগটি দ্বিতীয় পদের সহগের সমান।

অষ্টম পদ $=\dfrac{7\times1}{7}x^0y^7=y^7$ $[x^0=1]$ ইহার সহগটি প্রথম পদের সহগের সমান।

$$\therefore\ (x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7.$$

2. $(2a-3b)^6$. বিস্তৃতির মোট পদ সংখ্যা হইবে $(6+1)$ বা 7টি। সুতরাং 4টি পদের সহগ বাহির করিতে হইবে। দ্বিপদ রাশির পদ দুইটির মধ্যে '−' চিহ্ন আছে বলিয়া, বিস্তৃতির পদের প্রথমটি '+', এবং তাহার পর '−', তাহার পর '+', এইরূপে একটি অন্তর একটি করিয়া '+' ও '−' চিহ্ন বসিবে।

প্রথম পদ $=(2a)^6=64a^6$

দ্বিতীয় পদ $=-6(2a)^5(3b)=-576a^5b.$

তৃতীয় পদ $=15(2a)^4(3b)^2=2160a^4b^2.$

চতুর্থ পদ $=-20(2a)^3(3b)^3=-4320a^3b^3.$

পঞ্চম পদ $=15(2a)^2(3b)^4=4860a^2b^4$

ষষ্ঠ পদ $=-6(2a)^1(3b)^5=-8748ab^5$

সপ্তম পদ $=1.(2a)^0(3b)^6=2079b^6$

$\therefore\ (2a-3b)^6=64a^6-576a^5b+2160a^4b^2-4320a^3b^3$
$+4860a^2b^4-8748ab^5+2079b^6.$

3. $(x+y)^4$. 4 $(x-y)^5$. 5 $(a+2b)^6$. 6 $(a-2)^4$.
7. $(2x+1)^6$. 8. $(3a-b)^6$. 9. $(m+5)^7$. 10. $(x-y)^8$.
11. $(2a-1)^8$. *12 $(x+y)^9$. *13. $(a-1)^9$. *14. $(a+\frac{1}{2})^5$.
*15. $(2x+3y)^5$.

সরল কর :

16. $(a+b)^4+(a-b)^4$. 17. $(x+y)^5-(x-y)^5$.

মান নির্ণয় কর :

18. $a^5+5a^4+10a^3+10a^2+5a+32$, যখন $a=-2$.

*19. $a^4+12a^3+54a^2+108a+81$, যখন $a=-5$.

*20. $16x^4-32x^3+24x^2-8x+1$, যখন $x=-2$.

5

সহজ উৎপাদক

Simple Factors

5·1. যখন কোন বীজগণিতীয় রাশি, দুই বা তাহার অধিক রাশির গুণফলের সমান হয়, তখন এই শেষোক্ত রাশিগুলিকে প্রথমোক্ত রাশিটির **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** (Factor) বলে। যে প্রক্রিয়াতে উৎপাদক নির্ণয় করা হয় তাহাকে **উৎপাদকে বিশ্লেষণ** করা বা **উৎপাদক নির্ণয়** করা বলা হয়। ইংরাজীতে বলে Factorize বা Resolve into Factors. উৎপাদক নির্ণয় গুণের বিপরীত প্রক্রিয়া। ইহাতে গুণফলটি প্রদত্ত থাকিবে, গুণ্য ও গুণকগুলি নির্ণয় করিতে হয়।

5·2. **সাধারণ উৎপাদক** (Common Factor) : বহুপদযুক্ত কোনও রাশির প্রতিটি পদ যদি একটি সাধারণ উৎপাদক দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে ঐ সাধারণ উৎপাদকটি একটি বন্ধনীর বাহিরে রাখিয়া, বন্ধনীর মধ্যে রাশিটির প্রতিটি পদকে ঐ সাধারণ উৎপাদক দিয়া ভাগ করিয়া স্ব স্ব চিহ্ন সমেত ভাগফলগুলি রাখিতে হয়। ইহাকে **সাধারণ উৎপাদক প্রণালী** বলা হয়।

প্রশ্নমালা 5 A

[1 হইতে 18 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $5x^3y^2+10x^2y^3=5\boldsymbol{x^2y^2(x+2y)}$.

2. $p^2(a+b+c)+q^2(a+b+c)+r^2(a+b+c)$.

$=\boldsymbol{(a+b+c)(p^2+q^2+r^2)}$.

3. $(x+y)(x-y)+(y+z)(x-y)+(z+x)(x-y)$.

$=(x-y)\{(x+y)+(y+z)+(z+x)\}$

$=(x-y)(x+y+y+z+z+x)$

$=(x-y)(2x+2y+2z)=\boldsymbol{2(x-y)(x+y+z)}$.

4. $16x+64x^2y$. 5. $3x^2+6x^5$. 6. $6x^3+2x^4+4x^5$.

7. $5x^4+10a^2x^2-15a^3x^5$. 8. $x^2(y+z)+x^3$. 9. $ab(a+b)+abc$.

10. $abc(b-c)+bca(c-a)+cab(a-b)$.

11. $(a-b)(x-y)+(b-c)(x-y)$.

12. $(a+b-c)x^2+(b+c-a)x^2+(c+a-b)x^2$.

13. $ax-ay+az+bx-by+bz+cx-cy+cz$.

14. $ax+bx+cx$. 15. $mp^2+np^2+qp^2+rp^2$. 16. $x^3-x^2y+xy^2$.

17. $15a^2-225a^4$. 18. $3x^3-x^2+x$. 19. $3a^4-3a^3b+6a^2b^2$.

20. $2x^2y^3-6x^2y^2+2xy^3$. 21. $7a-7a^3+14a^4$.

22. $a^2(b+c)+a^3$. 23. $x(x+y)+2x(y+z)+3x(z+x)$.

24. $a^2(b+c-a)+a^2(c+a-b)+a^2(a+b-c)$.

25. $a^2bc(b-c)+b^2ca(c-a)+c^2ab(a-b)$.

26. $x^2(b+c-2a)+x^2(c+a-2b)+x^2(a+b-2c)$.

27. $(x+y)a-(x+y)$. 28. $(a-b)(x-y)+(b-c)(x-y)$.

29. $(a+b)(x+2y+3z)-(b+c)(x+2y+3z)+(c+a)(x+2y+3z)$.

30. $(ax+by)(px+qy)+(ax+by)(px-qy)$.

5·3. **উপযুক্ত পদ বিন্যাস** (Grouping of terms) : অনেক সময় পদগুলিকে কয়েকটি সুবিধামত দলে সাজাইয়া লইয়া প্রত্যেক দল হইতে সাধারণ উৎপাদক নির্ণয় করিতে হয়। তাহার পর দেখা যায় যে দলগুলির আবার সাধারণ উৎপাদক আছে। বন্ধনী সমেত সেই সাধারণ উৎপাদকটি বাহিরে আনিয়া অবশিষ্ট উৎপাদকগুলি আর একটি বন্ধনীভুক্ত করিয়া উৎপাদক নির্ণয় করিতে হয়।

প্রশ্নমালা 5 B

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $ax+by+bx+ay=ax+bx+ay+by$

$$=x(a+b)+y(a+b)$$
$$=(a+b)(x+y).$$

2. $1+x+x^2+x^3=1+x^2+x+x^3$

$$=1(1+x^2)+x(1+x^2)=(1+x^2)(1+x).$$

3. $px-qy-rx+py-qx-ry$. 4. $ax-by+bx-ay$.

5. $x^2+xy+xz+yz$. 6. $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.

7. a^3-a^2+a-1. 8. $1+b+c+bc$.

9. $x^2-ax+bx-ab$. 10. $6p^2-9ap+4bp-6ab$.

11. $2ax+3by+2ay+3bz+2az+3bx$.

12. $mx-2my-nx+2ny$.

13. $6ax+6by+12az+4bx+9ay+8bz$.

14. $2x^4-x^3+4x-2$.

15. $2y^2+2yz+xy-3x^2z+xz-3x^2y$. 16. y^3-y^2+y-1.

17. $f^2x^2+g^2x^2-ag^2-af^2$.

18. $ax-bx+by+cy-cx-ay$. 19. $10(y+z)+yz+10^2$.

20. $(y-z)(1+x)+(x-y)(1+z)$.

21. $x^5+x^4y-x^4z+xy^4-y^4z+y^5$. 22. x^4+x^3+2x+2.

23. $(b-c)(p+aq)+(a-b)(p+cq)$.

24. $(a+b)(1-c)-(b+c)(1-a)$.

5·4 **পূর্ণবর্গে পরিণত করিয়া উৎপাদক নির্ণয় :** গুণের বিপরীত প্রক্রিয়া উৎপাদক নির্ণয়; সুতরাং রাশিকে পূর্ণবর্গরূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। নিম্নের সূত্রের সাহায্যে পূর্ণ বর্গ নির্ণয় করিতে হইবে।

$$a^2+2ab+b^2=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2 \quad \ldots \quad (1)$$

$$a^2-2ab+b^2=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \quad \ldots \quad (2)$$

রাশিটিকে উপরোক্ত আকারে সজ্জিত করিয়া পূর্ণ বর্গ করিলে উৎপাদক নির্ণয় করা হইবে।

প্রশ্নমালা 5C

[1 হইতে 13 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $4x^2+4xy+y^2=(2x)^2+2(2x)(y)+(y)^2$

$$=(2x+y)^2.$$

2. $a^2-2+\frac{1}{a^2}=(a)^2-2(a).\left(\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{a}\right)^2 \quad \left[\because a.\frac{1}{a}=1\right]$

$$=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2.$$

3. $4(a+b)^2-4(a+b)(a-b)+(a-b)^2$

$$=\{2(a+b)\}^2-2\{2(a+b)\}(a-b)+(a-b)^2$$

$$=\{2(a+b)-(a-b)\}^2=(2a+2b-a+b)^2=(a+3b)^2.$$

4. a^2+2a+1. 5. a^2-2a+1. 6. $4a^2-4a+1$.

7. $9x^2-12x+4$. 8. $4a^2-20a+25$. 9. $16x^2+24x+9$.

10. $9(4a+5)^2-12(4a+5)(2a+3)+4(2a+3)^2$.

11. $(a-b)^2x^4-8(a^2-b^2)x^2y^2+16(a+b)^2y^4$. [M. U. 1906]

12. $(x+y+z)^2+2(x+y+z)(x-y-z)+(x-y-z)^2$.

13. $x^2+4xy+4y^2$. 14. $64x^2-112xy+49y^2$.

15. $25a^2+60ad+36d^2$. 16. $121a^2+220ab+100b^2$.

17. $144p^2-240pq+100q^2$ 18 $75x^2-180xy+108y^2$.

19. $a^2(am+n)^2+2ap(am+n)(bm-n)+p^2(bm-n)^2$.

20. $(x+y+z)^2-6(x+y+z)+9$.

21. $x=b+c$, $y=c-a$, এবং $z=a-b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx=4b^2$. [C. U. 1888]

22 উৎপাদক নির্ণয়ে ডান দিকের শুদ্ধ উত্তরটির পার্শ্বে ✓ (টিক্) চিহ্ন দাও।
$4x^2-20xy+25y^2=(5x+2y)^2/=(2y+2x)^2/=(2x-5y)^2$.

5 5. **দুইটি বর্গের অন্তরের উৎপাদক নির্ণয় :** তৃতীয় সূত্র হইতে আমরা দেখিতে পাই যে দুইটি বর্গের অন্তরূপে প্রকাশিত রাশিতে উহাদের যোগফল ও বিয়োগফলরূপে দুইটি উৎপাদক পাওয়া যায়।

অর্থাৎ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

সুতরাং রাশিটিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া সহজেই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

প্রশ্নমালা 5D

[1 হইতে 14 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $9x^2-4y^2=(3x)^2-(2y)^2=(3x+2y)(3x-2y)$.

2. $9(a+b)^2-4(a-b)^2$.

$9(a+b)^2-4(a-b)^2=\{3(a+b)\}^2-\{2(a-b)\}^2$
$=\{3(a+b)+2(a-b)\}\{3(a+b)-2(a-b)\}$
$=(3a+3b+2a-2b)(3a+3b-2a+2b)=(5a+b)(a+5b)$.

3. $16a^4-81b^4=(4a^2)^2-(9b^2)^2=(4a^2+9b^2)(4a^2-9b^2)$

$=(4a^2+9b^2)\{(2a)^2-(3b)^2\}=(4a^2+9b^2)(2a+3b)(2a-3b).$

4. $2x-32x^5.$ [Pat. U. 1947]

$2x-32x^5=2x(1-16x^4)=2x\{(1)^2-(4x^2)^2\}$

$=2x(1+4x^2)(1-4x^2)=2x(1+4x^2)\{(1)^2-(2x)^2\}$

$=2x(1+4x^2)(1+2x)(1-2x).$

5. $4a^2-9.$ 6. $25-16x^2.$ 7. $9a^2b^2-c^2.$

8. $a^3b-ab^3.$ 9. $49a^6-16x^4.$ 10. $16a^5b-ab^5.$

11. $81-a^4.$ [C. U. 1928] 12. $25a^2x^2-4y^2.$ [B. U. 1862]

13. $x^2-y^2+2x+1.$ [W.B.S.F. '54] 14. $x^4-16x^2y^2+36y^4.$

15. $a^2-b^2+4bc-4c^2.$ [W. B. S. F. '53]

16. $a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c.$

17. $a^2-b^2-c^2+d^2-2(ad-bc).$

18. $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy.$

19. $16x^4-81y^4.$ [C. U. 1921] 20. $x^8-16a^8.$

21. $x^{16}-a^{16}.$ 22. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$

23. (i) $a^2+b^2-c^2-2ab.$ [C. U. 1942]

(ii) $2ab-a^2+c^2-b^2.$ [C. U. 1939]

24. $a^2-4b^2-c^2+9d^2+2(3ad-2bc).$

25. $(a+b-3c)^2-a-b+3c.$ [A. U. 1894]

26. $(1-c^2)(1+a)^2-(1-a^2)(1+c)^2.$

5·6. **দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় :** অনেক সময় রাশিগুলিকে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া লইতে হয়। দেখিতে হইবে যে পূর্ণ বর্গ করিবার জন্য যদি কোন পদের প্রয়োজন হয় তাহা হইলে সেই পদটি একবার যোগ করিয়া আবার বিয়োগ করিয়া লইতে হয়। ইহাতে রাশিটির মানের কোনও হ্রাসবৃদ্ধি হয় না, অথচ উৎপাদক বিশ্লেষণ সহজতর হইয়া যায়।

প্রশ্নমালা 5E

[1 হইতে 15 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $a^4+a^2b^2+b^4=a^4+a^2b^2+a^2b^2-a^2b^2+b^4$. [C. U. 1938]

$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$.

$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$

$\therefore\ \boldsymbol{a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}$.

(ইহা একটি অতি প্রয়োজনীয় সূত্র)

2. $x^4+64=(x^2)^2+2(x^2)(8)+(8)^2-2(x^2)(8)$ [C. U. 1903]

$=(x^2+8)^2-(4x)^2=(x^2+8+4x)(x^2+8-4x)$

$=(\boldsymbol{x^2+4x+8})(\boldsymbol{x^2-4x+8})$.

3. a^4+a^2+1. [C. U. 1920, '24]
4. x^8+x^4+1.
5. a^4+3a^2+4.
6. $x^4+x^2y^2+y^4$. [G. U. 1953]
7. $4x^4+1$.
8. a^4+4b^4. [C. U. 1922]
9. $9x^4+36$.
10. x^4+4. [C. U. 1934]
11. $m^4+n^4-7m^2n^2$.
12. $4x^4+81$. [C. U. 1937]
13. x^4+4y^4. [W.B.S.F. '1957,'67]
14. $81a^4+64b^4$.
15. $4a^4+625b^4$. [B. U. '02]
16. $a^8+a^4x^4+x^8$. [C. U. 1887]
17. $a^2+2ab-2bc-c^2$. [b^2 যোগ ও বিয়োগ কর]
18. $4x^2-4xy-2yz-z^2$. [y^2 যোগ ও বিয়োগ কর।] [C.U. 1935]
19. $16x^2-16xy-4yz-z^2$.
20. $25a^2-16c^2+10ab+8bc$.
21. $24bc+25a^2-16b^2-9c^2$.
22. $81x^8-7x^4y^4+y^8$. [M. U. 1929]
23. $x^2+4xy-12yz-9z^2$.
24. x^4-32x^2+4. [Pat. U. 1934]
25. $a^4-7a^2+9-4b^2+4ab$.
26. $x^2-4a-3-a^2+2x$.
27. $x^2-10x-y^2-4y+21$.
28. $(a^2-6b)-(4b^2+3a)$.
29. $3x^4+6x^2+27$.
30. $16x^4-20x^2+4$.
31. $9x^4+8x^2y^2+4y^4$.
32. $4x^2-4xy-2yz-z^2$.
33. $2(ab-cd)+a^2-c^2+b^2-d^2$.
34. x^8+64y^8.

35. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$

$=4b^2c^2-(a^4+b^4+c^4+2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2)$

$=(2bc)^2-(a^2-b^2-c^2)^2$

$=(2bc+a^2-b^2-c^2)(2bc-a^2+b^2+c^2)$

$=\{a^2-(b-c)^2\}\{(b+c)^2-a^2\}$

$=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(b+c-a).$

5·7. চতুর্থ ও পঞ্চম সূত্রের স্থায় রাশিমালা সজ্জিত থাকিলে উৎপাদক নির্ণয় সহজ হইয়া থাকে। যেমন,

$$\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)=(a+b)^3} \ldots\text{(i)}$$

$$\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)=(a-b)^3} \ldots\text{(ii)}$$

(i) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$=(a^3+a^2b)+(2a^2b+2ab^2)+(ab^2+b^3)$

$=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)$

$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=(a+b)(a+b)^2=(a+b)^3.$

(ii) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$=(a^3-a^2b)-(2a^2b-2ab^2)+(ab^2-b^3)$

$=a^2(a-b)-2ab(a-b)+b^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=(a-b)(a-b)^2=(a-b)^3.$

প্রশ্নমালা 5 F

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$

$=(a)^3+3(a)^2(2b)+3(a)(2b)^2+(2b)^3=(a+2b)^3.$

2. $x^3+12x^2+48x+64.$ 3. $x^3+18x^2+108x+216.$

4. $1-9x+27x^2-27x^3.$

$=(1)^3-3(1)^2(3x)+3(1)(3x)^2-(3x)^3=(1-3x)^3.$

5. $1-24a+192a^2-512a^3.$ 6. $8x^3y^3-12x^2y^2c+6xyc^2-c^3.$

7. $(a-x)^3-(b-x)^3-3(a-x)(b-x)(a-b)$

$\because$ $(a-x)-(b-x)=a-x-b+x=a-b$

$\therefore$ $(a-x)^3-(b-x)^3-3(a-x)(b-x)(a-b)$

$=(a-x)^3-(b-x)^3-3(a-x)(b-x)\{(a-x)-(b-x)\}$

$=\{(a-x)-(b-x)\}^3=(a-b)^3.$

8. $(a-2b)^3+(2a-b)^3+9(a-b)(a-2b)(2a-b)$.

9. $1+9a+27a^2+27a^3$. 10. $64a^3-144a^2+108a-27$.

11. $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$.

12. $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$.

13. $27(a+b)^3-54b(a+b)^2+36b^2(a+b)-8b^3$.

14. $(a+b+c)^3+6(a+c)\{(a+c)^2-b^2\}+(a-b+c)^3$.

15. $64(x+y)^3+125z^3+60(x+y)\{z(4x+4y+5z)\}$.

5·8. দুইটি ঘন রাশির সমষ্টি বা অন্তরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ : সূত্র 6 ও 7 আকারে রাশিগুলি সজ্জিত থাকিলে ঐ সূত্র দুইটি অনুসারে সহজেই উহাদের উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়।

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \quad \ldots \quad \text{(i)}$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

প্রশ্নমালা 5 G

[1 হইতে 16 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $27a^3+8b^3=(3a)^3+(2b)^3$

$$=(3a+2b)\{(3a)^2-(3a)(2b)+(2b)^2\}$$
$$=(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2).$$

2. x^3+1. [C. U. '10] 3. x^3+64y^3. [C. U. '23]

4. a^3-8b^3. [C. U. '31] 5. $a^3x^3+b^3y^3$.

6. x^6-729y^6 [B. U. 1913, Pat. U. 1947]

$x^6-729y^6=(x^2)^3-(9y^2)^3$

$=(x^2-9y^2)\{(x^2)^2+(x^2)(9y^2)+(9y^2)^2\}$

$=\{(x^2)-(3y)^2\}\{(x^2)^2+2(x^2)(9y^2)+(9y^2)^2-(x^2)(9y^2)\}$

$=(x+3y)(x-3y)\{(x^2+9y^2)^2-(3xy)^2\}$

$=(x+3y)(x-3y)(x^2+9y^2+3xy)(x^2+9y^2-3xy)$

$=(x+3y)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$.

7. a^6-729. 8. x^9+y^9.

9. $x^{12}-y^{12}$. [C. U. '59] 10. $343x^3+512y^3$. [C. U. '32]

11. x^3-27. [C. U. 1929] ✓12. a^6-27

13. $125a^5b^2-27a^2b^5$. 14. $64x^6+b^6$. 15. $a^3+\frac{1}{27}$.

16. $a^6+\dfrac{b^6}{27}$ কে $a^2+ab+\dfrac{b^2}{3}$ দ্বারা ভাগ কর। [C. U. 1930]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

17. $x^3-(y-z)^3$. 18. $(2a+3)^3-(a+2)^3$.

19. $64(a^2+ab)^3+(a^2-ab)^3$. 20. $(x-y+z)^3+(x+y-z)^3$.

21. $63x^3+6x^2-12x+8=64x^3-x^3+6x^2-12x+8$.

$=64x^3-(x^3-6x^2+12x-8)$ ইত্যাদি।

22 $a^3+6a^2+12a+9$. 23. $2a^3-3a^2+3a-1$.

24 $a^3b^3+x(ab-xy)-x^3y^3$. 25. $343x^3-64y^3$.

26. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=(a+b+c)^3-c^3-(a^3+b^3)$

$=(a+b+c-c)\{(a+b+c)^2+c(a+b+c)+c^2\}$
$-(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca+ca+bc+c^2+c^2)$
$-(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=(a+b)(a^2+b^2+3c^2+2ab+3bc+3ca-a^2+ab-b^2)$

$=(a+b)(3c^2+3ab+3bc+3ca)=(a+b).3.(c^2+ab+bc+ca)$

$=3(a+b)\{c(c+a)+b(c+a)\}=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

27. $x^3+y^3-x(x^2-y^2)+(x+y)^2$. 28. $(a+b)^3-(a-b)^3$.

29. $27a^3-6a^2b-4ab^2+8b^3$. 30. $a^3-b^3-m(a-b)$.

59. x^2+px+q আকারের x অক্ষরের দ্বিমাত্রিক রাশির উৎপাদক নির্ণয় :

(1) লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে রাশিটির তিনটি পদ। প্রথমটিতে x^2 এবং উহার সহগ 1 (এক), দ্বিতীয় বা মধ্যেরটি x এবং উহার একটি সহগ থাকিবে, এখানে $+p$; এবং তৃতীয় পদটি এখানে $+q$; উহা x-বর্জিত পদ।

$x^2+(a+b)x+ab$ রাশিটিও x অক্ষরের দ্বিমাত্রিক রাশি। ইহা x^2+px+q রাশির অনুরূপ। এখানে $p=a+b$ এবং $q=ab$.

$$x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab$$
$$=x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b).$$

তাহা হইলে $x^2+(a+b)x+ab$ রাশিটির উৎপাদক নির্ণয় করা যায় এবং উহা $(x+a)$ এবং $(x+b)$. অতএব x^2+px+qকেও উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে

হইলে $+p=a+b$ এবং $q=ab$ হইতে হইবে। সুতরাং x এর সহগ $+p$কে এমন দুইটি পদে বিভক্ত করিতে হইবে যাহাতে ঐ পদ দুইটির বীজগণিতিক যোগফল অর্থাৎ যোগ বা বিয়োগফল $+p$ হয়; এবং উহাদের গুণফল x বর্জিত পদ $+q$র সমান হয়। রাশিটির মধ্যপদকে ভাঙ্গা হয় বলিয়া ইহাকে মধ্যপদী উৎপাদক বা middle term factor'ও বলে।

(2) x^2+px+q রাশিটিকে বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়াও উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। প্রথম পদের বর্গমূল, এখানে x, বাহির করিয়া দ্বিতীয় পদে ঐ বর্গমূলের দ্বিগুণ অর্থাৎ $2x$ রাখিতে হয় এবং $2x$ দ্বারা রাশিটির দ্বিতীয় পদকে ভাগ করিয়া ভাগফলটি $2x$র সহিত গুণ করিতে হয়। তাহার পর ভাগফলটির বর্গ একবার যোগ ও একবার বিয়োগ করিয়া বসাইতে হয়। তাহা হইলে প্রথম তিনটি পদ পূর্ণ বর্গ হইবে। শেষের দুইটি পদের বীজগণিতিক যোগফলেরও পূর্ণ বর্গ হইবে এবং উহাদের মধ্যে – চিহ্ন থাকিবে। তাহা হইলে বর্গের অন্তর সূত্রানুসারে উহাদের উৎপাদক নির্ণয় করা সহজ হয়।

প্রশ্নমালা 5H

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর:

1. x^2+6x+8.

প্রথম প্রণালী: এখানে x-বর্জিত পদ 8 এর উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইবে। এখন $8=8\times1=4\times2$; এই দুই জোড়ায় কোন্ জোড়াটির বীজগণিতিক যোগফল অর্থাৎ যোগ ও বিয়োগ করিলে xএর সহগ $+6$ এর সমান হয় তাহা দেখিতে হইবে। এখানে দেখা যায় $(+4)+(+2)=+6$ হয়, অতএব দ্বিতীয় পদ $(6x)$কে $+4x+2x$ এইরূপে লিখিয়া মোট চারিটি পদ হইবে। ইহাদের প্রথম দুইটি ও শেষের দুইটি হইতে সাধারণ উৎপাদক বাহির করিয়া দেখিতে হইবে যে, বন্ধনীর মধ্যের রাশিটি যেন সমান হয়। এই বন্ধনীভুক্ত রাশিটি সাধারণ উৎপাদক হিসাবে বাহির করিয়া লইলেই উৎপাদক নির্ণয় করা হইবে।

অর্থাৎ $x^2+6x+8=x^2+4x+2x+8$

$=x(x+4)+2(x+4)=(x+4)(x+2)$.

দ্বিতীয় প্রণালী : x^2+6x+8

$$=(x)^2+2x.\frac{6x}{2x}+\left(\frac{6x}{2x}\right)^2-\left(\frac{6x}{2x}\right)^2+8$$

$$=(x)^2+2x.3+(3)^2-(3)^2+8.$$

$$=(x+3)^2-9+8=(x+3)^2-1=(x+3)^2-(1)^2$$

$$=(x+3+1)(x+3-1)=(x+4)(x+2).$$

2. (১ম) $x^2-7x-8=x^2-8x+x-8$ [$\because$ $-8+1=-7$ এবং
$=x(x-8)+1(x-8)=(x-8)(x+1)$. $(-8)\times(+1)=-8$]

(২য়) x^2-7x-8

$$=x^2-2x.\tfrac{7}{2}+(\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{7}{2})^2-8=(x-\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{49}{4}-8$$

$$=(x-\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{81}{4}=(x-\tfrac{7}{2})^2-(\tfrac{9}{2})^2$$

$$=(x-\tfrac{7}{2}+\tfrac{9}{2})(x-\tfrac{7}{2}-\tfrac{9}{2})=(x+\tfrac{2}{2})(x-\tfrac{16}{2})=(x+1)(x-8).$$

3. x^2-x-6. [C. U. 1924]

(১ম) x বর্জিত পদ -6 কে উৎপাদকে ভাঙিতে হইবে। $6=6\times1=3\times2$। (এখন $6+1=7$, $6-1=5$, $3+2=5$, $3-2=1$; তাহা হইলে $3-2=1$ হইতেছে।) এখানে মধ্যপদ x-এর সহগ -1 ; তাহা হইলে $-x$কে $-3x+2x$ এইরূপ লিখিতে হইবে।

সুতরাং $x^2-x-6=x^2-3x+2x-6=x(x-3)+2(x-3)$
$=(x-3)(x+2)$.

(২য়) $x^2-x-6=x^2-2x.\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{1}{2})^2-6=(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}-6$

$$=(x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{25}{4}=(x-\tfrac{1}{2})^2-(\tfrac{5}{2})^2$$

$$=(x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2})(x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{2})=(x+2)(x-3).$$

4. x^2+5x+6. 5. x^2+6x+5. 6. $x^2-14x+45$.
7. $a^2-19a+84$. 8. p^2+p-30. 9. $x^2-4x-45$.
10. $a^2-15a+56$. 11. $x^2+6x-160$. 12. $x^2-6x-91$.
13. $8x-3-4x^2$. 14. $x^2+2x-143$. 15. $x^2+\tfrac{1}{4}x-\tfrac{3}{8}$.
16. $x^2-12x+20$. 17. x^2+x-42. 18. x^2+x-20.
19. x^4+11x^2-180. 20. a^4-7a^2-18. 21. $12+x-20x^2$.
22. x^2-x-12. 23. $9+9x-4x^2$. [W. B. S. F. 1964].
24. $17x-7x^2-6$. [S. F. 1959]. 25. $5-4x-x^2$.

প্রশ্নমালা 5 I

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. $(a+b)^2-10(a+b)+21$. $a+b=x$ ধরিলে, প্রদত্ত রাশিমালা
$=x^2-10x+21=x^2-7x-3x+21=x(x-7)-3(x-7)$
$=(x-7)(x-3)=(a+b-7)(a+b-3)$. [xএর মান বসাইলে]

2. $a^2+16ax+60x^2=a^2+10ax+6ax+60x^2$
$=a(a+10x)+6x(a+10x)=(a+10x)(a+6x)$

3. $m^2-13mn+40n^2$.
4. $x^2-5ax-66a^2$. [C.U. 1881]
5. $x^2-22xy+105y^2$.
6. $x^2+49xy+600y^2$.
7. x^4+162x^2+6561.
8. $a^2-20abx+75b^2x^2$.
9. $a^2+12abx-28b^2x^2$.
10. x^4+4x^2-12. [C. U. 1944]

11. $(a-b)^2-7(a-b)(x-y)+12(x-y)^2$.
$a-b=m$ ও $x-y=n$ ধরিলে প্রদত্ত রাশিমালা
$=m^2-7mn+12n^2=m^2-4mn-3mn+12n^2$
$=m(m-4n)-3n(m-4n)$
$=(m-4n)(m-3n)$, এখন m ও nর মান বসাইতে হইবে।

12. $(3x+5y)^2-3(3x+5y)(x+3y)+2(x+3y)^2$
13. $(a+b)^2-10(a^2-b^2)-56(a-b)^2$. [B. U. 1954]
14. $p^2-22pq+40q^2$
15. $x^2-2xy-80y^2$.
16. $a^2-14ab-147b^2$.
17. $a^2-23ab+132b^2$.
18. $x^2+6ax-391a^2$.
19. $x^8+3x^4y^4-4y^8$.
20. $(4x-7y)^2-(4x-7y)(2x-y)-12(2x-y)^2$.
21. $x(x-n)-(m^2+5mn+6n^2)$

22. $x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1=x^2-ax-\frac{1}{a}x+a.\frac{1}{a}$ $\left[\because a\times\frac{1}{a}=1\right]$
$=x(x-a)-\frac{1}{a}(x-a)=(x-a)\left(x-\frac{1}{a}\right)$. [W. B. S. F. '67]

23. $x^2+2x-(a+1)(a+3)$. $[(a+3)-(a+1)=2]$. [Comp. Ex. '58]
24. $(b+c)^2-6a(b+c)+5a^2$. [W.B.S.F. (Com.) '64]
25. $x^2+2ax+a^2-b^2$.
26. $3(2x^2-1)-7x$. [D.B. '31]
27. $(a+b)^2-5a-5b+6$.
28. $x^2-x-(a+2)(a+3)$.

5·10. px^2+qx+r আকারের রাশির উৎপাদক নির্ণয় : পূর্বের অনুচ্ছেদের (5·9) x^2+px+q রাশির সহিত তুলনা করিলে দেখা যায় যে এই রাশিমালার x^2 এর একটি সহগ আছে, অবশিষ্ট পদগুলি সমান। px^2+qx+r রাশিটিরও দুইটি প্রণালীতে উৎপাদক নির্ণয় করা যায়।

প্রথম প্রণালী : x^2 এর সহগ p এবং x-বর্জিত রাশিটির গুণফলকে এমন দুইটি সুবিধামত উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে যে, ঐ দুইটি উৎপাদকের বীজগণিতীয় যোগফল অর্থাৎ যোগ বা বিয়োগফল x-এর সহগ q-এর সমান হইবে। এইবার q-কে ঐ দুইটি উৎপাদকের যোগ বা বিয়োগ করিয়া ভাঙ্গিয়া রাশিমালাকে চারিটি পদে পরিণত করিতে হয় এবং দুইটি দুইটি করিয়া পদের সাধারণ উৎপাদক বাহির করিয়া রাখিবার পর দেখিতে পাওয়া যায় বন্ধনীর মধ্যে পদগুলি সমান। তখন বন্ধনীকে সাধারণ উৎপাদক হিসাবে বাহিরে রাখিয়া অবশিষ্ট অংশগুলি অপর একটি বন্ধনীর মধ্যে স্থাপন করিলে উৎপাদক নির্ণয় সম্পূর্ণ হয়।

যদি px^2+qx+r এর উৎপাদক $(ax+b)(cx+d)$ হয়, তাহা হইলে,

$$px^2+qx+r=(ax+b)(cx+d)$$
$$=acx^2+bcx+adx+bd$$
$$=acx^2+(bc+ad)x+bd.$$

তাহা হইলে $p=ac$, $q=bc+ad$ এবং $r=bd$. সুতরাং $p\times r=(ac)\times(bd)$ $=(bc)\times(ad)$. সুতরাং p ও r-এর গুণফলের এমন দুইটি উৎপাদক নির্ণয় করা হইয়াছে, এখানে bc ও ad, যাহাদের বীজগণিতীয় যোগফল অর্থাৎ $bc+ad$, x-এর সহগ q-র সমান।

দ্বিতীয় প্রণালী : বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ করিয়া উৎপাদক নির্ণয় করিতে পারা যায়। x^2-এর সহগের যদি বর্গমূল না বাহির হয় তাহা হইলে ঐ সহগটি সাধারণ উৎপাদক হিসাবে বন্ধনীর বাহিরে রাখিতে হইবে এবং বন্ধনীর মধ্যস্থ পদগুলি লইয়া পূর্বের অনুচ্ছেদে (5·9) বর্ণিত প্রণালীতে উৎপাদক নির্ণয় করিয়া সর্বশেষে বন্ধনীর বাহিরের সাধারণ উৎপাদক দিয়া সুবিধামত গুণ করিয়া রাখিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 5 J

[1 হইতে 16 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $2x^2-5x+2$. x^2-এর সহগ 2 এবং x-বর্জিত রাশিটি 2, উহাদের গুণফল 4.

4 এর উৎপাদক 4×1 ও 2×2 এই দুই জোড়া উৎপাদককে যোগ ও বিয়োগ করিলে $4+1=5$, $4-1=3$, $2+2=4$, $2-2=0$। দেখা যায় যে $4+1=5$ এই জোড়াটাই x-এর সহগের সমান।

সুতরাং, $2x^2-5x+2=2x^2-4x-x+2=2x(x-2)-1(x-2)$

$$=(2x-1)(x-2)$$

এবং দ্বিতীয় প্রণালী অনুযায়ী $2x^2-5x+2=2(x^2-\frac{5}{2}x+1)$

$$=2\{(x)^2-2x\tfrac{5}{4}+(\tfrac{5}{4})^2-(\tfrac{5}{4})^2+1\}=2\{(x-\tfrac{5}{4})^2-\tfrac{25}{16}+1)\}$$

$$=2\{(x-\tfrac{5}{4})^2-\tfrac{9}{16}\}=2\{(x-\tfrac{5}{4})^2-(\tfrac{3}{4})^2\}$$

$$=2(x-\tfrac{5}{4}+\tfrac{3}{4})(x-\tfrac{5}{4}-\tfrac{3}{4})=2(x-\tfrac{1}{2})(x-2)=(2x-1)(x-2)$$

2 $ax^2+(a^2+1)x+a$

(প্রথম) ∵ $a\times a=a^2$ এবং $a^2\times1$ এই দুইটি উৎপাদক যোগ করিলে a^2+1 হয় ;

সুতরাং, $ax^2+(a^2+1)x+a=ax^2+a^2x+x+a$

$$=ax(x+a)+1(x+a)=(x+a)(ax+1)$$

(দ্বিতীয়) $ax^2+(a^2+1)x+a=a\left(x^2+\frac{a^2+1}{a}x+1\right)$

$$=a\left[x^2+2x\frac{a^2+1}{2a}+\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2+1\right]$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\frac{a^4+2a^2+1-4a^2}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{a^2+1}{2a}+\frac{a^2-1}{2a}\right)\left(x+\frac{a^2+1}{2a}-\frac{a^2-1}{2a}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{2a^2}{2a}\right)\left(x+\frac{2}{2a}\right)=a(x+a)\left(x+\frac{1}{a}\right)=(x+a)(ax+1)$$

3. $3x^2-10x-8$. [B U 1882] 4. $2x^2+x-15$. [C.U 1952]

5. $6x^2+x-15$. [C. U. 1936] 6. $4x^2-35x+24$. [M.U. 1934]

7. $10x^2-23x-5$. [B.U. 1884] 8. $35x^2-x-12$. [B. U. 1935]

9. $4x^2-4x-3$. [C.U. 1931] 10. $12x^2+13x-14$.[P.U.1908]

11. $39x^2-7x-22$. [A.U. 1894] 12. $12x^2+65x+77$. [D.B.'34]

13. $6-5a+a^2$. [C.U. 1929] 14. $6-a-12a^2$. [C.U. 1930]

15. $6x^2-23xy+20y^2$. 16. $12x^4+x^2y^2-y^4$.

17. $6-7a+2a^2$. [C.U. 1929] 18. $15t^2-17t-4$.

19. $5(a+b)^2+22(a+b)+8$. [$a+b=x$ মনে কর]

20. $2(a+b)^2-3(a+b)+1$. 21. $2(x^2-x)^2-5(x^2-x)+2$.

22. $(a-1)x^2+a^2xy+(a+1)y^2$. 23. $ax^2+(ab+1)x+b$.

*24. $8a^6-7a^3-1$.

25. $4(x^2+2x+5)^2+17(x^2+2x+5)(x^2+6x)+4(x^2+6x)^2$.

*26. $4a^4-17a^2+4$. *27. (i) $4a^8-5a^4+1$. (ii) $4a^8-3a^4b^4-b^8$.

28. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$. [C.U. 1946] [এমন ভাবে দুইটি উৎপাদক লইতে হইবে যে উহাদের গুণফলে x-এর সহগ দুইটি সমান হয়।]

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-3$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3$

এখন $x^2+5x=a$ ধরিলে, প্রদত্ত রাশিমালা

$=(a+4)(a+6)-3=a^2+10a+24-3=a^2+10a+21$

$=a^2+7a+3a+21=a(a+7)+3(a+7)=(a+7)(a+3)$

$=(x^2+5x+7)(x^2+5x+3)$. [a এর মান বসাইয়া]

29. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$ [W. B. S. F. (Comp.) 1964]

30. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$. [C. U. 1941]

31. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$. [D. B. 1922]

*32. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)-120$. *33. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$.

*34. $x(x-1)(x-2)(x-3)-120$. *35. $(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)-24$.

6

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক
(গ. সা. গু.)
Highest Common Factor
(H. C. F.)

6·1. **উৎপাদক বা গুণনীয়ক** (Factors): কোন রাশিকে কয়েকটি রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যদি কোন ভাগশেষ না থাকে এবং ভাগফল যে কোন সংখ্যা হয়, তাহা হইলে ভাজকগুলিকে ভাজ্যের **গুণনীয়ক** বা **উৎপাদক** বলা হয়। যেমন, xy রাশিকে x দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল y এবং ভাগশেষ 0 হয়। সুতরাং x, xy-র গুণনীয়ক বা উৎপাদক।

6·2. **মৌলিক গুণনীয়ক** (Elementary Factor): কোন রাশির যে গুণনীয়কের অন্য কোনও গুণনীয়ক থাকে না তাহাকে **মৌলিক গুণনীয়ক** বলে। যেমন ab রাশিটির দুইটি গুণনীয়ক a এবং b, a-এর কিংবা bর আর অন্য কোনও গুণনীয়ক নাই, সুতরাং a এবং b উভয়ই abএর মৌলিক গুণনীয়ক।

6·3. **সাধারণ গুণনীয়ক** (Common Factor): যে রাশি একাধিক রাশির গুণনীয়ক তাহাকে **সাধারণ গুণনীয়ক** বলে। যেমন, abc, a^2bc, ab^2c, abc^2 এই রাশিগুলির a, b, c, ab, bc, ca, এবং abc সাধারণ গুণনীয়ক।

6·4. **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** (Highest Common Factor): দুই বা তাহার অধিক বীজগণিতীয় রাশির যে সব সাধারণ গুণনীয়ক থাকে তাহাদের মধ্যে যে সব গুণনীয়কের মাত্রা সর্বোচ্চ বা গরিষ্ঠ তাহাকে রাশিগুলির **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** বা সংক্ষেপে গ. সা. গু. (H. C. F.) বলে।

যেমন, $a^2b^2c^2$, $a^2b^4c^4$, $a^4b^2c^2$ এই রাশিগুলির a, b, c, ab, bc, ca, a^2b, b^2c, c^2a, ab^2, bc^2, ca^2, a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2, abc, a^2bc, ab^2c, abc^2, ab^2c^2, a^2bc^2, a^2b^2c এবং $a^2b^2c^2$ এতগুলি সাধারণ গুণনীয়কের মধ্যে সর্বোচ্চ মাত্রা বিশিষ্ট গুণনীয়ক $a^2b^2c^2$; সুতরাং $a^2b^2c^2$ উপরোক্ত রাশি তিনটির গ. সা. গু.।

6·5. **গ. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী:** দুইটি প্রণালী দ্বারা গ. সা. গু. নির্ণয় করা হয়—(i) উৎপাদক বা গুণনীয়কের সাহায্যে এবং (ii) ভাগ প্রণালীর সাহায্যে।

6·6. উৎপাদকের সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী: প্রদত্ত রাশিগুলির সংখ্যাত্মক সহগগুলির গ. সা. গু. পাটীগণিতের গ. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী অনুসারে নির্ণয় করিতে হইবে। প্রত্যেক রাশিটির সহগ ব্যতীত অবশিষ্ট অংশগুলির মৌলিক উৎপাদক নির্ণয় করিয়া যে **সর্বোচ্চ ঘাতের সাধারণ উৎপাদক বা উৎপাদকগুলি** উহাদের মধ্যে আছে তাহাদের গুণফল নির্ণয় করিতে হইবে। এই গুণফলের সহিত পূর্বের সংখ্যা সহগগুলির গ. সা. গু. গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যাইবে সেই গুণফলই রাশিগুলির নির্ণেয় গ. সা. গু.।

অতএব **রাশিগুলির গ. সা. গু.=সংখ্যাত্মক সহগগুলির গ. সা. গু. ×আক্ষরিক অংশগুলির গ. সা. গু.**

পূর্বের পরিচ্ছেদের উৎপাদক নির্ণয় প্রণালী অনুসারে রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হয়। কিন্তু বিশেষভাবে লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে রাশিগুলিকে **সম্পূর্ণরূপে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে** নচেৎ গ. সা. গু. নির্ণয়ে ভুল থাকিয়া যাইবে।

6·61. রাশিগুলির মধ্যে যেটিতে সর্বাপেক্ষা **কম** গুণনীয়ক থাকিবে সেইটি লইয়া তাহার প্রত্যেকটি গুণনীয়ক অপররাশির মধ্যে সাধারণ গুণনীয়ক হিসাবে আছে কিনা পরীক্ষা করিয়া দেখিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে অনেক শ্রমের লাঘব হইবে।

প্রশ্নমালা 6 A

[1 হইতে 15 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক বিশ্লেষণ করিয়া গ. সা. গু. নির্ণয় কর:

1. $10a^2bx^2y,\ 20a^2b^2x^2y^2,\ 40a^3b^3x^3y^3,\ 20a^3b^3x^2y^2.$

প্রথম পদ $=10a^2bx^2y=2'.5.'a'.a'.b'.\ x'.x'.y'.$

দ্বিতীয় পদ $=20a^2b^2x^2y^2=2'.2.5'.a'.a'.b'.b.x'.x'.y'.y.$

তৃতীয় পদ $=40a^3b^3x^3y^3=2'.2.2\,5'.a'.a'.a.b'.b.b.x'.x'.x.y'.y.y$

চতুর্থ পদ $=20a^3b^3x^2y^2=2'.2.5'.a'.a'.a.b'.b.b.x'.x.y'.y.$

প্রত্যেক রাশিকে মৌলিক রাশির গুণফলরূপে প্রকাশ করা হইয়াছে। এখন সাধারণ গুণনীয়কের মাথায় দাগ দিয়া রাশিগুলির সাধারণ গুণনীয়ক বাহির করা হইল। এই সব সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলির গুণফলই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

সাধারণ মৌলিক গুণনীয়কগুলি $2, 5, a, a, b, x, x, y$.

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2.5.a.a.b.x.x.y = 10a^2bx^2y$.

অন্যান্য প্রণালী : পরীক্ষা করিয়া দেখা যায় যে $10a^2bx^2y$ রাশিটি সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম মাত্রা বিশিষ্ট রাশি। এই রাশিটি লইয়া ইহার প্রতিটি মৌলিক উৎপাদক অন্য রাশিগুলির মধ্যে আছে কিনা পর্যবেক্ষণ করিতে হইবে। প্রথমে $10 = 2.5$। 2 সব রাশির মধ্যে আছে, 5 ও আছে। $a^2 = a.a$; a সব রাশিগুলির মধ্যে আছে, অপর aও আছে। এইরূপে দেখা যায় যে $2, 5, a, a, b, x, x, y$ এই সকল মৌলিক উৎপাদকগুলি সকল রাশিগুলির মধ্যে আছে। অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2 \times 5 \times a \times a \times b \times x \times x \times y = 10a^2bx^2y$.

2. $12p^2qr^4s^3, 18p^3q^2r^2s^2t^3, 30p^4q^3r^2t^2$.

3. x^2y, xy^2. 4. $2a^2b^3, 6a^3b^3c^2$.

5. $20x^2y^3a^2b^4, 15x^3y^2a^2b^3, 35x^2y^4a^2b^4$.

6. $4a^2b^3c^3d^4, 8a^2bd^3e, 24a^3b^2c^3d^2e$.

7. $100x^{12}y^{10}z^{12}, 300x^{10}y^{12}z^{10}, 400x^{12}y^8z^8$.

8. x^2-2x-3, x^3-2x^2-2x-3. [C.U. 1915]

প্রথম পদ : $x^2-2x-3 = x^2-3x+x-3$

$$= x(x-3)+1(x-3) = (x-3)(x+1).$$

দ্বিতীয় পদ : $x^3-2x^2-2x-3 = x^3-3x^2+x^2-2x-3$

$$= x^2(x-3)+(x-3)(x+1) = (x-3)(x^2+x+1)$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x-3$.

9. $x^2-y^2, x^4-y^4, x^6-y^6$.

10. $x^2-y^2, x-y, x^3-y^3$. 11. x^4-1, x^3-x^2+x-1.

12. $2x^2+9x+4, 2x^2-3x-2$. [C.U. 1925]

13. $3x^2-13x+12, x^2+2x-15$. [C.U. 1929]

14. $x^2-x-2, x^3+1, (x+1)^2$. [C.U. 1926]

15. $x^2-9, (x+3)^2, x^2+x-6$. [C.U. 1910]

16. $x(a+b), y(a+b)^2$. 17. $(a+b)(c+d)^2, (a+b)^2(c+d)$

18. $x^3+x^2+x+1, x^3+3x^2+3x+1$. [C.U. 1908]

19. x^4+6x^2+5, x^3-3x^2+x-3. [C.U. 1932]

20. $2b^2+ab-a^2$, $a^3-a^2b-4ab^2+4b^3$. [C.U. 1936]

21. $6x^2+xy-15y^2$, $21x^2+41xy+10y^2$. [C U. 1947]

22. x^2-3x+2, $3x^2-2x-8$, $2x^2-9x+10$. [D.B. 1948]

*23. x^4+2x^2+1, $x^6+x^4-x^2-1$, x^4-1. [C.U. 1869]

*24. $x^2+\frac{7}{6}x+\frac{1}{3}$, $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}$. [C U. 1879]

*25. x^2+x-6, x^3-4x^2+x+6. [W.B.S.F. 1956]

6·7. **বহুপদ রাশির গ.সা.গু. নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী :** যে সকল প্রদত্ত রাশিমালার সহজে উৎপাদক বিশ্লেষণ করা সম্ভব হয় না, পাটীগণিতের ন্যায় ভাগ ক্রিয়ার সাহায্যে তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করা হয়।

ইহাতে সর্বপ্রথম রাশিগুলি হইতে সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে উহা বাহির করিয়া লইতে হয়। অবশিষ্ট গুণনীয়কগুলির ভাগ কার্য করিয়া যে গ. সা. গু. পাওয়া যায় তাহার সহিত সাধারণ গুণনীয়কগুলির গ. সা. গু. করিয়া নির্ণেয় গ. সা. গু. পাওয়া যায়।

6 8. নিম্নে গ. সা. গু. নির্ণয়ের কয়েকটি নিয়ম দেওয়া হইল।

নিয়ম : (a) উভয় রাশিকে উহাদের ভিতরের কোনও সাধারণ অক্ষরের উর্ধ্বক্রম বা নিম্নক্রম ঘাতের মান অনুসারে সাজাইয়া লইতে হয়।

যেমন, $4x+3x^3+4+7x^2$ রাশিকে $3x^3+7x^2+4x+4$ এইরূপে

অথবা $4+4x+7x^2+3x^3$ এইরূপে সাজাইয়া লইতে হয়।

(b) রাশিগুলির মধ্য হইতে যদি একপদ সাধারণ গুণনীয়ক থাকে তাহা বাহির করিয়া পৃথক করিয়া রাখিতে হইবে। ঐ সাধারণ গুণনীয়কগুলি হইতে যদি গ. সা. গু. বাহির করা যায় তাহা হইলে ঐ গ. সা. গু. ভাগ কার্য দ্বারা লব্ধ গ. সা. গু.-র সহিত গুণ করিয়া নির্ণেয় গ. সা. গু. পাওয়া যায়। যেমন, প্রথম রাশি : $24x^4-2x^3-60x^2-32x$

$$=2x(12x^3-x^2-30x-16)$$

দ্বিতীয় রাশি : $18x^4-6x^3-39x^2-18x=3x(6x^3-2x^2-13x-6)$

এখানে একপদী সাধারণ গুণনীয়ক $2x$ ও $3x$; ইহাদের গ. সা. গু. x. বন্ধনী মধ্যস্থ পদগুলির ভাগকার্য দ্বারা যে গ. সা. গু. পাওয়া যাইবে (এখানে $3x+2$) তাহার সহিত x গুণ করিয়া নির্ণেয় গ. সা. গু. $x(3x+2)$ পাওয়া যাইবে।

(c) **রাশিগুলির মধ্যে উচ্চতম মানবিশিষ্ট রাশিকে অপর রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। উভয়ের মান সমান হইলে যেটির প্রথম পদের সহগ বৃহত্তর হইবে, সেই রাশিকে অপর রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইবে।**

(d) **যদি রাশিগুলির প্রথম পদের সহগগুলি একটি আর একটির বিভাজ্য না হয়, তাহা হইলে ঐ সহগগুলির ল.সা.গু বাহির করিয়া উহাকে ভাজ্যের প্রথম পদের সহগ দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল হইবে সেই ভাগফল দিয়া ভাজ্য রাশিকে গুণ করিতে হয়।**

যেমন $2x^2 - x - 1 \big) 3x^3 - 7x^2 + \quad 4$

$$\begin{array}{l} \times 2 \\ \hline 6x^3 - 14x^2 \quad + 8 \big(3x \\ \underline{6x^3 - 3x^2 - 3x} \\ \hline \text{ইত্যাদি} \end{array}$$

এখানে প্রথম পদের সহগ দুইটি 2 এবং 3, উহাদের ল. সা. গু.$=6$; 6কে 3 দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল 2 হয়। 2 দিয়া $3x^3-7x^2+4$কে গুণ করিয়া $6x^3-14x^2+8$ হইল। এই রাশিকে এখন ভাজক দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। এখানে লক্ষ্য করিতে হইবে যে $6x^3-14x^2+8$ কে ভাগ করিতে হইতেছে বলিয়া এই রাশির ডান পার্শ্বে ভাগের "(" চিহ্ন দিয়া তাহার ডান পার্শ্বে ভাগফলটি $3x$ লিখিতে হইবে। $3x^3-7x^2+4$ এর ডান দিকে লিখিতে নাই।

(e) **এই ভাগ কার্যে যদি কোনও ভাগশেষ থাকে তাহা হইলে ঐ ভাগশেষের কোনও একপদ সাধারণ উৎপাদক থাকিলে উহা পৃথক করিয়া লইতে হইবে।** এই সময় বিশেষ করিয়া লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে এই একপদ সাধারণ উৎপাদকটি রাশি দুইটির যেন কোন সাধারণ উৎপাদক না হয়।

(f) **ভাগশেষের দ্বারা কিংবা ভাগশেষের পৃথকীকৃত উৎপাদকের দ্বারা ভাজককে ভাগ করিতে হইবে। এইরূপে প্রত্যেক ভাগকার্যের অবশিষ্ট দিয়া ভাজককে ক্রমাগত ভাগ করিয়া যাইতে হইবে যতক্ষণ না অবশিষ্ট কিছুই না থাকে।**

(g) **যখন আর কোনও ভাগশেষ থাকে না, তখন সর্বশেষ ভাজকটির সহিত পূর্বের একপদ সাধারণ গুণনীয়ক হইতে যদি কোনও গ.সা.গু. পাওয়া যায়, তাহা গুণ করিয়া লইলে এই গুণফলই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।** যদি একপদ সাধারণ গুণনীয়ক না থাকে বা উহাদের গ. সা. গু. 1 হয় তখন শেষ ভাজকটিই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

(h) ভাগকার্য করিবার সময় প্রয়োজন হইলে যে কোনও অবস্থায় ভাজ্য বা ভাজকের যে কোনও একটিকে অপরটির গুণনীয়ক নহে, এইরূপ রাশি বা সংখ্যার দ্বারা গুণ বা ভাগ করিয়া লইতে হয়। ইহাতে গ. সা. গু.র কোনও পরিবর্তন হয় না। যাহাতে সহগগুলি ভগ্নাংশ-বর্জিত হইয়া পূর্ণসংখ্যা হয় সে দিকে সর্বদা লক্ষ্য রাখিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 6 B

[1 হইতে 13 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. x^3+x^2+x+1 এবং x^3+3x^2+3x+1. [C.U. 1928]

$$
\begin{array}{l}
x^3+x^2+x+1)\,x^3+3x^2+3x+1\,(1 \\
\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{x^3+\;x^2+\;x+1} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; \underline{2x)2x^2+2x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x+1)\,x^3+x^2+x+1\,(x^2+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\;\; \underline{x^3+x^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\; \underline{x+1}
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x+1$.

দুইটি রাশিই x এর নিম্নক্রম ঘাত অনুসারে সাজান আছে। দুইটিরই প্রথম পদ x^3, সুতরাং যে কোনও একটি দিয়া অপরটিকে ভাগ করা চলিবে। প্রথম ভাগশেষ $2x^2+2x$ এর ভিতর $2x$ সাধারণ উৎপাদক রহিয়াছে এবং এই রাশি দুইটির কোনটারই সাধারণ উৎপাদক নহে। সুতরাং উহা ভাগশেষ হইতে পৃথক করিয়া গুণনীয়কটি ভাজকরূপে ব্যবহার করা হইয়াছে এবং পূর্বের ভাজককে ভাজ্য লইয়া ভাগ করিয়া অবশিষ্ট কিছুই রহিল না। এখন শেষ ভাজকটি অর্থাৎ $x+1$ নির্ণেয় গ. সা. গু.। **ভাগফল x^2+1 কখনও গ. সা. গু. হইবে না।**

আরও একটি সহজ পদ্ধতিতে গ. সা. গু. নির্ণয় করা হয়। দুইটি রাশি পাশাপাশি রাখিয়া উহাদের মধ্যে এবং দুই পার্শ্বে দুইটি উল্লম্ব রেখা টানিয়া রাখিতে হয়। ভাগফলগুলি রেখার ডাইনে ও বামে রাখিতে হয়।

$$
\begin{array}{r|r|l|l}
x^2 & x^3+x^2+x+1 & x^3+3x^2+3x+1 & 1 \\
 & \underline{x^3+x^2\qquad\quad} & \underline{x^3+\;x^2+\;x+1} & \\
 & x+1 & 2x)2x^2+2x & \\
 & \underline{x+1} & \qquad \underline{x+1} &
\end{array}
$$

নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x+1$.

2. $4x^3-3x^2-24x-9$ এবং $8x^3-2x^2-53x-39$.

3. $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $2x^3-3x^2-17x-12$. [C. U. 1937]

$$\begin{array}{r|r|r|l}
3x & 3x^3-7x^2-18x-8 & 2x^3-3x^2-17x-12 & \\
 & 3x^3 \quad 9x^2-12x & 3 & \\ \hline
2 & 2x^2-6x-8 & 6x^3-9x^2-51x-36 & 2 \\
 & 2x^2-6x-8 & 6x^3-14x^2-36x-16 & \\ \hline
 & & 5)5x^2-15x-20 & \\
 & & x^2-3x-4 &
\end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x^2-3x-4$.

প্রথম উচ্চতর মান বিশিষ্ট পদ দুইটির সহগ 3 ও 2। ইহাদের গ. সা. গু. 6 ; 6কে 2 দিয়া ভাগ করিয়া ভাগফল 3 হইল। এই ভাগফল 3 দিয়া ভাজ্যকে গুণ করিয়া গুণফলকে ভাজ্যরূপে গণনা করিয়া ভাগ কার্য করা হইয়াছে। ভাগশেষ $5x^2-15x-20$-র একটি একপদ উৎপাদক 5 রহিয়াছে এবং এই 5 প্রদত্ত রাশি দুইটির উৎপাদক নহে। সুতরাং 5 উৎপাদকটি পরিত্যাগ করিয়া x^2-3x-4কে ভাজকরূপে ভাগ কার্য করা হইয়াছে।

4. $6x^2+xy-15y^2$ এবং $21x^2+41xy+10y^2$. [C. U. 1947]

6 এবং 21 এর ল. সা. গু. 42. এই 42 কে 21 দ্বারা ভাগ করিয়া 2 হইল। 2 দিয়া দ্বিতীয় রাশিকে গুণ করিয়া, গুণফলকে ভাজ্যরূপে ভাগকার্য করিতে হইবে।

$$\begin{array}{r|r|r|l}
2x & 6x^2+\quad xy-15y^2 & 21x^2+41xy+10y^2 & \\
 & 6x^2+10xy & 2 & \\ \hline
-3y & -9xy-15y^2 & 42x^2+82xy+20y^2 & 7 \\
 & -9xy-15y^2 & 42x^2+7xy-105y^2 & \\ \hline
 & & 25y)75xy+125y^2 & \\
 & & 3x+5y &
\end{array}$$

নির্ণেয় গ. সা. গু. $=3x+5y$.

5. $24x^4-2x^3-60x^2-32x$ এবং $18x^4-6x^3-39x^2-18x$.

এখানে দুইটি রাশির মধ্যে একপদী (monomial) গুণনীয়ক আছে। উহাদের প্রথমে পৃথক করিয়া অবশিষ্টাংশ লইয়া ভাগকার্য দ্বারা গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। $2x$ ও $3x$ এর গ. সা. গু x, ইহা সর্বশেষ ভাগলব্ধ গ. সা. গু. র সহিত গুণ করিলে নির্ণেয় গ. সা. গু. পাওয়া যাইবে।

১ম রাশি : $24x^4-2x^3-60x^2-32x=2x(12x^3-x^2-30x-16)$.

২য় রাশি : $18x^4-6x^3-39x^2-18x=3x(6x^3-2x^2-13x-6)$.

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
2x & 6x^3-2x^2-13x-6 & 12x^3-x^2-30x-16 & 2 \\
 & 6x^3-8x^2-8x & 12x^3-4x^2-26x-12 & \\
\hline
2 & 6x^2-5x-6 & 3x^2-4x-4 & x \\
 & 6x^2-8x-8 & 3x^2+2x & \\
\hline
 & 3x+2 & -6x-4 & -2 \\
 & & -6x-4 & \\
\hline
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x(3x+2)$.

6. $4x^3-8ax^2-20a^2x+24a^3$ এবং $6x^3+24ax^2+6a^2x-36a^3$.

7. $2b^2+ab-a^2$ এবং $a^3-a^2b-4ab^2+4b^3$. [C. U. 1936]

প্রথম রাশিটি bর নিম্নক্রমে এবং দ্বিতীয় রাশিটি aর নিম্নক্রমে সাজান আছে। সেইজন্য দ্বিতীয় রাশিটিও bর নিম্নক্রমে সাজাইয়া লইতে হইবে।

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
b & 2b^2+ab-a^2 & 4b^3-4ab^2-a^2b+a^3 & 2b \\
 & 2b^2-ab & 4b^3+2ab^2-2a^2b & \\
\hline
a & 2ab-a^2 & -6ab^2+a^2b+a^3 & -3a \\
 & 2ab-a^2 & -6ab^2-3a^2b+3a^3 & \\
\hline
 & & 2a^2)4a^2b-2a^3 & \\
 & & \quad 2b-a & \\
\end{array}
$$

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2b-a$

8. $3x^3+17x^2-62x+14$ এবং $7x^3+52x^2-46x+8$. [C. U. 1911]

9. x^2-2x-3 এবং x^3-2x^2-2x-3 [C. U. 1915]

10. $3x^2-11x-4$ এবং $6x^3-25x^2+3$. [C. U. 1916]

11. $2x^3+x^2-5x-3$ এবং $8x^3+6x^2-21x-18$. [C. U. 1913]

12. x^3-7x+6 এবং x^3-3x^2+4. [C. U. 1917]

13. x^2-7x+6 এবং x^3-4x^2+5x-2 [B. U. 1924]

14. $x^2+3x-10$ এবং $x^3-x^2-14x+24$. [W. B. S. F. 1955]

15. $x^2+9x+14$ এবং $x^3+10x^2+31x+30$. [W. B. S. F. 1953]

16. $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $2x^3-3x^2-17x-12$. [W. B. S. F. '62]

17. a^3-1 এবং a^5-1. [C. U. 1935, '46]

18. $x^3+8x^2+17x+10$ এবং $x^3+6x^2+11x+6$. [C. U. 1939, Supl.]

19. $2x^2-x-1$ এবং $3x^3-7x^2+4$. 20. a^7-1 এবং a^3-1.

6·9. দুইটি বিশেষ নিয়ম : সাধারণ উৎপাদকের বিষয়ে এই দুইটি নিয়ম মনে রাখিতে হইবে।

(*a*) যদি কোনও রাশির একটি উৎপাদক থাকে, তাহা হইলে ঐ রাশির যে কোনও গুণিতকেরও উহা উৎপাদক থাকিবে। যেমন 6-এর উৎপাদক 3 কিংবা 2 ; তাহা হইলে $6 \times 5 = 30$ এরও 3 কিংবা 2 উৎপাদক থাকিবে। তদ্রূপ A রাশির উৎপাদক F, তাহা হইলে mA কিংবা nA রাশিরও উৎপাদক F হইবে।

যদি $A = aF$ হয়, তাহা হইলে $mA = maF$

সুতরাং F, mA এর একটি উৎপাদক।

(*b*) যদি দুইটি রাশির একটি সাধারণ উৎপাদক থাকে, তবে রাশি দুইটির সমষ্টি ও অন্তর কিংবা রাশি দুইটির যে কোন গুণিতকের বা বিভিন্ন গুণিতকের সমষ্টি ও অন্তরের ঐ একই সাধারণ উৎপাদক থাকিবে। অর্থাৎ F যদি A ও B-র সাধারণ উৎপাদক হয়, তাহা হইলে F, $A \pm B$-র সাধারণ উৎপাদক হইবে; F, $mA \pm mB$ কিংবা $mA \pm nB$-রও সাধারণ উৎপাদক হইবে।

যদি $A = aF$ এবং $B = bF$ হয়।

তাহা হইলে $mA \pm nB = maF \pm nbF = F(ma \pm nb)$

সুতরাং F, $mA \pm nB$-র একটি উৎপাদক হইল।

অনেক ক্ষেত্রে উপরের অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে রাশি দুইটির সুবিধামত গুণিতকের যোগ বা বিয়োগ কার্য দ্বারা গ. সা. গু. নির্ণয় সহজসাধ্য হইয়া থাকে।

6. 10. তিন বা ততোধিক রাশির গ. সা. গু নির্ণয় প্রণালী : তিন বা ততোধিক রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। পরে এই গ. সা. গু.-টি ও তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিলে, এই শেষ গ. সা. গু. টি তিনটি রাশির গ. সা গু. হইবে। অর্থাৎ যদি H_1, A ও B-র গ. সা. গু. হয় এবং H_2, H_1, ও C-র গ. সা. গু. হয়, তাহা হইলে H_2 A, B ও C-র গ. সা. গু. হইবে।

কারণ A ও B-র সকল সাধারণ উৎপাদক H_1 এতে আছে ; এবং H_1 ও C-র সকল সাধারণ উৎপাদক H_2-তে আছে। তাহা হইলে A, B ও C-র সকল সাধারণ উৎপাদক H_2-তে থাকিবে।

প্রশ্নমালা 6 C

[1 হইতে 6 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $2x^3-3x^2-17x-12$.

যদি $A=3x^3-7x^2-18x-8$ এবং $B=2x^3-3x^2-17x-12$ হয়, তাহা হইলে $2A-3B=-5(x^2-3x-4)$; নির্ণেয় গ. সা. গু. B এবং 2A − 3B-র গ. সা. গু.-র সমান। যদি $C=x^2-3x-4$ হয়, তাহা হইলে $B-3C=2x^3-6x^2-8x=2x(x^2-3x-4)$. সুতরাং নির্ণেয় গ. সা. গু. C এবং B − 3C-র গ. সা. গু.-র সমান অর্থাৎ x^2-3x-4 এবং $2x(x^2-3x-4)$-র গ. সা. গু.-র সমান। অতএব নির্ণেয় গ. সা. গু. x^2-3x-4.

2. $3x^3-15x^2y-19xy^2+6y^3$ এবং $6x^3+3x^2y-5xy^2+y^3$.

3. $3x^4+20x^3-3x^2+6x+1$ এবং $x^4+7x^3-x^2-14x-2$.

4. $15x^3-4x^2-53x+30$ এবং $15x^3-x^2-31x-15$. [D. B. '23]

5. x^4-5x^2+4 এবং $x^5-11x+10$. [D. B. 1932]

*6. $2x^3-3x^2+1$, $3x^3-7x^2+4$ এবং x^3-2x^2-x+2.

7. $2x^5-11x^2-9$ এবং $4x^5+11x^4+81$. [D. B. 1936]

8. $3x^3-13x^2+23x-21$ এবং $6x^3+x^2-44x+21$.

[W. B. S. F. 1967]

9. $3x^3+11x^2+13x+5$ এবং $3x^3+12x^2+16x+7$

[W. B. C. S. 1957

*10. $2x^3-x^2-x-3$ এবং $x^5-x^3-4x^2-3x-2$.

*11. $2x^5-6x^4-4x^3+24x^2-16x$ এবং $2x^4-14x^2+12x$.

*12. x^4+6x^2+5 এবং x^3-3x^2+x-3. [W. B. S. F. '68].

7

লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক

(ল. সা. গু.)

Lowest Common Multiple

(L. C. M.)

7·1. **গুণিতক** (Multiple): কোনও একটি রাশি দ্বারা অপর একটি রাশিকে ভাগ করিলে, যদি কোনও ভাগশেষ না থাকে, অর্থাৎ নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে যাহাকে ভাগ করা হয় তাহাকে অপর রাশিটির **গুণিতক** বলে। যেমন, 35 সংখ্যাটি 5-এর একটি গুণিতক, কারণ 35, 5 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। $4a^2b^2$, a কিংবা bর গুণিতক, কারণ a কিংবা b দ্বারা $4a^2b^2$কে ভাগ করিলে কোনও ভাগশেষ থাকে না।

7·2. **সাধারণ গুণিতক** (Common Multiple): যদি কোন রাশি অপর কয়েকটি রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে প্রথম রাশিটিকে অপর কয়েকটি রাশির **সাধারণ গুণিতক** বলে। $x^2y^2z^2$ রাশিটি x বা y বা z প্রত্যেকটি দ্বারা সম্পূর্ণভাবে বিভাজ্য, সুতরাং $x^2y^2z^2$ রাশিটি x, y এবং z-এর সাধারণ গুণিতক। তদ্রূপ a^2-b^2 রাশিমালাটি $a+b$ কিংবা $a-b$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য, সুতরাং a^2-b^2 রাশিমালা $a+b$ এবং $a-b$ এর সাধারণ গুণিতক।

7·3. **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** (Lowest Common Multiple): দুইটি কিংবা দুই এর অধিক রাশিগুলির যে সকল অসংখ্য সাধারণ গুণিতক থাকে তাহাদের মধ্যে যেটি ক্ষুদ্রতম মাত্রা বিশিষ্ট সেই রাশিটিকে পূর্বোক্ত রাশিগুলির **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** বা সংক্ষেপে **ল. সা. গু.** (L. C. M.) বলে। যেমন, $5a^2b^2c^2$, $10a^3b^3c^3$ এই দুই রাশির $10a^3b^3c^3$ গুণিতক। $10a^3b^3c^3$ ব্যতীত অনেক রাশি আছে, তাহারাও পূর্বোক্ত রাশি দুইটির গুণিতক কিন্তু সেই সকল রাশিগুলির মধ্যে $10a^3b^3c^3$ সর্বনিম্ন মাত্রা বিশিষ্ট। সুতরাং ইহাই রাশি দুইটির নির্ণেয় ল.সা.গু.।

এখানে লক্ষ্য করিতে হইবে যে ল. সা. গু., গ. সা. গু. অপেক্ষা সাধারণতঃ বৃহৎ মাত্রা বিশিষ্ট রাশি হইয়া থাকে ; যদিও ল. সা. গু. রাশিটি লঘিষ্ঠ এবং গ. সা. গু. রাশিটি গরিষ্ঠ। ইহার কারণ এই যে প্রদত্ত রাশিগুলির যে সব অসংখ্য গুণিতক আছে তাহাদের মধ্যে যাহা সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র বা লঘিষ্ঠ মাত্রা বিশিষ্ট রাশি, যাহাকে

প্রদত্ত রাশিগুলি দ্বারা ভাগ করিলে অবশিষ্ট থাকে না তাহাই **ল. সা. গু.**। কিন্তু প্রদত্ত রাশিগুলির যতগুলি **গুণনীয়ক** আছে (ইহা নির্দিষ্ট, অসংখ্য নয়) তাহাদের মধ্যে যাহা সর্বাপেক্ষা **বৃহৎ** বা **গরিষ্ঠ** মাত্রা বিশিষ্ট রাশি, **যাহা দ্বারা প্রদত্ত রাশি-গুলিকে ভাগ করিলে** অবশিষ্ট থাকে না, তাহাই **গ. সা. গু.**। মনে রাখিতে হইবে যে ল. সা. গু.-র শেষ অক্ষরটি **গুণিতক** এবং গ. সা. গু-র শেষ অক্ষরটি **গুণনীয়ক**।

7·4. **ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী :** গ. সা. গু.-র ন্যায় ল. সা. গু. দুইটি প্রণালীতে নির্ণয় করা হয়—(i) উৎপাদক বা গুণনীয়কের সাহায্যে এবং (ii) গ. সা. গু.-র সাহায্যে।

7·5. **উৎপাদক সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়ের প্রণালী :** প্রদত্ত রাশিগুলির সংখ্যাত্মক সহগগুলির ল. সা. গু. পাটীগণিতের ল. সা. গু. নির্ণয় প্রণালী অনুসারে নির্ণয় করিতে হইবে। প্রত্যেক রাশির সহগ ব্যতীত অবশিষ্ট অংশগুলির মৌলিক উৎপাদক নির্ণয় করিয়া উহাদের প্রত্যেকটির যথাসম্ভব উচ্চতম ঘাতগুলির এবং সংখ্যাত্মক সহগগুলির ল. সা. গু.-র ক্রমিক গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

অতএব, **রাশিগুলির ল. সা. গু. = সংখ্যাত্মক সহগগুলির ল. সা. গু. × আক্ষরিক অংশগুলির ল. সা. গু.**।

রাশিগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিবার সময় বিশেষভাবে লক্ষ্য রাখিতে হইবে যে রাশিগুলি যেন **সম্পূর্ণরূপে উৎপাদকে বিশ্লেষণ হয়,** নচেৎ ল. সা. গু. নির্ণয়ে ভুল থাকিয়া যাইতে পারে।

7·51. রাশিগুলির মধ্যে যেটিতে সর্বাপেক্ষা অধিক গুণনীয়ক থাকিবে সেইটি লইয়া অপর রাশিগুলির গুণনীয়কগুলি দ্বারা বিভাজ্য কিনা দেখিতে হইবে। যদি প্রয়োজন হয় অপর রাশিগুলির দ্বারা বিভাজ্য হইলে যে সকল উৎপাদক অধিক আবশ্যক তাহা দ্বারা গুণ করিয়া লইতে হয়। ইহাতে শ্রমের অনেক লাঘব হয়।

প্রশ্নমালা 7 A

[1 হইতে 16 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $15a^2b^2x^2y^2$, $30abx^3y^3$, $45a^2bx^2y$, $60a^3b^3x^2y^2$.

প্রথম রাশি $=15a^2b^2x^2y^2=3.5.a.a.b.b.x.x.y.y.$

দ্বিতীয় রাশি $=30abx^3y^3 \quad =3.5.2.a.b.x.x.x.y.y.y.$

তৃতীয় রাশি $=45a^2bx^2y \quad =3.5.3.a.a.b.x.x.y.$

চতুর্থ রাশি $=60a^3b^3x^2y^2=3.5.2.2.a.a.a.b.b.b.x.x.y.y.$

প্রত্যেক রাশিকে মৌলিক রাশির গুণফল রূপে প্রকাশ করা হইয়াছে। রাশিগুলির মধ্যে 3, 5, 2, a, b, x, y, মৌলিক গুণনীয়ক আছে। ইহাদের মধ্যে যে যে উচ্চতম ঘাত রাশিগুলির মধ্যে আছে তাহারা 3^2, 5, 2^2, a^3, b^3, x^3, y^3

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 180a^3b^3x^3y^3$.

2. $10p^2q^3r^2s$, $12p^2q^3r^2$, $16q^2rs$, $20prs$.

দেখিতে পাওয়া যাইতেছে যে প্রথম রাশিটিতে অধিক সংখ্যক মৌলিক উৎপাদক আছে। কিন্তু সাংখ্য সহগগুলির পৃথক ল. সা. গু. করিয়া 240 হইল এবং p, q, r, s, এর বৃহত্তম মান $p^2q^3r^2s$.

অতএব নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 240p^2q^3r^2s$.

3. $12a^2b^3x^2y^3$, $16a^3b^2x^3y$. 4. $8abxy$, $16bcyz$, $8acxz$.

5. $1+a$, $1-a^2$, $1-2a+a^2$. [C. U. 1940]

প্রথম পদ $=(1+a)$

দ্বিতীয় পদ $=1-a^2=(1+a)(1-a)$

তৃতীয় পদ $=1-2a+a^2=(1-a)^2$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(1+a)(1-a)^2=1-a-a^2+a^3$

6. $2x^2+3x-2$, $2x^2+15x-8$, $x^2+10x+16$.

প্রথম পদ $=2x^2+3x-2=(2x-1)(x+2)$

দ্বিতীয় পদ $=2x^2+15x-8=(2x-1)(x+8)$

তৃতীয় পদ $=x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=(2x-1)(x+8)(x+2)$

$=2x^3+19x^2+22x-16$.

7. x^2-1, x^2+x. 8. a^2+ab, $ab+b^2$.

9. x^2-3x+2, x^2-1. 10. x^2+4x+4, x^2+5x+6.

11. $3x^2-x-14$, $3x^2-13x+14$, x^2-4.

12. $(a+b)^2$, a^3+b^3, $a^4+a^2b^2+b^4$.

13. x^2-x-6, x^2-4x+3. 14. $2x^2-3x-2$, $3x^2-10x+8$.

15. a^2-b^2, a^3-b^3, a^4-b^4. [C. U. 1915]

16. x^4-1, x^3-x^2-x+1, x^2+2x+1. [C. U. 1939]

17. $x^2-(a-c)x-ac$, $x^2-(a+c)x+ac$. [C. U. 1918]

18. $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$, $2x^2+3x-2$.

19. $a^2-3a+2, (a-1)^2, a^4-1$.

20. $x^2-3x+2, x^2-4x+3, x^2-5x+6$. [C. U. 1922]

21. $x^2(x^2-4), x^4+2x^3-8x^2$.

22. $x^2+7x+10, x^3-x^2-6x, x^4-15x^2+2x^3$. [W. B. S. F '68]

23. $a^2-b^2-c^2+2bc, (a+b-c)^2, a^2-b^2+c^2+2ac$. [C. U. 1940]

24. $x^2-1, x^2+1, (x-1)^2, (x+1)^2$. [C. U. 1885].

25. $x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x, x^4+x^3-6x^2$. [W. B. S. F. 1956]

26. a^3-1, a^4-1, a^4+a^2+1. [W. B. S. F. 1958]

27. $x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x, x^3-4x$. [W. B. S. F. 1962)

28. $6x^2-x-1, 3x^2+7x+2, 2x^2+3x-2$. [W. B. S. F. 1961]

29. $3x^2-15x+18, 2x^2+2x-24, 4x^2+36x+80$. [W. B. S. F. 1959]

30. $x^2+x-12, x^2+5x+4, x^3+4x^2-4x-16$. [W.B.S.F. 1957]

7·6. দুইটি রাশির গুণফল, রাশি দুইটির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

A ও B দুইটি রাশির গ. সা. গু. H এবং ল. সা. গু. L হইলে, রাশি দুইটি H দ্বারা বিভাজ্য। A ও B-কে H দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল যথাক্রমে a ও b হইবে, অর্থাৎ $A \div H = a$, সুতরাং $A = aH$ এবং $B \div H = b$, সুতরাং $B = bH$.

যেহেতু A ও B-র গ. সা. গু. H, সুতরাং a ও b-র কোনও সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে না। সুতরাং A. ও B-এর ল. সা. গু.

$$L = abH = aHb \times \frac{H}{H} = \frac{aH \times bH}{H} = \frac{A \times B}{H} = \frac{A}{H} \times B = \frac{B}{H} \times A$$

অতএব $L \times H = A \times B$. সুতরাং দুইটি রাশির গুণফল, তাহাদের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-র গুণফলের সমান।

7·7. গ.সা.গু.-র সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয়ঃ উপরের অনুচ্ছেদ হইতে জানা গেল $L = \frac{A}{H} \times B = \frac{B}{H} \times A$. সুতরাং,

নিয়ম : দুইটি রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। তারপর ঐ লব্ধ গ. সা. গু. দ্বারা দুইটি রাশির যে কোনও একটিকে ভাগ করিয়া যে ভাগফল পাওয়া যাইবে তাহা দ্বারা অপর রাশিটিকে গুণ করিলে, গুণফলটিই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

ভাগ দ্বারা গ. সা. গু. নির্ণয়ের সময় অনেক ক্ষেত্রে দেখা যায় ভাগকার্যে শেষ ভাগটিতে গ. সা. গু. দ্বারা একটি রাশিকে ভাগ করা হইয়াছে। সেই শেষ ভাগ-কার্যে কোনও অবশিষ্ট হইতে সাধারণ অন্তর পরিত্যাগ না করিয়া সাধারণভাবে ভাগ করিয়া ভাগফলটি লইয়া অপর রাশির সহিত গুণ করিলে ল. সা. গু. নির্ণয় সহজতর হয়। মনে রাখিতে হইবে যে গ. সা. গু. বাহির করিয়া নির্ণেয় গ. সা. গু. লিখিতে নাই, সাধারণভাবে রাশি দুইটির গ. সা. গু. লিখিতে হয়; ল. সা. গু.-র আগে নির্ণেয় ল. সা. গু লিখিতে হয়।

7·8. তিন বা তিনের অধিক রাশিমালার ল সা গু. নির্ণয় : তিনটি বা তাহার অধিক রাশিমালার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে সুবিধামত যে কোনও দুইটির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। এই লব্ধ ল. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে। এইরূপে সর্বশেষ রাশিটি পর্যন্ত ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া যাইতে হইবে। এই সর্বশেষ লব্ধ ল. সা. গু.-ই রাশিগুলির নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

প্রশ্নমালা 7B

[1 হইতে 5 পর্যন্ত ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ।]

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a^3+4a^2+8a+8,\ 2a^3+a^2+2a-12.$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
a & a^3+4a^2+8a+8 & 2a^3+a^2+2a-12 & 2 \\
 & a^3+2a^2+4a & 2a^3+8a^2+16a+16 & \\
\hline
2 & 2a^2+4a+8 & -7)\,-7a^2-14a-28 & \\
 & 2a^2+4a+8 & a^2+2a+4 & \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore$ রাশি দুইটির গ. সা গু. $=a^2+2a+4.$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{(a^3+4a^2+8a+8)(2a^3+a^2+2a-12)}{a^2+2a+4}$

$=(a+2)(2a^3+a^2+2a-12)=2a^4+5a^3+4a^2-8a-24.$

2. $4x^3-10x^2-18x+45,\ 6x^3+8x^2-27x-36.$

$$
\begin{array}{r|rrr|rrrr|l}
2x & 4x^3 & -10x^2-18x & +45 & 6x^3+ & 8x^2 & -27x & -36 & 3\\
 & 4x^3 & -18x & & 2 & & & & \\
\hline
-5 & & -10x^2 & +45 & 12x^3 & +16x^2 & -54x & -72 & \\
 & & -10x^2 & +45 & 12x^3 & -30x^2 & -54x & +135 & \\
\hline
 & & & & & 23)46x^2 & & -207 & \\
\hline
 & & & & & 2x^2 & -9 & & \\
\end{array}
$$

$\therefore$ রাশি দুইটির গ. সা. গু. $=2x^2-9.$

সুতরাং নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{(4x^3-10x^2-18x+45)(6x^3+8x^2-27x-36)}{(2x^2-9)}$

$=(2x-5)(6x^3+8x^2-27x-36)$

$=12x^4-14x^3-94x^2+63x+180.$

3. $a^3-a-6,\ 2a^3+a^2-9.$

4. $4x^3-7x-3,\ 6x^3+11x^2+6x+1.$ [C. U. 1950]

5. $x^3-2x+1,\ x^3+2x^2-1.$ [B. U. 1930]

6. $x^3-16x+24,\ 2x^3-5x^2+4.$ [C. U. 1933]

7. $a^4+a^3+2a-4,\ a^3+3a^2-4.$

8. $3x^3+x^2-8x+4,\ 3x^3+7x^2-4.$

প্রশ্নমালা 7C

[1 হইতে 6 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

ল. সা. গু নির্ণয় কর :

1. $x^3-x^2-x-2,\ 3x^2-10x+8,\ 2x^2-3x-2.$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
3 & 3x^2-10x+8 & x^3-x^2-x-2 & \\
 & 3x^2+27x-66 & 3 & \\
\hline
 & -37)-37x+74 & 3x^3-3x^2-3x-6 & x\\
\hline
 & x-2 & 3x^3-10x^2+8x & \\
\hline
 & & 7x^2-11x-6 & 2\\
 & & 6x^2-20x+16 & \\
\hline
 & & x^2+9x-22 & x\\
 & & x^2-2x & \\
\hline
 & & 11x-22 & 11\\
 & & 11x-22 & \\
\hline
\end{array}
$$

$\therefore$ প্রথম রাশি দুইটির গ. সা. গু. $=x-2.$

$\therefore$ ঐ রাশি দুইটির ল. সা. গু. $=\dfrac{(x^3-x^2-x-2)(3x^2-10x+8)}{(x-2)}$

$=(x^2+x+1)(3x^2-10x+8)=3x^4-7x^3+x^2-2x+8.$

$$
\begin{array}{r|l|l}
2\;\; 2x^2-\;\;3x-2 & 3x^4-7x^3+x^2-2x+8 & \\
2x^2-36x+64 & 2 & \\
33)\,33x-66 & 6x^4-14x^3+2x^2-4x+16 & 3x^2 \\
x-2 & 6x^4-\;\;9x^3-6x^2 & \\
 & -5x^3+8x^2-4x+16 & \\
 & -2 & \\
 & 10x^3-16x^2+8x-32 & 5x \\
 & 10x^3-15x^2-10x & \\
 & -1)\,-x^2+18x-32 & \\
 & x^2-18x+32 & x \\
 & x^2-2x & \\
 & -16x+32 & -16 \\
 & -16x+32 &
\end{array}
$$

$\therefore$ $2x^2-3x-2$ ও $3x^4-7x^3+x^2-2x+8$-এর গ. সা. গু. $=x-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{(2x^2-3x-2)(3x^4-7x^3+x^2-2x+8)}{(x-2)}$

$=(2x+1)(3x^4-7x^3+x^2-2x+8)=6x^5-11x^4-5x^3-3x^2$
$+14x+8.$

2. যদি দুইটি রাশি x এবং y-এর গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l হয়, এবং যদি $h+l=x+y$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $h^3+l^3=x^3+y^3$. [P. U. 1925]

$\because$ রাশি দুইটির গুণফল = ল. সা. গু. × গ. সা. গু. $\quad\therefore\; xy=hl$

অতএব $h^3+l^3=(h+l)^3-3hl(h+l)$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)$ [$\because$ $xy=hl$ এবং $h+l=x+y$]

$=x^3+y^3$

সুতরাং $h^3+l^3=x^3+y^3$. অতএব প্রমাণিত হইল।

3. $6x^2-x-1,\ 3x^2+7x+2,\ 2x^2+3x-2.$ [C. U. 1926]

4. $x^3+3x-4,\ x^3+3x+4,\ x^4+7x^2+16.$ [B. U. 1892]

5. $a^2+5a+6,\ a^2+6a+8,\ a^3+4a^2+4a+3.$ [C. U. 1934]

6. $8x^3+27,\ 16x^4+36x^2+81,\ 6x^2-5x-6.$ [Pat. U. 1928]

7. $x^2-x-6, x^2+x-12, x^2+6x+8.$

8. $4x^2+8x-12, 9x^2-9x-54, 6x^4-30x^2+24.$ [D. B. 1939]

9. (a) $x^2-7x+12, 3x^2-6x-9, 2x^3-6x^2-8x.$ [C. U. 1930]

9. (b) $2x^2-x-6, 2x^2-7x-15, x^2-7x+10.$

[W. B. S. F. 1967]

10. দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. $x^2+4xy+3y^2$ এবং ল. সা. গু. $x^4+5xy^3+5x^2y^2-5xy^2-6y^4$; একটি রাশিমালা $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$, অপর রাশিমালা নির্ণয় কর।

11. দ্বিতীয় মানের দুইটি রাশিমালার গ. সা. গু. $x-1$ এবং উহাদের ল. সা. গু. x^3-7x+6. রাশিমালা দুইটি নির্ণয় কর। [D. B. 1927]

রাশি দুইটির গুণফল = ল. সা. গু. × গ. সা. গু.

$$=(x^3-7x+6)(x-1)=(x^3-x^2+x^2-x-6x+6)(x-1)$$
$$=\{x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1\}(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+x-6)(x-1)=(x-1)(x-2)(x+3)(x-1)$$

এখন রাশিমালাদ্বয়ের গ. সা. গু. $=x-1$ বলিয়া প্রত্যেক রাশিরই $x-1$ একটি উৎপাদক হইবে। ইহারা দ্বিতীয় মানের রাশি বলিয়া $(x-1)(x-2)$ অর্থাৎ x^2-3x+2 এবং $(x-1)(x+3)$ অর্থাৎ x^2+2x-3, এই দুইটি নির্ণেয় রাশি হইবে।

*12. দুইটি রাশিমালা $x^2+(a+b)x+ab$ এবং $x^2+(b+c)x+bc$ এর গ. সা. গু. $x+b$ হইলে প্রমাণ কর যে উহাদের ল. সা. গু.

$x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$ হইবে।

*13. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ এর গ. সা. গু. $x+a$ হইলে, দেখাও যে, $(p-p')a=q-q'$. [C. U. 1941]

8

দুরূহ উৎপাদক

(Harder Factors)

8·1. এই অধ্যায়ে দুরূহ রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয়ের বিভিন্ন প্রণালী আলোচিত হইবে।

প্রশ্নমালা 8 A

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. উৎপাদক নির্ণয় কর :—

$a^3+b^3+c^3-3abc.$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc.$

$[\because\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)]$

$=\{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b)-3abc.$

$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab\{(a+b)+c\}$

$[\because\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=(a+b+c).\frac{1}{2}\ 2.(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

2. যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয় তবে প্রমাণ কর যে $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$.

$\because\ a^3+b^3+c^3=3abc.\quad \therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=0$

বা, $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}=0.$ কিন্তু $\frac{1}{2}\neq0$

$\therefore$ হয় $a+b+c=0$, নতুবা $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=0.$

ধনরাশি বা ঋণরাশির বর্গ সর্বদা ধনরাশি হয়, কখনও ঋণরাশি হইতে পারে না।
$\therefore$ উপরের তিনটি বর্গের কোনটি ঋণরাশি নহে; অতএব উহাদের সমষ্টি কখনই শূন্য হইতে পারে না যদি না প্রত্যেকটি $=0$ হয়।

$\therefore\ (b-c)^2=0\ \ \therefore\ \ b-c=0\ \ \therefore\ \ b=c.$

তদ্রূপ $c-a=0\ \ \therefore\ \ c=a.$ অতএব $\boldsymbol{a=b=c}.$

3. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে $a^3+b^3+c^3=3abc.$

$\because\ a+b+c=0,\ \therefore\ a+b=-c.$ বা $(a+b)^3=(-c)^3$

বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$

বা, $a^3+b^3+c^3+3ab(-c)=0$ বা, $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

বা, $a^3+b^3+c^3=3abc.$ প্রমাণিত হইল।

4. $x^6-10x^3-27.$

$x^6-10x^3-27=x^6-x^3-27-9x^3.$

$=(x^2)^3+(-x)^3+(-3)^3-3(x^2)(-x)(-3)$

$=\{(x^2)+(-x)+(-3)\}\{(x^2)^2+(-x)^2+(-3)^2-(x^2)(-x)$
$-(-x)(-3)-(-3)(x^2)\}$

$=(x^2-x-3)(x^4+x^2+9+x^3-3x+3x^2)$

$=(x^2-x-3)(x^4+x^3+4x^2-3x+9).$

5. $a^3-b^3-c^3-3abc.$

6. $x^3+y^3+8z^3-6xyz.$

7. $p^3-8q^3-r^3-6pqr.$

8. $x^3+8y^3-6xy+1.$

9. $8a^3+b^3-27c^3+18abc.$

10. $27p^3-8q^3-64-72pq.$

11. $a^6+5a^3+8.$

12. $x^6-18x^3+125.$

13. $a^6+4a^3-1.$

14. $x^6+45x^3-8.$

15. $x^6+18x^3+1.$

16. $8m^6-17n^3+27.$

17. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ [C. U. 1929. '39]

মনে কর, $b-c=x,\ c-a=y,\ a-b=z.$ তাহা হইলে,

$x+y+z=b-c+c-a+a-b=0.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=x^3+y^3+z^3.$

$=3xyz.$ [$\because\ x+y+z=0,$ 3নং অঙ্ক দেখ]

$=3(b-c)(c-a)(a-b)$ [x, y, z এর মান বসাইয়া]

18. $x^3+(x-1)^3+(1-2x)^3$ [D. B. 1940)

19. $x^3(y-z)^3+y^3(z-x)^3+z^3(x-y)^3$.

20. $(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$ [I. P. S. '36)

সমাধান কর :—

21. $(x-2)^3+(x-1)^3+(x-3)^3=3(x-2)(x-1)(x-3)$

$\therefore$ $(x-2)^3+(x-1)^3+(x-3)^3-3(x-2)(x-1)(x-3)=0$

বা, $\frac{1}{2}(x-2+x-1+x-3)[\{(x-2)-(x-1)\}^2+\{(x-1)-(x-3)\}^2$
$+\{(x-3)-(x-2)\}^2]=0$

বা, $\frac{1}{2}(3x-6)[1+4+1]=0$, বা, $\frac{1}{2}\cancel{6}.^3(3x-6)=0$

বা, $3(3x-6)=0$, বা, $3x-6=0$ [$\because$ $3\neq0$]

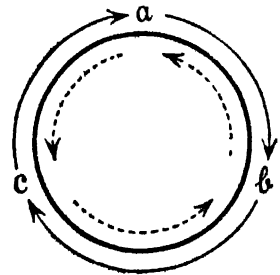
বা, $3x=6$ $\therefore$ $x=2$.

22. $(x-2)^3+(x-1)^3+(x+7)^3=3(x-2)(x-1)(x+7)$.

23. $(x-5)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-5)(x-2)(x-3)$.

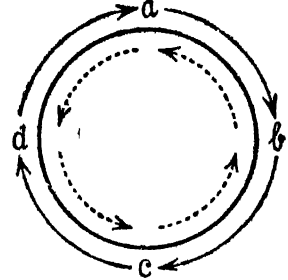
24. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x-a)(x-b)(x-c)$.

25. $a^9-6a^4+8a^3+1$.

8 2 **চক্র-ক্রম** (Cyclic Order) : পার্শ্বের চিত্রে a, b, c এই তিনটি অক্ষর একটি বৃত্তের পরিধির উপর সজ্জিত। যে কোনও অক্ষর হইতে আরম্ভ করিয়া তীর চিহ্নিত দিকে বৃত্তের পরিধি বরাবর পড়িয়া গেলে অক্ষরগুলি যে ক্রমে পাওয়া যায় তাহাকে **'চক্রক্রম অনুসারে সজ্জিত'** (Arranged in Cyclic Order) বলা হয়। ইহা ঘড়ির কাঁটার দিকে বা উহার বিপরীত দিকেও ঘুরিতে পারে। যেমন,

ab, bc, ca, $a\pm b, b\pm c, c\pm a$; $a+b-c, b+c-a, c+a-b$;
$a^2(b\pm c), b^2(c\pm a), c^2(a\pm b)$ ইত্যাদি।

অথবা, $b\pm a, a\pm c, c\pm b, ba, ac, cb$ ইত্যাদি।

তিনটির অধিক অক্ষর লইয়াও সাজান যায়। তখন ab, bc, cd, da, $a\pm b$, $b\pm c$, $c\pm d$, $d\pm a$ এবং বিপরীত দিকেও ঘুরিয়া চক্রক্রম অনুসারে সাজান যায়।

চক্রক্রমে সজ্জিত কোন রাশিমালার একটি পদ জানা থাকিলে উহার অবশিষ্ট পদগুলি সহজে লিখা যায়। যেমন, প্রথম পদ $a^3(b^2-c^2)$ হইলে দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ হইবে $b^3(c^2-a^2)$ এবং $c^3(a^2-b^2)$.

চক্রক্রমে সজ্জিত $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ আকারে লিখিত সকল রাশিমালাতে a, b, cর ঘাতগুলি যদি একই হয়, তাহা হইলে রাশিমালার মান শূন্য হইবে। যেমন,

$$a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)=0,$$
$$a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)=0,$$
$$a^3(b^3-c^3)+b^3(c^3-a^3)+c^3(a^3-b^3)=0\text{ ; ইত্যাদি।}$$

8·3. **চক্রক্রমে সজ্জিত রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় :** চক্র-ক্রমে সজ্জিত রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিবার সময় সর্বপ্রথম উহাদের বন্ধনী মুক্ত করিতে হইবে। তাহার পর উহাকে a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহা হইতে a-নিরপেক্ষ উৎপাদকটি বাহির করিয়া লইতে হইবে। পরে অবশিষ্ট অংশকে b এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহা হইতে b-নিরপেক্ষ উৎপাদকটি বাহির করিয়া লইতে হইবে। সর্বশেষে অবশিষ্ট অংশকে c-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইয়া উহা হইতে c নিরপেক্ষ উৎপাদকটি বাহির করিয়া লইতে হইবে। প্রশ্নমালার ভিতর উদাহরণগুলি ভাল করিয়া লক্ষ্য কর।

প্রশ্নমালা 8B

[1 হইতে 9 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2b-a^2c+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$ [a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে]

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)(bc-ab+a^2-ac)$ [b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজান]

$=(b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)$ [$\because$ $(b-a)=-(a-b)$]

[শেষ লাইনটি চক্র-ক্রমে সজ্জিত হইল।]

2. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

3. $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.

4. $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

x^2, y^2, z^2 এর স্থলে a, b, c লিখিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)$

$=-(y^2-z^2)(z^2-x^2)(x^2-y^2)$ [a, b, c-এর মান বসাইলে]

$=-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$.

5. $(x+p)^2(y-z)+(y+p)^2(z-x)+(z+p)^2(x-y)$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2+2px+p^2)(y-z)+(y^2+2py+p^2)(z-x)$
$+(z^2+2pz+p^2)(x-y)$

$=\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}+[2p\{x(y-z)+y(z-x)$
$+z(x-y)\}]+[p^2\{(y-z)+(z-x)+(x-y)\}]$

$=\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}+2p.0+p^2.0$ [অঙ্ক 8·2 অনুসারে]

$=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

$=-(y-z)(z-x)(x-y)$.

6. $(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)$.

7. $(x-b)(x-c)(b-c)+(x-c)(x-a)(c-a)+(x-a)(x-b)(a-b)$.

8. $(b+c)(c+a)(a-b)+(c+a)(a+b)(b-c)+(a+b)(b+c)(c-a)$.

9. $(x+a)(b+c)(b-c)+(x+b)(c+a)(c-a)+(x+c)(a+b)(a-b)$.

10. $(x^2+b^2)(x^2+c^2)(b^2-c^2)+(x^2+c^2)(x^2+a^2)(c^2-a^2)$
$+(x^2+a^2)(x^2+b^2)(a^2-b^2)$.

11. $(x+a)^2)(b+c)(b-c)+(x+b)^2(c+a)(c-a)$
$+(x+c)^2(a+b)(a-b).$

12. $(a^2+pa+q)(b-c)+(b^2+pb+q)(c-a)+(c^2+pc+q)(a-b)$

13. $(pa^2+qa+r)(b^2-c^2)+(pb^2+qb+r)(c^2-a^2)$
$+(pc^2+qc+r)(a^2-b^2).$

14. $a^6(b^3-c^3)+b^6(c^3-a^3)+c^6(a^3-b^3).$

15. $y^2z^2(y^2-z^2)+z^2x^2(z^2-x^2)+x^2y^2(x^2-y^2).$

16. $p^2(q^4-r^4)+q^2(r^4-p^4)+r^2(p^4-q^4).$

8·4 চক্র-ক্রমে সজ্জিত রাশিমালার আরও কয়েকটি উৎপাদক নির্ণয় ও বিভিন্ন পদ্ধতির নিয়ে আলোচনা করা হইল। চক্র-ক্রম করিবার জন্য $(b-a)$ কে $-(a-b)$, $(c-b)$ কে $-(b-c)$ প্রভৃতি করিয়া লইতে হয়। উত্তরও সর্বদা চক্র-ক্রম অনুসারে সাজাইয়া দিতে হয়।

প্রশ্নমালা 8 C

[1 হইতে 9 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $\boldsymbol{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)}.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\boldsymbol{a^3b-a^3c+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3}.$

[বন্ধনী অপসারণ]

$=\boldsymbol{a^3b-a^3c-ab^3+ac^3+b^3c-bc^3}.$ [a এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=\boldsymbol{a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)}$

$=\boldsymbol{a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b-c)(b+c)}$

$=\boldsymbol{(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}}$

$=\boldsymbol{(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)}$

$=\boldsymbol{(b-c)(b^2c-ab^2+bc^2-abc-ac^2+a^3)}$

[b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=\boldsymbol{(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}}$

$=\boldsymbol{(b-c)(c-a)\{b^2+bc-ac-a^2\}}$

$=\boldsymbol{(b-c)(c-a)(bc-ca+b^2-a^2)}$ [c-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b-a)(b+a)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)(c+b+a)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ [চক্রক্রমে সাজাইয়া]

[অনুরূপে 2 ও 3 নং অঙ্ক কর।]

2. $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$.

3. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$.

4. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^3b^2-a^3c^2+b^3c^2-a^2b^3+a^2c^3-b^2c^3$

[বন্ধনী অপসারণ]

$=a^3b^2-a^3c^2-a^2b^3+a^2c^3+b^3c^2-b^2c^3$

[a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=a^3(b^2-c^2)-a^2(b^3-c^3)+b^2c^2(b-c)$

$=(b-c)\{a^3(b+c)-a^2(b^2+bc+c^2)+b^2c^2\}$

$=(b-c)(a^3b+a^3c-a^2b^2-a^2bc-a^2c^2+b^2c^2)$

$=(b-c)(b^2c^2-a^2b^2+a^3b-a^2bc-a^2c^2+a^3c)$

[b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=(b-c)\{b^2(c^2-a^2)-a^2b(c-a)-a^2c(c-a)\}$

$=(b-c)(c-a)\{b^2(c+a)-a^2b-a^2c\}$

$=(b-c)(c-a)(b^2c+b^2a-a^2b-a^2c)$

$=(b-c)(c-a)(b^2c-a^2c+b^2a-a^2b)$

[c-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=(b-c)(c-a)\{c(b^2-a^2)+ab(b-a)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)\{c(b+a)+ab\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)(bc+ac+ab)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$. [চক্রক্রমে সাজাইয়া]

[অনুরূপে 5 ও 6 নং অঙ্ক কর।]

5. $b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$.

6. $a^2(b^3-c^3)+b^2(c^3-a^3)+c^2(a^3-b^3)$.

7. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^4b-a^4c+b^4c-ab^4+ac^4-bc^4$ [বন্ধনী অপসারণ]

$=a^4b-a^4c-ab^4+ac^4+b^4c-bc^4$ [a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=a^4(b-c)-a(b^4-c^4)+bc(b^3-c^3)$

$=(b-c)\{a^4-a(b^3+b^2c+bc^2+c^3)+bc(b^2+bc+c^2)\}$

$=(b-c)(a^4-ab^3-ab^2c-abc^2-ac^3+b^3c+b^2c^2+bc^3)$

$=(b-c)(b^3c-ab^3+b^2c^2-ab^2c+bc^3-abc^2-ac^3+a^4)$

[b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=(b-c)\{b^3(c-a)+b^2c(c-a)+bc^2(c-a)-a(c^3-a^3)\}$

$=(b-c)(c-a)\{b^3+b^2c+bc^2-ac^2-ca^2-a^3\}$

$=(b-c)(c-a)(bc^2-ac^2+b^2c-ca^2+b^3-a^3)$

[c-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=(b-c)(c-a)\{c^2(b-a)+c(b^2-a^2)+(b-a)(b^2+ab+a^2)\}$

$=(b-c)(c-a)(b-a)\{c^2+bc+ac+b^2+ab+a^2)$

$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$.

[চক্রক্রমে সাজাইয়া]

(অনুরূপে 8, 9 অঙ্ক কর।)

8. $a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4)$.

9. $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3)$.

10. (a) $x^6(y^2-z^2)+y^6(z^2-x^2)+z^6(x^2-y^2)$.

(b) $x^2y^2(x^4-y^4)+y^2z^2(y^4-z^4)+z^2x^2(z^4-x^4)$.

(c) $l^2(m^6-n^6)+m^2(n^6-l^6)+n^2(l^6-m^6)$.

(d) $(a^3+bc)(b-c)+(b^3+ca)(c-a)+(c^3+ab)(a-b)$.

(e) $(1+a)^3(b-c)+(1+b)^3(c-a)+(1+c)^3(a-b)$.

(f) $(a^3+pa+q)(b-c)+(b^3+pb+q)(c-a)+(c^3+pc+q)(a-b$.

(g) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

11. (a) $x^6(y^4-z^4)+y^6(z^4-x^4)+z^6(x^4-y^4)$.

(b) $x^4(y^6-z^6)+y^4(z^6-x^6)+z^4(x^6-y^6)$.

(c) $x^4y^4(x^2-y^2)+y^4z^4(y^2-z^2)+z^4x^4(z^2-x^2)$.

(d) $(ma^3+n)(b+c)(b-c)+(mb^3+n)(c+a)(c-a)$
$+(mc^3+n)(a+b)(a-b)$.

(e) $(a^3+pa^2+q)(b^2-c^2)+(b^3+pb^2+q)(c^2-a^2)$
$+(c^3+pc^2+q)(a^2-b^2)$.

(f) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$.

(g) $(a^3+b^2c^2)(b-c)+(b^3+c^2a^2)(c-a)+(c^3+a^2b^2)(a-b)$.

12. (a) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

(b) $bc(b^3-c^3)+ca(c^3-a^3)+ab(a^3-b^3)$

(c) $a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4)$.

(d) $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$.

(e) $bc(b^4-c^4)+ca(c^4-a^4)+ab(a^4-b^4)$

(f) $a(b^5-c^5)+b(c^5-a^5)+c(a^5-b^5)$

8·5. চক্রক্রমে সজ্জিত ত্রিঘাত সমমাত্রা রাশিমালার ঋণচিহ্ন স্থানে ধনচিহ্ন থাকিলে তাহাদেরও ঐ একই পদ্ধতিতে উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। নিম্নের তিনটি রাশিমালার বন্ধনী অপসারণ করিলে উহারা পরস্পর সমান হয়। উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর:

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$, $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$, $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)$.

প্রশ্নমালা 8 D

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $\boldsymbol{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc}$

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$

$=a^2b+a^2c+ab^2+ac^2+2abc+b^2c+bc^2$

[a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=a^2(b+c)+a(b^2+c^2+2bc)+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$

$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$

$=(b+c)(ab+bc+a^2+ac)$ [b-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=(b+c)\{b(a+c)+a(a+c)\}$

$=(b+c)(a+c)(b+a)$

$=(b+c)(c+a)(a+b).$ [চক্রক্রমে সাজাইয়া]

[অনুরূপে, 2, 3 অঙ্ক দুইটি কর।]

2. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc.$

3. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc.$

4. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=a^2b+a^2c+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+3abc.$

$=a^2b+a^2c+abc+b^2c+ab^2+abc+c^2a+bc^2+abc$

$=a(ab+ac+bc)+b(bc+ab+ac)+c(ac+bc+ab)$

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca).$

[অনুরূপে, 5, 6 অঙ্ক কর।]

5. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc.$

6. $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+3abc.$

দ্রষ্টব্য ঃ 1 নং অঙ্কটির সহিত abc যোগ করিলে 4 নং অঙ্কটি হয়।

সুতরাং $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

এবং $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(b+c)(c+a)(a+b).$

7. $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\{a+(b+c)\}\{a(b+c)+bc\}-abc.$

[a-এর ঘাতের অধঃক্রমে সজ্জিত]

$=a^2(b+c)+abc+a(b+c)^2+bc(b+c)-abc$

$=a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c).$

$=(b+c)\{c^2+a(b+c)+bc\}=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$

$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(b+c)(c+a)(a+b).$

8. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3.$

$\because$ $(a+b+c)^3=\{a+b)+c\}^3$

$=(a+b)^3+3(a+b)^2.c+3(a+b)c^2+c^3$

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3(a^2c + 2abc + b^2c) + 3(ac^2 + bc^2) + c^3$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3[a^2b + ab^2 + a^2c + 2abc + b^2c + ac^2 + bc^2]$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3[a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 + 2abc]$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3[a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) + 2abc]$$

$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(b+c)(c+a)(a+b) \quad [\text{1 নং অঙ্ক হইতে}]$$

$$\therefore \quad (\boldsymbol{a+b+c})^3 - \boldsymbol{a}^3 - \boldsymbol{b}^3 - \boldsymbol{c}^3 = 3(\boldsymbol{b+c})(\boldsymbol{c+a})(\boldsymbol{a+b}).$$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $b+c=0$, বা $c+a=0$ কিংবা $a+b=0$ হয়, তাহা হইলে $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$ হইবে।

9. $2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

প্রদত্ত রাশিমালা $= 4b^2c^2 - 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4$

$$= (2bc)^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2)$$

$$= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)$$

$$= \{(b+c)^2 - a^2\}\{a^2 - (b-c)^2\}$$

$$= (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

$$= (\boldsymbol{a+b+c})(\boldsymbol{b+c-a})(\boldsymbol{c+a-b})(\boldsymbol{a+b-c}).$$

অনুসিদ্ধান্ত : যদি $a+b+c=0$ হয় অথবা $b+c=a$, কিংবা $c+a=b$, অথবা $a+b=c$ হয়, তাহা হইলে $a^4+b^4+c^4 = 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2$ হইবে।

10. $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 4abc$

11. $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 8abc$

12. $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 9abc$

13. $a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 - 3abc$

14. $a(b-c)^2 + b(c+a)^2 + c(a-b)^2 + 5abc$

15. $(a^2+bc)(b+c) + (b^2+ca)(c+a) + (c^2+ab)(a+b) + 4abc.$

16. $(a^2+bc)(b+c) + (b^2+ca)(c+a) + (c^2+ab)(a+b) + 6abc.$

17. $abc=10$; $a+b+c=10$; $bc+ca+ab=27$ হইলে, মান নির্ণয় কর।

(a) $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$

(b) $a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)$

18. $x=2153$, $y=578$, $z=1575$ হইলে $2y^2z^2 + 2z^2x^2 + 2x^2y^2 - x^4 - y^4 - z^4$এর মান নির্ণয় কর।

8·6. বিপরীত রাশিমালা (Reciprocal Expression) : যদি কোন বীজগণিতীয় রাশিমালা কোন অক্ষরের ঘাতের মানের অধঃক্রমে বা উচ্চক্রমে সজ্জিত থাকে এবং উহার প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের সংখ্যাসূচক সহগ দুটি সমান হয়, তাহা হইলে ঐ রাশিমালাকে বিপরীত রাশিমালা বলে। যথা,

$x^6+3x^5+5x^4+5x^3+3x^2+x$। এইরূপ রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইলে সমসহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে দলবদ্ধ করিয়া অগ্রসর হইতে হয়। প্রশ্নমালার ভিতর উদাহরণগুলি দেখ।

প্রশ্নমালা 8 E

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. x^3+2x^2+2x+1

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^3+1)+(2x^2+2x)$ [সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে একত্র করিয়া]

$$=(x+1)(x^2-x+1)+2x(x+1)$$
$$=(x+1)(x^2-x+1+2x)$$
$$=(x+1)(x^2+x+1).$$

2. $x^4+7x\ \ +12x^2+7x+1$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^4+1)+(7x^3+7x)+12x^2$ [সমান সহগবিশিষ্ট পদদ্বয়কে একত্র করিয়া]

$$=\{(x^2+1)^2-2x^2\}+7x(x^2+1)+12x^2$$
$$=(x^2+1)^2+7x(x^2+1)+10x^2$$
$$=a^2+7ax+10x^2 \quad [\ x^2+1 \text{ কে } a \text{ ধরিয়া}\ ]$$
$$=(a+2x)(a+5x)$$
$$=\{(x^2+1)+2x\}\{(x^2+1)+5x\} \quad [\ a\text{-এর মান বসাইয়া}\ ]$$
$$=(x^2+2x+1)(x^2+5x+1)$$
$$=(x+1)^2(x^2+5x+1)$$

3. $2a^4-3a^3b-6a^2b^2+3ab^3+2b^4.$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(2a^4+2b^4)-(3a^3b-3ab^3)-6a^2b^2$ [সমান সহগ-বিশিষ্ট রাশিদ্বয়কে একত্র করিয়া]

$$=2(a^4+b^4)-3ab(a^2-b^2)-6a^2b^2$$
$$=2\{(a^2-b^2)^2+2a^2b^2\}-3ab(a^2-b^2)-6a^2b^2$$
$$=2(a^2-b^2)^2-3ab(a^2-b^2)-2(ab)^2$$

[মনে করি $a^2-b^2=x,\ ab=y$]

$$=2x^2-3xy-2y^2=(x-2y)(2x+y)$$
$$=(a^2-b^2-2ab)(2a^2-2b^2+ab)\ [x,\ y\text{-এর মান বসাইয়া}]$$
$$=(a^2-2ab-b^2)(2a^2+ab-2b^2).$$

4. $x^3+4x^2+4x+1.$
5. $x^3-5x^2+5x+1.$
6. $x^3-7x^2-7x+1.$
7. $2x^3+3x^2+3x+2.$
8. $2x^3-5x^2+5x-2.$
9. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1.$
10. $x^4+5x^3+8x^2+5x+1.$
11. $x^4-4x^3-10x^2-4x+1.$
12. $x^4+3x^3-16x^2+3x+1.$
13. $x^4-3x^3+3x-1.$
14. $2x^4-5x^3y-11x^2y^2+5xy^3+2y^4.$
15. $x^5-4x^4-13x^3+13x^2+4x-1.$
16. $2a^5+5a^4b+2a^3b^2-2a^2b^3-5ab^4-2b^5.$

8.7. **মান** (Degree), **মাত্রা** (Dimension) ; **রাশিমালার মান** (Degree of an Expression), **সমমাত্র রাশিমালা** (Homogeneous Expression) : কতকগুলি অক্ষরের গুণফলে অক্ষরগুলির মোট সংখ্যা অর্থাৎ উহাদের সূচকগুলির যোগফলকে গুণফলের মান বা মাত্রা বলে। যেমন $15x^2y^3z^4$-এ $x,\ y,\ z$-তে মোট সংখ্যা $2+3+4=9$ $\therefore$ $15x^2y^3z^4$. একটি নবম মানের বা নয় মাত্রার রাশি। 15 সংখ্যাটিকে ধরা হয় না।

যখন কোন রাশিমালার মান বিভিন্ন হয় তখন বৃহত্তমটির মানই রাশিমালার মান বলে। যখন সব পদগুলির মান সমান হয় তখন উহাকে সমমাত্র রাশিমালা বলা হয়। যথা—$3a^5b^4+6a^3b^2+9a$ একটি নবম মানের রাশিমালা, কারণ প্রথম পদটির মাত্রা $5+4=9$ এবং ইহাই বৃহত্তম। $x^3+y^3+z^3-3xyz$ রাশিমালার প্রত্যেক পদের মান তিন। সুতরাং ইহা একটি সমমাত্র রাশিমালা।

8.8. **দুই মাত্রা বিশিষ্ট রাশিমালার উৎপাদক নির্ণয় :** এইরূপ রাশিমালার অন্তর্গত কোনও সুবিধামত অক্ষরের ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইতে হয়। তাহার পর উহাকে 'ax^2+bx+c' আকারে প্রকাশিত করিতে পারিলে অনু 5.9, 5.10-এ বর্ণিত প্রণালী দ্বারা উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। প্রশ্নমালার ভিতর উদাহরণগুলি দেখ।

প্রশ্নমালা 8 F

[1 হইতে 5 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $2x^2+3y^2-5xy-2x+y-4.$

x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইতে হইবে। সুতরাং

প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^2-(5y+2)x+(3y^2+y-4)$

$=2x^2-(5y+2)x+(3y+4)(y-1).$

ইহা 'ax^2+bx+c' আকারের রাশিমালা। সুতরাং x^2-এর সহগ 2 ও x-বর্জিত পদ $(3y+4)(y-1)$-র গুণফলকে এইরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি (algebraic sum) x-এর সহগ, $-(5y+2)$ হয়। পরীক্ষা করিয়া দেখা যাইবে $-(3y+4)$ এবং $-2(y-1)$ নির্ণেয় উৎপাদক। সুতরাং

প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^2-(3y+4)x-2(y-1)x+(3y+4)(y-1)$

$=x\{2x-(3y+4)\}-(y-1)\{2x-(3y+4)$

$=x(2x-3y-4)(y-1)(2x-3y-4).$

$=(2x-3y-4)\{x-(y-1)\}$

$=(2x-3y-4)(x-y+1)$

2. $2x^2-2y^2-3z^2+7yz+zx+3xy$

রাশিমালাকে x-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে ;

প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^2+(3y+z)x-(2y^2-7yz+3z^2)$

$=2x^2+(3y+z)x-(y-3z)(2y-z).$

এখন $-(y-3z)(2y-z)$ ও x^2এর সহগ 2-এর গুণফলকে এরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে হইবে যাহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি x-এর সহগ $(3y+z)$ এর সমান হয়। পরীক্ষা করিয়া দেখা যাইবে $2(2y-z)$ ও $-(y-3z)$ নির্ণেয় উৎপাদক।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=2x^2+2(2y-z)x-(y-3z)x-(y-3z)(2y-z)$

$=2x\{x+(2y-z)\}-(y-3z)\{x+(2y-z)\}$

$=(z+2y-z)\{2x-(y-3z)\}$

$=(x+2y-z)(2x-y+3z)$

3. $4a^2-2b^2-3c^2+5bc-4ca+2ab-10a+2b-c+4.$

'a'-এর ঘাতের অধঃক্রমে সাজাইলে, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=4a^2+(2b-4c-10)a-(2b^2+3c^2-5bc-2b+c-4)$$

পূর্বের 1নং অঙ্কের প্রণালীতে উৎপাদক নির্ণয় করিলে দেখিবে যে

$2b^2+3c^2-5bc-2b+c-4=(2b-3c-4)(b-c+1)$ $\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা$=4a^2+(2b-4c-10)a-(2b-3c-4)(b-c+1).$ এখন a^2এর সহগ 4 এবং $-(2b-3c-4)(b-c+1)$ এর গুণফলকে এইরূপ দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর যে উহাদের বীজগণিতীয় সমষ্টি a-এর সহগ $2b-4c-10$ এর সমান হয়। পরীক্ষা করিয়া দেখিবে $2(2b-3c-4)$ এবং $-2(b-c+1)$ নির্ণেয় উৎপাদক।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=4a^2+2(2b-3c-4)a-2(b-c+1)a-(2b-3c-4)(b-c+1)$$

$$=2a\{2a+(2b-3c-4)\}-(b-c+1)\{2a+(2b-3c-4)\}$$

$$=(2a+2b-3c-4)\{2a-(b-c+1)\}$$

$$=(2a+2b-3c-4)(2a-b+c-1).$$

4. $3x^2-14y^2+xy+4x+31y-15.$

5. $2x^2+6y^2+7xy+6x+11y+4.$

6. $3x^2-2y^2-5xy+11x-y+6.$

7. $a^2-6b^2+ab+3a-11b-4.$

8. $2x^2-6y^2-15z^2+19yz+zx-xy.$

9. $6x^2-2y^2+3z^2+4xy-9xz-5yz.$

10. $12a^2-5b^2-12c^2+16bc+10ca-11ab.$

11. $x^2-3y^2-2z^2+7yz+zx+2xy-x+5y-5z-2.$

12. $2a^2+6b^2-12c^2-bc+2ca-7ab+13a-22b-c+20.$

8·9. পরীক্ষা দ্বারা উৎপাদক নির্ণয় (Trial method): x-অক্ষরবিশিষ্ট কোন রাশিমালায় যদি $x=+a$ ধরিয়া রাশিমালার মান শূন্য হয়, তাহা হইলে $(x-a)$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক হইবে। যদি $x=-a$ ধরিলে রাশিমালার মান শূন্য হয় তাহা হইলে $(x+a)$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক হইবে। একটি উৎপাদক জানা হইলে রাশিমালাটি এরূপ বিভিন্ন অংশে সজ্জিত কর যে প্রত্যেক অংশ ঐ উৎপাদক দ্বারা বিভাজ্য হয়। তৎপর ঐ উৎপাদকটি সাধারণ উৎপাদক হিসাবে বাহির করিয়া লইলে রাশিমালাটি উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট হইবে।

প্রশ্নমালা 8 G

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. x^3-7x+6.

রাশিমালাটিতে x-এর মান $+1$ বসাইলে $1^3-7.1+6=1-7+6=0$ হয়। সুতরাং রাশিটি $x-1$ দ্বারা বিভাজ্য। এখন রাশিটির পদগুলিকে এরূপভাবে বিভিন্ন দলে ভাঙ্গিতে হইবে যেন সাধারণ উৎপাদক $(x-1)$ সহজেই বাহির হইয়া আসে।

∴ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=x^3-7x+6$$
$$=x^3-x^2+x^2-x-6x+6 \quad ...(a)$$
$$=x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1) \; ...(b)$$
$$=(x-1)(x^2+x-6)$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3) \text{ [মধ্যপদী উৎপাদক]}$$

অনেক সময় দেখা যায় a ও b পদ দুইটি এক সাথে বামদিক হইতে লিখিতে পারিলে শেষ পদ 6 ঠিক আসিয়া পড়িলে ভুল হইবার সম্ভাবনা কম থাকে।

2. x^3+4x^2-x-4.

$x=+1$ ধরিলে রাশিমালাটি $1^3+4.1^2-1-4=1+4-1-4=0$ হয়।

সুতরাং ইহার $(x-1)$ একটি উৎপাদক। ইহার পদগুলি এরূপ ভাবে বিভিন্ন দলে ভাঙ্গিতে হইবে যেন সাধারণ উৎপাদক সহজেই বাহির হইয়া আসে। দুইটি করিয়া লাইন একসাথে লিখিলে সুবিধা হয়।

∴ প্রদত্ত রাশিমালা $=x^3+4x^2-x-4$.

$$=x^3-x^2+5x^2-5x+4x-4$$
$$=x^2(x-1)+5x(x-1)+4(x-1)$$
$$=(x-1)(x^2+5x+4)$$
$$=(x-1)(x+1)(x+4).$$

দ্রষ্টব্য : $x=-1$ বা $x=-4$ বসাইলেও রাশিমালাটির মান শূন্য হইবে।

∴ $(x+1)$ এবং $(x+4)$ ও রাশিমালাটির উৎপাদক।

3. $2a^3-a^2b-b^3$.

$a=b$ বসাইলে রাশিমালাটি শূন্য হয়। ∴ $(a-b)$ উহার একটি উৎপাদক।

∴ প্রদত্ত রাশিমালা$=2a^3-2a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$

$$=2a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)$$
$$=(a-b)(2a^2+ab+b^2).$$

4. a^5-b^5.

$a=b$ ধরিলে রাশিমালার মান শূন্য হয়। ∴ $(a-b)$ উহার একটি উৎপাদক।

∴ প্রদত্ত রাশিমালা a^5-b^5

$$=a^5-a^4b+a^4b-a^3b^2+a^3b^2-a^2b^3+a^2b^3-ab^4+ab^4-b^5$$
$$=a^4(a-b)+a^3b(a-b)+a^2b^2(a-b)+ab^3(a-b)+b^4(a-b)$$
$$=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

অনুরূপে a^5+b^5-এ $a=-b$ বসাইলে রাশিমালার মান শূন্য হয়।

∴ $(a+b)$ উহার একটি উৎপাদক।

5. (i) $x^3+5x^2+10x+8$

$x=+1$ বা -1 বা $+2$ বসাইলে শূন্য হয় না, কিন্তু $x=-2$ হইলে শূন্য হয়।

∴ $(x+2)$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক। ∴ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=x^3+2x^2+3x^2+6x+4x+8$$
$$=x^2(x+2)+3x(x+2)+4(x+2)$$
$$=(x+2)(x^2+3x+4).$$

5. (ii) $8x^3-4x-21$.

$y=2x$ ধরিলে রাশিমালাটি হইবে $y^3-2y-21$. ইহাতে $y=3$ বসাইলে $y^3-2y-21$-এর মান শূন্য হয়। ∴ $(y-3)$ ইহার একটি উৎপাদক। অতএব $y^3-2y-21$

$$=y^3-3y^2+3y^2-9y+7y-21$$
$$=y^2(y-3)+3y(y-3)+7(y-3)$$
$$=(y-3)(y^2+3y+7)$$
$$=(2x-3)(4x^2+6x+7).$$ [y-এর মান বসাইয়া]

6. $2x^3-3x^2-5$.

7. $x^3+6x^2+11x+6$.

8. x^3-2x^2+3x-2.

9. a^3-a^2+a-21.

10. $x^3 - 2x^2 - 23x + 60.$ 11. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6.$
12. $x^3 - 6x^2 + 13x - 10.$ 13. $x^3 + 5x^2 - 2x - 6.$
14. $x^3 + 4x^2y - 9y^3.$ 15. $a^3 - 9ab^2 - 10b^3.$
16. $8x^3 + 4x - 3.$ 17. $27x^3 + 9x - 14.$
18. $x^4 - 4x + 3.$ 19. $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2.$
20. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8.$ 21. $2a^4 + a^3 - 9a^2 - 13a - 5.$
22. $a^5 + b^5.$ 23. $a^7 - b^7.$
24. $a^7 + b^7.$ 25. $x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 7x + 2.$

8.10. **উপযুক্ত পদবিন্যাস** (Arrangement of terms) এবং **সঙ্ঘবদ্ধকরণ** (Grouping): কখন কখন রাশিমালার পদগুলি সুবিধামত সজ্জিত করিলে বা সুবিধামত সঙ্ঘবদ্ধ করিলে সহজেই উৎপাদক নির্ণয় করা যায়। ইহা ছাড়া কয়েকটি কৌশলও প্রয়োগ করা যায়। উদাহরণগুলি দেখ।

প্রশ্নমালা 8 H

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

উৎপাদক নির্ণয় কর :

1. $8x^3 + 6x^2 + 3x + 1.$

প্রদত্ত রাশিমালা $= (8x^3 + 1) + (6x^2 + 3x)$ [পদবিন্যাস করিয়া]

$= \{(2x)^3 + (1)^3\} + 3x(2x + 1)$

$= (2x + 1)(4x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2) + 3x(2x + 1)$

$= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1 + 3x)$

$= (2x + 1)(4x^2 + x + 1).$

2. $x^3 - 2x - 21.$

প্রদত্ত রাশিমালা $= x^3 - 2x - 27 + 6.$

$= x^3 - 27 - 2x + 6.$

$= (x^3 - 3^3) - (2x - 6)$

$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9) - 2(x - 3)$

$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9 - 2)$

$= (x - 3)(x^2 + 3x + 7).$

3. $a^3 + 8a - 24.$ 4. $27a^3 + 15a^2 - 5a - 1.$

5. $3x^2a - 4b^2a + 3a^2b - 4x^2b.$

6. $a^4 + a^2b^2 - b^2c^2 - c^4.$ 7. $(x^2 - y^2)(a^2 - b^2) + 4abxy.$

প্রদত্ত রাশিমালা $= x^2a^2 - x^2b^2 - y^2a^2 + y^2b^2 + 4abxy$

$= (x^2a^2 + 2abxy + y^2b^2) - (x^2b^2 - 2abxy + y^2a^2)$

$= (xa + yb)^2 - (xb - ya)^2$

$= \{(xa + yb) + (xb - ya)\}\{(xa + yb) - (xb - ya)\}$

$= (xa + yb + xb - ya)(xa + yb - xb + ya)$

$= \{(a+b)x - (a-b)y\}\{(a-b)x + (a+b)y\}.$

8. $(ab+1)^2 - a(b^2+1) - b(a^2+1).$

প্রদত্ত রাশিমালা $= (ab+1)^2 - ab^2 - a - a^2b - b.$

$= (ab+1)^2 - (a+b) - ab(a+b)$

$= (ab+1)^2 - (a+b)(1+ab)$

$= (ab+1)\{(1+ab) - (a+b)\}$

$= (ab+1)(1+ab-a-b)$

$= (ab+1)\{(1-a) - b(1-a)\}$

$= (ab+1)(1-a)(1-b).$

9. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + a + b - c.$

প্রদত্ত রাশিমালা $= (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) + (a + b - c)$

$= \{a^2 - (b-c)^2\} + (a+b-c)$

$= (a+b-c)(a-b+c) + (a+b-c)$

$= (a+b-c)\{(a-b+c) + 1\}$

$= (a+b-c)(a-b+c+1).$

10. $a^5 + a^2x^3 - 2abx^3 + b^2x^3 + a^3b^2 - 2a^4b.$

প্রদত্ত রাশিমালা $= (a^5 + a^3b^2 - 2a^4b) + (a^2x^3 - 2abx^3 + b^2x^3)$

$= a^3(a^2 + b^2 - 2ab) + x^3(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3(a-b)^2 + x^3(a-b)^2$

$= (a-b)^2(a^3 + x^3)$

$= (a-b)^2(a+x)(a^2 - ax + x^2).$

11. $(b+c)^2 - 2(b^2+c^2)a^2 + (b-c)^2a^4.$ [M. U. 1889]

$\because$ $(b+c)^2 + (b-c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc + b^2 + c^2 - 2bc = 2(b^2 + c^2)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $= (b+c)^2 - \{(b+c)^2 + (b-c)^2\}a^2 + (b-c)^2a^4$

$= \{(b+c)^2 - (b+c)^2a^2\} - \{(b-c)^2a^2 - (b-c)^2a^4\}$

$= (b+c)^2(1-a^2) - a^2(b-c)^2(1-a^2)$

$= (1-a^2)\{(b+c)^2 - (b-c)^2a^2\}$

$= (1+a)(1-a)\{(b+c) + (b-c)a\}\{(b+c) - (b-c)a\}$

$= (1+a)(1-a)(b+c+ab-ac)(b+c-ab+ac).$

12. (i) $2m^3-3m^2n+4mn^2-6n^3$.

(ii) $27x^3-24xy^2+8y^3$.

(iii) x^5+x^4+1.

(iv) $x^4+4x^3+5x^2+8x+6$.

13. (i) $(a-b)(1+c)+(b-c)(1+a)$.

(ii) $(ar-bq)(x+cy)+(bq-cr)(x+ay)$.

(iii) $3x^4-16x^3-7x^2+32x+12$..

(iv) $x^4+y^4+2+2x^2y^2-3x^2-3y^2$.

14. (i) $(c^2+ab)^2-ac(c^2+b^2)-bc(c^2+a^2)$.

(ii) $a^2(p+q)-5apq-q^2(q-4p)$.

(iii) $(1-c^2)(1+a)^2-(1-a^2)(1+c)^2$. [C. U.]

(iv) $(x+y)^2+(x+z)^2-(y+a)^2-(z+a)^2$.

15. (i) $x^4-9x^2+30x-25$.

(ii) $a^4-2a^3+2a^2-2a+1$.

(iii) $a^2+4ab+3b^2+2bc-c^2$.

(iv) $4x^4-20x^3+24x^2+6x-9$.

16. (i) $4x^2-4xy+y^2+14x-7y-30$. [B. U. '22]

(ii) $(x^2-6x)^2-8(x^2-6x+8)-64$. [B. U. '24]

(iii) $(x+1)^2+8(x+1)(y+3)+15(y+3)^2$.

(iv) $2(a^6+b^6)-ab(a^2+b^2)(2ab-3a^2+3b^2)$. [B. U. '25]

17. (i) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

(ii) $(ax+by-1)^2+(bx-ay)^2-(x-a)^2-(y-b)^2$.

(iii) $(x-1)(x-2)-2(y-1)(x-2)+(y-1)(y-2)$.

(iv) $(ax+by+cz)^2+(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2$.

18. (i) $(1+x)^2(1+y^2)-(1+y)(1+x^2)$.

(ii) $a+(1-a)b+(1-a)(1-b)c-1$.

(iii) $x+(1+x)y+(1+x)(1+y)z+1$.

(iv) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3$.

(v) $(a+b)^5-a^5-b^5$.

19. $a+b=\sqrt{3}$ এবং $a-b=\sqrt{2}$ হইলে $8ab(a^2+b^2)$এর মান নির্ণয় কর।

20. $a^6+\frac{b^6}{27}$ কে $a^2+ab+\frac{b^2}{3}$ দ্বারা ভাগ কর।

9

সহজ ভগ্নাংশ

Easy Fraction

9·1. সংজ্ঞা : কোনও রাশি a-কে অপর কোন রাশি b দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল হয় $a \div b$ অথবা $\frac{a}{b}$. (a/b) বা $\frac{a}{b}$ আকারে লিখিত রাশিকে **ভগ্নাংশ** (Fraction) বলে। ইহাতে একটি অনুভূমিক রেখার উপরের ভাজ্যকে **লব** (Numerator) এবং নীচের ভাজককে **হর** (Denominator) বলে। এখানে a লব, এবং b হর।

9·2. ভগ্নাংশে চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম : ভাগের চিহ্ন বিষয়ক নিয়মাবলী ভগ্নাংশেও প্রযোজ্য।

যেমন, $\frac{+a}{+b}=+\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}$; $\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{+b}=-\frac{a}{b}$.

অর্থাৎ লব ও হরের চিহ্ন একই হইলে ভগ্নাংশের চিহ্ন '+' এবং ভিন্ন হইলে উহার চিহ্ন '−' হইবে।

9·3. কোন ভগ্নাংশের লব ও হরকে যে কোন একই রাশি (অথবা সমান রাশি) দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

ভাগফল × ভাজক = ভাজ্য। $\frac{a}{b}$ ভাগফল, b ভাজক এবং a ভাজ্য।

সুতরাং $\frac{a}{b}\times b=a$। উভয় পক্ষকে m দ্বারা গুণ করা হইলে,

$\frac{a}{b}\times b\times m=a\times m.$ অথবা $\frac{a}{b}\times bm=am.$

অতএব $\frac{a}{b}=am\div bm=\frac{am}{bm}$ (1) অর্থাৎ একই রাশি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করা হইলেও মানের কোন পরিবর্তন হইল না।

পুনরায়, $a=am\div m$ এবং $b=bm\div m.$

সুতরাং $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}=\frac{am\div m}{bm\div m}$ (2) অর্থাৎ একই রাশি দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করা হইলেও মানের কোন পরিবর্তন হইল না।

অনুসিদ্ধান্ত : $m = -1$ হইলে (1) হইতে পাওয়া যায় যে,

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a(-1)}{b(-1)} = \frac{-a}{-b}$$

সুতরাং লব ও হর উভয়ের চিহ্ন পরিবর্তন করিলে ভগ্নাংশের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

9·4. **ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করণ :** কোনও ভগ্নাংশের লব ও হরের ভিতর কোন সাধারণ উৎপাদক না থাকিলে উহাকে **লঘিষ্ঠ আকারের ভগ্নাংশ** বলে। অতএব,

নিয়ম : কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইলে উহার লব ও হরের মধ্যে যতগুলি সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক থাকে তাহা পরিত্যাগ (উপরে নীচে কাটাকাটি) করিলে ভগ্নাংশটি লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত হইবে। অথবা ভগ্নাংশের লব ও হরের গ. সা. গু. বাহির করিয়া উহা দ্বারা লবকে ও হরকে পৃথক পৃথক ভাগ করিয়া ভাগফল দুইটি যথাক্রমে লব ও হর হিসাবে রাখিয়া লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা হয়।

প্রশ্নমালা 9 A

[1 হইতে 15 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর :

1. $\frac{12a^3b^4c^5}{36a^4b^4c^6} = \frac{12 \times 1 \times a^3 \times b^4 \times c^5}{12 \times 3 \times a^3 \times a \times b^4 \times c^5 \times c} = \frac{1}{3ac}$.

2. $\frac{25x^{10}y^8z^{10}}{125x^8y^{10}z^8}$. 3. $\frac{3x^2+6x}{x^2+4x+4} = \frac{3x(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{3x}{x+2}$.

4. $\frac{6a^2-8ab}{9ab-12b^2}$. 5. $\frac{4l^2mn}{6lm^2n}$. 6 $\frac{14x^5y^3}{21x^2y^2z}$.

7. $\frac{22x^2yz^2}{33xy^2z}$. 8. $\frac{xy}{x^2y-xy^2}$. 9. $\frac{2a^2-6ab}{4ax-12a^2}$.

10. $\frac{x^3-xy^2}{(x-y)^2}$. 11. $\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^2-(a+c)x+ac}$.

$$\frac{x^2-(a-b)x-ab}{x^2-(a+c)x+ac} = \frac{x^2-ax+bx-ab}{x^2-ax-cx+ac} = \frac{x(x-a)+b(x-a)}{x(x-a)-c(x-a)}$$

$$= \frac{(x-a)(x+b)}{(x-a)(x-c)} = \frac{x+b}{x-c}.$$

Sukur

12. $\dfrac{a^3-b^3}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

13. $\dfrac{20x^3-20y^3}{5x^2+5xy+5y^2}$.

14. $\dfrac{x^2-5x}{x^2-4x-5}$.

15. $\dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^3-y^3}$.

16. $\dfrac{2x^2+17x+21}{3x^2+26x+35}$.

17. $\dfrac{3x^2+23x+14}{3x^2+41x+26}$.

18. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^4+x^3-x-1}$.

19. $\dfrac{(2a+b)^2-c^2}{(b+c)^2-4a^2}$.

20. $\dfrac{x^3y+2x^2y+4xy}{x^3-8}$.

21. $\dfrac{3a^4+9a^3b+6a^2b^2}{a^4+a^3b-2a^2b^2}$.

22. $\dfrac{2x^2+xy-y^2}{x^3+x^2y-x-y}$. [D.B.'52]

23. $\dfrac{a^5-a^4b-ab^4+b^5}{a^4-a^3b-a^2b^2+ab^3}$.

24. $\dfrac{2x^4-x^3-9x^2+13x-5}{7x^3-19x^2+17x-5}$.

25. $\dfrac{(x^4-y^4)(x^2-2xy+y^2)}{(x-y)(x^3-y^3)(x^2+y^2)}$.

9·5. দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশকে সাধারণ হর বিশিষ্ট করিবার পদ্ধতি : ভগ্নাংশগুলি তুলনা করিবার জন্য, কিংবা ভগ্নাংশের যোগ বা বিয়োগ করিতে হইলে ইহার বিশেষ প্রয়োজন আছে।

$\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{e}{f}$ প্রভৃতি ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইলে উহাদের প্রত্যেকটিকে সর্বপ্রথম লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইবে। এখানে উহারা লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত আছে। তাহার পর হরগুলির b, d, f-র ল. সা. গু. কে প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ ভাগ করিয়া যে ভাগফল হইবে তাহা দ্বারা প্রত্যেক ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করিলে গুণফলগুলিতে প্রত্যেক ভগ্নাংশের হরগুলি একই হইবে এবং ভগ্নাংশগুলি লঘিষ্ঠ সাধারণ হর বিশিষ্ট হইবে। bdfকে b দিয়া ভাগ করিয়া ভাগফল df হইল। এই ভাগফল df দিয়া লব a এবং হর bকে গুণ করিয়া গুণফল লব ও হর হিসাবে রাখা হইল।

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times(bdf\div b)}{b\times(bdf\div b)}=\frac{a\times df}{b\times df}=\frac{adf}{bdf}.$$

$$\frac{c}{d}=\frac{c\times(bdf\div d)}{d\times(bdf\div d)}=\frac{c\times bf}{d\times bf}=\frac{bcf}{bdf}.$$

$$\frac{e}{f}=\frac{e\times(bdf\div f)}{f\times(bdf\div f)}=\frac{e\times bd}{f\times bd}=\frac{bde}{bdf}.$$

অতএব ভগ্নাংশগুলি $\frac{adf}{bdf}, \frac{bcf}{bdf}, \frac{bde}{bdf}$ এই আকারে সাধারণ হর বিশিষ্ট হইবে।

নিয়ম : প্রথমে প্রত্যেক ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারে আছে কিনা দেখিতে হইবে। না থাকিলে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিতে হইবে। তাহার পর হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দিয়া ল. সা. গু.-কে ভাগ করিয়া যে ভাগফল হইবে উহার দ্বারা ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করিলে ভগ্নাংশগুলি লঘিষ্ঠ সাধারণ হর বিশিষ্ট আকারে পরিণত হইবে।

প্রশ্নমালা 9 B

[1 হইতে 9 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর :

1. $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}, \frac{c}{ab}$.

হরগুলির ল. সা. গু. abc ; এখন $abc \div bc = a$, $abc \div ca = b$, $abc \div ab = c$.

$$\therefore \frac{a}{bc} = \frac{a.a}{bc.a} = \frac{a^2}{abc}; \quad \frac{b}{ca} = \frac{b.b}{ca.b} = \frac{b^2}{abc}; \quad \frac{c}{ab} = \frac{c.c}{ab.c} = \frac{c^2}{abc}.$$

$\therefore$ ভগ্নাংশগুলির লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট রূপ হইল $\frac{a^2}{abc}, \frac{b^2}{abc}, \frac{c^2}{abc}$.

2. $\frac{a+x}{a^2(a-x)}, \frac{a-x}{x^2(a+x)}, \frac{a^2+x^2}{ax(a^2-x^2)}$.

হরগুলির ল. সা. গু. $a^2x^2(a^2-x^2)$, এবং

$a^2x^2(a^2-x^2) \div a^2(a-x) = x^2(a+x)$,

$a^2x^2(a^2-x^2) \div x^2(a+x) = a^2(a-x)$,

$a^2x^2(a^2-x^2) \div ax(a^2-x^2) = ax$.

$$\therefore \frac{a+x}{a^2(a-x)} = \frac{(a+x)\{x^2(a+x)\}}{a^2(a-x)\{x^2(a+x)\}} = \frac{x^2(a+x)^2}{a^2x^2(a^2-x^2)},$$

$$\frac{a-x}{x^2(a+x)} = \frac{(a-x)\{a^2(a-x)\}}{x^2(a+x)\{a^2(a-x)\}} = \frac{a^2(a-x)^2}{a^2x^2(a^2-x^2)},$$

$$\frac{a^2+x^2}{ax(a^2-x^2)} = \frac{(a^2+x^2)\times ax}{ax(a^2-x^2)\times ax} = \frac{ax(a^2+x^2)}{a^2x^2(a^2-x^2)}.$$

3. $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$, $\dfrac{a^2b-ab^2+b^3}{a^3+b^3}$, $\dfrac{a^4-b^4}{a^4-2a^2b^2+b^4}$.

4. $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$, $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$.

হরগুলিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিলে পাওয়া যায় :

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$
$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1).$$
$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

$\therefore$ উহাদের ল. সা. গু $(x-1)(x-2)(x-3)$. এই ল. সা. গু. কে প্রত্যেকটি হর দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে $x-3$, $x-2$, এবং $x-1$ ভাগফল হয়। এই ভাগফলগুলি দ্বারা লব ও হরকে গুণ করিতে হইবে।

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1\times(x-3)}{(x^2-3x+2)(x-3)}=\frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1\times(x-2)}{(x^2-4x+3)(x-2)}=\frac{x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1\times(x-1)}{(x^2-5x+6)(x-1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

5. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}$, $\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}$, $\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

6. $\dfrac{a-b}{a^2-ab+b^2}$, $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$.

7. $\dfrac{a+b}{xy}$, $\dfrac{b+c}{yz}$, $\dfrac{c+a}{zx}$.

8. $\dfrac{x^2}{x^2-xy}$, $\dfrac{y^2}{xy+y^2}$, $\dfrac{x^2y^2}{x^3y-xy^3}$, $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$.

9. $\dfrac{x+4}{x^2+5x+6}$, $\dfrac{x+3}{x^2+6x+8}$, $\dfrac{x+3}{x^2+7x+12}$.

10. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}$, $\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}$, $\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

11. $\dfrac{b+c}{(b-a)(x-b)}$, $\dfrac{a+c}{(a-b)(x-a)}$.

12. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}$, $\dfrac{2x}{x^2+x-12}$, $\dfrac{3x^2}{x^2+5x+4}$.

9·7. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ : ভাগের বিচ্ছেদ বিধিতে দেখা গিয়াছে যে, $(a+b+c+\cdots)\div x=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots$

$$\therefore\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\cdots=\frac{a+b+c+\cdots}{x}$$

যদি বামপক্ষের ভগ্নাংশগুলি ভিন্ন হরবিশিষ্ট হয় ও হরগুলির ল. সা. গু. L হয়,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}-\frac{g}{h}-\cdots$$

$$=\frac{a\times(L\div b)}{L}+\frac{c\times(L\div d)}{L}+\frac{e\times(L\div f)}{L}-\frac{g\times(L\div h)}{L}-\cdots$$

$$=\frac{a\times(L\div b)+c\times(L\div d)+e\times(L\div f)-g\times(L\div h)-\cdots}{L}$$

নিয়ম : কতকগুলি বীজগণিতীয় ভগ্নাংশ যোগ এবং বিয়োগ দ্বারা সংযুক্ত থাকিলে তাহাদের প্রথমে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হইবে। ইহার জন্য হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া প্রত্যেক ভগ্নাংশের হর দ্বারা ল. সা. গু.কে ভাগ করিয়া লব এর সহিত গুণ করিতে হইবে। এইরূপে পরিবর্তিত ভগ্নাংশগুলির লবের বীজগণিতীয় সমষ্টি (Algebraic sum) নির্ণয় করিয়া উহা নির্ণেয় সমষ্টির লবরূপে এবং হরগুলির ল. সা. গু. কে হররূপে প্রকাশ করিতে হয়।

প্রশ্নমালা 9 C

[1 হইতে 14 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সরল কর :

1. $\frac{x+y}{a}+\frac{x-y}{a}$.

ভগ্নাংশগুলি সাধারণ হরবিশিষ্ট আছে। সুতরাং উহাদের লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টি, নির্ণেয় সমষ্টির ভগ্নাংশের লব ও সাধারণ হরটি হর হইবে।

$$\frac{x+y}{a}+\frac{x-y}{a}=\frac{x+y+x-y}{a}=\frac{2x}{a}.$$

2. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$.

হরগুলির ল. সা. গু. $=a^2-b^2$ এখন a^2-b^2 কে $a-b$ দ্বারা ভাগ করিলে $a+b$ হইল। উহা দ্বারা aকে গুণ করা হইল। সেইরূপ দ্বিতীয় ভগ্নাংশের হর $a+b$

দ্বারা a^2-b^2 কে ভাগ করিয়া $a-b$ হইল এবং উহা দ্বারা b কে গুণ করিয়া যে গুণফল পাওয়া গেল তাহা পূর্বের গুণফলের সহিত বীজগণিতীয় যোগ করিতে হইবে

$$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

3. $\frac{1+x}{1+x+x^2}+\frac{1-x}{1-x+x^2}.$

$$=\frac{(1+x)(1-x+x^2)+(1-x)(1+x+x^2)}{1+x^2+x^4}$$

$$\text{যোগফল}=\frac{1+x^3+1-x^3}{1+x^2+x^4}=\frac{2}{1+x^2+x^4}.$$

4 $\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{3}{x^2-7x+10}.$ 5. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$

6. $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}+\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}.$

7. $\frac{ax^2+b}{2x-1}+\frac{2(bx+ax^2)}{1-4x^2}-\frac{ax^2-b}{2x+1}$

[যেহেতু $1-4x^2=-(4x^2-1)$, সুতরাং মধ্যের ভগ্নাংশের হরটি এইরূপ বসাইলে ল. সা. গু.র সুবিধা হইবে।]

8 $\frac{3}{x+a}-\frac{1}{x+3a}+\frac{3}{a-x}+\frac{1}{x-3a}.$

$$=\left[\frac{3}{x+a}-\frac{3}{x-a}\right]+\left[\frac{1}{x-3a}-\frac{1}{x+3a}\right]$$

$$=\frac{6a}{x^2-9a^2}-\frac{6a}{x^2-a^2}=6a\left(\frac{1}{x^2-9a^2}-\frac{1}{x^2-a^2}\right)$$

$$=6a\left(\frac{x^2-a^2-x^2+9a^2}{(x^2-9a^2)(x^2-a^2)}\right)=\frac{48a^3}{x^4-10a^2x^2+9a^4}.$$

9. $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}.$ 10. $\frac{a+b}{a-b}-\frac{4ab}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}.$

11 $\frac{x+3}{x^2-3x+2}+\frac{x+2}{x^2-4x+3}+\frac{x+1}{x^2-5x+6}.$ [C. U. 1904]

12. $\frac{1}{x+3}+\frac{x+1}{x^2-3x+9}-\frac{2x^2+x+12}{x^3+27}.$ [C. U. 1860]

13. $\frac{a-1}{a-2}-\frac{a+1}{a+2}-\frac{4}{4-a^2}+\frac{2}{2-a}$. 14. $\frac{x+y}{y}-\frac{x}{x+y}-\frac{x^3-x^2y}{x^2y-y^3}$. [C. U. 1939]

15. $\frac{1}{x^2-8x+15}+\frac{1}{x^2-4x+3}-\frac{2}{x^2-6x+5}$. [C. U. 1920]

16. $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}+\frac{2xy}{y^2-x^2}$. 17. $\frac{a-2x}{a+2x}-\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{8ax}{a^2+4x^2}$. [C. U. 1933]

18. যদি $x+\frac{1}{x}=5$ হয়, তবে $\frac{x}{x^2+x+1}=$ কত ? [C. U. 1948]

9·7-1. **জটিল ভগ্নাংশ** (Complex Fraction): যে সকল ভগ্নাংশের হর কিংবা লব উভয়ই ভগ্নাংশ তাহাকে জটিল ভগ্নাংশ বলে। যেমন,

$$\frac{\frac{a}{b}}{c},\ \frac{\frac{a}{x}}{\frac{b}{y}},\ \frac{a}{\frac{x}{y}}$$ ইত্যাদি।

9·7-2. **ক্রমিক ভগ্নাংশ** (Continued Fraction):

$$a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{a}{b}}}$$

পার্শ্বে প্রদর্শিত আকারের জটিল ভগ্নাংশকে ক্রমিক বা ধারাবাহিক জটিল ভগ্নাংশ বলে। ইহাকে অনেকে সিঁড়িভাঙ্গাও বলিয়া থাকে, কারণ ইহা ধাপে ধাপে সজ্জিত থাকে। সর্বনিম্ন অংশ হইতে সরলীকরণ করিতে করিতে উপরের দিকে আসিতে হয়।

প্রশ্নমালা 9 D

[1 হইতে 5 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সরল কর :

1. $$\frac{9x^2-64}{x-1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{4+x}}}.$$

প্রদত্ত রাশিমালা $=\frac{9x^2-64}{x-1-\cfrac{1}{\cfrac{4+x-x}{4+x}}}=\frac{9x^2-64}{x-1-\cfrac{4+x}{4}}$

$$=\frac{9x^2-64}{\cfrac{4x-4-4-x}{4}}=\frac{9x^2-64}{\cfrac{3x-8}{4}}=\frac{4(9x^2-64)}{3x-8}=4(3x+8).$$

2. $\dfrac{a}{x+\dfrac{m}{y+\dfrac{n}{z}}}$.

3. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\dfrac{1}{x}}}$.

4. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}}$.

5. $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}}$.

6. $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{1-x}}}$.

7. $x^2+\dfrac{y^4}{x^2-\dfrac{x^3+y^3}{x+\dfrac{y^2}{x-y}}}$.

8. $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$.

9 $\dfrac{1-4x}{4x+2-\dfrac{4x}{\dfrac{1}{1+\dfrac{2x-1}{1+\dfrac{1}{4x-1}}}}}$.

9·7-3. **চক্রক্রমে সজ্জিত ভগ্নাংশ ঃ** চক্রক্রমে সজ্জিত ভগ্নাংশগুলি সরল করিবার জন্য নিম্নলিখিত ফলগুলি প্রয়োজনীয়।

যদি $X=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$, $Y=\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}$,

এবং $Z=\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$ হয়,

তাহা হইলে (i) $X+Y+Z=0$, (ii) $aX+bY+cZ=0$,

(iii) $a^2X+b^2Y+c^2Z=1$, (iv) $bcX+caY+abZ=1$,

(v) $a^3X+b^3Y+c^3Z=a+b+c$,

(vi) $a^4X+b^4Y+c^4Z=a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab$,

সরল কর ঃ

(i) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

$(a-b)(a-c)=-(a-b)(c-a)$ এইরূপে হরগুলিকে চক্রক্রমে আনিতে হইবে

প্রদত্ত রাশি $= -\left[\frac{1}{(a-b)(c-a)}+\frac{1}{(b-c)(a-b)}+\frac{1}{(c-a)(b-c)}\right]$

$= -\left[\frac{(b-c)+(c-a)+(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right] = -\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0.$

(iv) $\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}$

প্রদত্ত রাশি $= -\left[\frac{bc}{(a-b)(c-a)}+\frac{ca}{(b-c)(a-b)}+\frac{ab}{(c-a)(b-c)}\right]$

$= -\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= -\left[\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\right] = 1.$

প্রশ্নমালা 9 E

[1 হইতে 6 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সরল কর :

1. $\frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)}+\frac{pb^2+qb+r}{(b-c)(b-a)}+\frac{pc^2+qc+r}{(c-a)(c-b)}.$

প্রদত্ত রাশি $= p\left[\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\right]$

$+q\left[\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}\right]$

$+r\left[\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}\right]$

$=(p\times 1)+(q\times 0)+(r\times 0)=p+0+0=\boldsymbol{p}.$

2. $\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}.$

3. $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(c+a)}{(b-a)(b-c)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}.$ [C. U. 1923]

4. $\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\frac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\frac{a-b}{c^2-(a-b)^2}.$ [C. U. 1914]

5. $\frac{b^2+bc+c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{c^2+ca+a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{a^2+ab+b^2}{(c-a)(c-b)}.$ [C. U. 1940]

6. $\dfrac{a^2-bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2-ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2-ab}{(c-a)(c-b)}$. [C. U. 1924]

7. $\dfrac{a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2(c-a)}{(b+c)(b+a)}+\dfrac{c^2(a-b)}{(c+a)(c+b)}$. [C. U. 1947]

8. $\dfrac{a^2(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2(a+b)}{(c-a)(c-b)}$. [C. U. 1948]

9. $\dfrac{b+c-k}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a-k}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b-k}{(c-a)(c-b)}$. [C. U. 1946]

10. $\dfrac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}+3$. [C. U. 1939]

11. $\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$. [C. U. 1931]

12. $\dfrac{a}{bc(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{ca(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{ab(c-a)(c-b)}$. [A.U. '17]

13. $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(c+a)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$. [C. U. 1937]

14. $\dfrac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(b-c)}$. [W B S F. 195/]

15. প্রমাণ কর যে $\dfrac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}=3$.

9·8. ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগ : ভগ্নাংশের গুণের সময় লবগুলির গুণফলকে লবরূপে এবং হরগুলির গুণফলকে হররূপে প্রকাশ করিলে গুণফলটি পাওয়া যাইবে। গুণ করিবার সময় ভগ্নাংশগুলির সাধারণ উৎপাদকগুলিকে অপসারিত (কাটাকাটি) করিয়া লইতে হয়।

ভগ্নাংশের ভাগের ক্ষেত্রে ভাজ্যকে ভাজকের **অন্যোন্যক** (Reciprocal) রাশি দ্বারা গুণ করিতে হয়। অর্থাৎ ভাজ্যের সহিত ভাজককে উল্টাইয়া, অর্থাৎ লবকে হর এবং হরকে লব রূপে লইয়া গুণ করিতে হয়। সর্বসময় লব ও হরগুলিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া লইলে সাধারণ উৎপাদক অপসারণের সুবিধা হয়।

প্রশ্নমালা 9 F

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সরল কর :

1. $\dfrac{12x^2y^2z^2}{49a^4b^4c^4}\times\dfrac{21a^5b^5c^5}{36x^3y^3z^3}$.

নির্ণেয় গুণফল $=\dfrac{3.4.x^2.y^2.z^2}{7.7\,a^4b^4c^4}\times\dfrac{3.7.a.a^4.b.b^4.c.c^4}{3\times3\times4.x.x^2.y.y^2.z.z^2}=\dfrac{abc}{7xyz}$.

2. $\dfrac{a^2b^2}{a^2-b^2}\times\dfrac{a^3+b^3}{b^2(a^2+ab+b^2)}\times\dfrac{a^3-b^3}{a^2(a^2-ab+b^2)}$.

নির্ণেয় গুণফল $=\dfrac{a^2b^2}{(a+b)(a-b)}\times\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{b^2(a^2+ab+b^2)}$

$\times\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2(a^2-ab+b^2)}=1$.

3. $\dfrac{a^4b-b^5}{(a-b)^2}\div\dfrac{a^2b+b^3}{a^3-b^3}$.

নির্ণেয় ভাগফল $=\dfrac{b(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}\times\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{b(a^2+b^2)}$

$=(a+b)(a^2+ab+b^2)$.

4. $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}\right)$.

নির্ণেয় ভাগফল $=\left[\dfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\right]\div\left[\dfrac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}\right]$

$=\dfrac{4xy}{x^2-y^2}\div\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)}=\dfrac{4xy}{(x^2-y^2)}\times\dfrac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$.

5. $\dfrac{a^2+3a+2}{a^2-5a+6}\div\dfrac{a^2+a-2}{a^2+a-6}\times\dfrac{a^2-4a+3}{a^2+4a+3}$.

6 $\dfrac{a^2}{bc}\times\dfrac{b^2}{ca}\times\dfrac{c^2}{ab}$.

7. $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{z}\right)\times\dfrac{xy}{x-y}$.

8. $\left(a+\dfrac{ab}{a+b}\right)\times\dfrac{a^2-b^2}{ab+2b^2}$.

9. $\dfrac{a^3+b^3}{a^2-ab}\div\dfrac{a^2-ab+b^2}{ab-b^2}$.

10. $\left(\dfrac{2a}{a-b}-1\right)\div\left(\dfrac{2b}{a-b}+1\right)$.

11. $\left(\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a+1}{a}\right)\div\left(\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a-1}{a}\right)$.

12. $\left\{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\right\}\div\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

13. $\frac{a^2+3a+2}{a^2+2a+1}\times\frac{a^2+5a+4}{a^2+7a+10}$. [C. U. 1886]

14. $\left[\frac{x}{a}+\frac{2x^2}{a(b-x)}\right]\left[\frac{a}{x}-\frac{2ax}{x(b+x)}\right]$. [C. U. 1880]

15. $\left[\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right]\div\left[\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right]$ [C. U. 1867]

16. $\left(1-\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}-3xy\right)$. [A. U. 1891]

17. $\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x+y)^2-(x-y)^2}\div\frac{x^4-y^4}{2xy(x-y)}$. [M. U. 1887]

18. $\frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}\times\frac{a-b}{a(a+b)}$. [C. U. 1860]

19. $\dfrac{\frac{a+b+c}{a+b-c}+\frac{a+c-b}{b+c-a}}{\frac{a+b-c}{a+c-b}+\frac{b+c-a}{a+b+c}}\div\dfrac{\frac{a+b+c}{a+b-c}}{\frac{b+c-a}{a+c-b}}$. [M. U. 1875]

20. $\left\{\frac{2a}{x^2-a^2}-\frac{1}{x-a}+\frac{2}{x+a}\right\}\times\frac{x^2}{\{x(x-a)+a^2\}\div x}$.

9·9. জটিল ভগ্নাংশ সরল করিবার সময় উহাদের লবকে সরল করিয়া ও হরকে সরল করিয়া সরলীকৃত লবকে সরলীকৃত হর দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

প্রশ্নমালা 9G

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সরল কর :

1. $\frac{b+c}{2bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{2ca}(c^2+a^2-b^2)$
$+\frac{a+b}{2ab}(a^2+b^2-c^2)$ [M. U. 1877]

প্রদত্ত রাশিমালা $=\left(\frac{b}{2bc}+\frac{c}{2bc}\right)(b^2+c^2-a^2)$
$+\left(\frac{c}{2ca}+\frac{a}{2ca}\right)(c^2+a^2-b^2)+\left(\frac{a}{2ab}+\frac{b}{2ab}\right)(a^2+b^2-c^2)$

$$=\left(\frac{1}{2c}+\frac{1}{2b}\right)(b^2+c^2-a^2)+\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2c}\right)(c^2+a^2-b^2)$$

$$+\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{2a}\right)(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{2c}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{2b}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{2a}(c^2+a^2-b^2)$$

$$+\frac{1}{2c}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{2b}(a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{2a}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{2a}(c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{2b}(a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2)$$

$$+\frac{1}{2c}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2)$$

$$=\frac{1}{2a}\times 2a^2+\frac{1}{2b}\times 2b^2+\frac{1}{2c}\times 2c^2=\mathbf{a+b+c}.$$

2. $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2x}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^3}{x^4+y^4}$. [G. U. 1951]

প্রদত্ত রাশিমালা $=\left(\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{x+y}\right)+\dfrac{2x}{x^2+y^2}+\dfrac{4x^3}{x^4+y^4}$

$$=\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}$$

$$=2x\left[\frac{1}{x^2-y^2}+\frac{1}{x^2+y^2}\right]+\frac{4x^3}{x^4+y^4}$$

$$=\frac{4x^3}{x^4-y^4}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}=4x^3\left[\frac{1}{x^4-y^4}+\frac{1}{x^4+y^4}\right]=\frac{8x^7}{x^8-y^8}.$$

3. $\dfrac{\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{y-z}+\dfrac{z}{z-x}}{\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{y+z}{y-z}+\dfrac{z+x}{z-x}+3}$

হরের রাশিমালা $=\dfrac{x+y}{x-y}+1+\dfrac{y+z}{y-z}+1+\dfrac{z+x}{z-x}+1$

$$=\frac{2x}{x-y}+\frac{2y}{y-z}+\frac{2z}{z-x}=2\left[\frac{x}{x-y}+\frac{y}{y-z}+\frac{z}{z-x}\right]$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=\dfrac{\left[\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{y-z}+\dfrac{z}{z-x}\right]}{2\left[\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{y}{y-z}+\dfrac{z}{z-x}\right]}=\dfrac{1}{2}.$

4. $\dfrac{\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{x-c}}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}+3}$. 5. $\dfrac{\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{b}{b-x}+\dfrac{c}{c-x}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{x-c}}$

6. $\dfrac{\dfrac{a^3}{b^3}-\dfrac{b^3}{a^3}}{\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right)}\times\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$ [C. U. 1874]

7. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}+a+b+c}{\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{c}{x-c}}$.

8. $\dfrac{\dfrac{a^2}{x-a}+\dfrac{b^2}{x-b}+\dfrac{c^2}{x-c}}{\dfrac{ax}{x-a}+\dfrac{bx}{x-b}+\dfrac{cx}{x-c}-(a+b+c)}$.

9. $\dfrac{2}{a+x}-\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{3x}{a^2-x^2}+\dfrac{ax}{a^3+x^3}$. [C. U. 1883]

10. $\left[\sqrt{\dfrac{a+x}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{a+x}}\right]^2-\left[\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{x}}\right]^2+\dfrac{x^2}{a(a+x)}$.

[B. U. 1876]

ইঙ্গিত : $\sqrt{\dfrac{a+x}{x}}=\left(\dfrac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$; $\therefore$ $\left[\left(\dfrac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{x}{a+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$

$=\dfrac{a+x}{a}+\dfrac{x}{a+x}-2$ ইত্যাদি।

11. $\dfrac{\left(\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{y}\right)\left(\dfrac{z}{x}-\dfrac{x}{z}\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)}{\left(\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{z^2}\right)\left(\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)}$. [B. U. 1926]

12. $\dfrac{b+c}{bc}(b+c-a)+\dfrac{c+a}{ca}(c+a-b)+\dfrac{a+b}{ab}(a+b-c)$.

[G. U. 1948, C. U. '49]

13. $\dfrac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)+\dfrac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\dfrac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)$.

14. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{4x^3}{x^4+1}+\dfrac{8x^7}{x^8+1}$. [C. U. 1950]

15. $\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{2x}{x^2+a^2}+\dfrac{4x^2}{x^4+a^4}-\dfrac{8x^7}{x^8-a^8}$. [C. U. 1943]

16 $\dfrac{1}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\frac{c}{b}\right)\left(1-\frac{a}{b}\right)}+\dfrac{1}{\left(1-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}.$ [B. U. 1897]

17. $\dfrac{\frac{a}{a-b}-\frac{a}{a+b}}{\frac{b}{a-b}-\frac{b}{a+b}} \div \dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{b-a}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$ [C U. 1934]

18. $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right).$

19 $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right)\div\left(\dfrac{1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}-\dfrac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}\right)$ [C. U. 1918]

20. $\dfrac{1+\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a-b}{a+b}}\div\dfrac{1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{1-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}\div\dfrac{b}{a}$ [C. U 1859]

21. $x=\dfrac{a^2}{a-b}$ হইলে, $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{x-b}{a}$ এর মান নির্ণয় কর।

[W. B. S. F. 1955]

22. $\dfrac{\frac{2a+3b-4c}{2a-3b+4c}+\frac{3b+4c-2a}{3b-4c+2a}+\frac{4c+2a-3b}{4c-2a+3b}+3}{\frac{2a}{2a-3b+4c}+\frac{3b}{3b-4c+2a}+\frac{4c}{4c-2a+3b}}.$

23. $\dfrac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}.$ [C. U. 1880]

24. $\left[\dfrac{b+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{(a-b)b}{1+ab}}-\dfrac{a-\frac{a-b}{1-ab}}{1-\frac{(a-b)a}{1-ab}}\right]\div\left\{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right\}.$ [P. U. 1898]

10

অভেদ (Identity)

10·1. অভেদ (Identity) : দুইটি বীজগণিতীয় রাশিমালার মধ্যে একটি সমান চিহ্ন '=' থাকিলে, এবং উহাদের ভিতর যে অক্ষরগুলি আছে তাহাদের কোনও মানের জন্ম উভয় পক্ষের রাশিমালা দুইটির সমতা অক্ষুণ্ণ থাকিলে ঐ সমতাকে **অভেদ** বলে। অভেদ দুই প্রকার,—**নিরপেক্ষ অভেদ** (Unconditional Identity) ও **সাপেক্ষ অভেদ** (Conditional Identity)। যখন কোনও অভেদ শর্তের উপর নির্ভর করে না তাহাকে নিরপেক্ষ অভেদ, এবং যখন কোনও শর্তের উপর নির্ভর করে তাহাকে সাপেক্ষ অভেদ বলে।

10·2. নিয়ম : (*a*) সাধারণতঃ একপক্ষ রাশিমালা লইয়া সরল ও রূপান্তরিত করিয়া অন্তপক্ষের সমান করিতে হয়।

(*b*) যে পক্ষ অধিকতর জটিল তাহাকে লওয়াই সুবিধাজনক।

(*c*) উভয় পক্ষকেই রূপান্তরিত করিয়া একই রাশির সমান দেখাইতেও পারা যায়।

(*d*) সর্বশেষে '**প্রমাণিত হইল**' লিখিতে হয়, কিংবা '**সুতরাং**' লিখিয়া **প্রদত্ত অভেদটি লিখিতে হয়।**

প্রশ্নমালা 10 A

[1 হইতে 9 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

প্রমাণ কর :

1. $(2x+3y)^2+(2x-3y)^2=2(4x^2+9y^2)$.

বামপক্ষ $=4x^2+12xy+9y^2+4x^2-12xy+9y^2$

$=2(4x^2+9y^2)=$ ডানপক্ষ। $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

2. $(1+xy)^2-(1-x^2)(1-y^2)=(x+y)^2$.

বামপক্ষ $=1+2xy+x^2y^2-1+x^2+y^2-x^2y^2$

$=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2=$ ডানপক্ষ। $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

3. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ [C. U. 1926]

বামপক্ষ $=a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2$

$=a^2c^2+b^2d^2+2abcd+a^2d^2+b^2c^2-2abcd$

$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=$ ডানপক্ষ। $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

4. $(2x+y)^2-2x(2x+y)+x^2=(x+2y)^2-2y(x+2y)+y^2$.

বামপক্ষ $=(2x+y)^2-2x(2x+y)+x^2=\{(2x+y)-x\}^2$

$=(x+y)^2=(x+2y-y)^2=(x+2y)^2-2y(x+2y)+y^2$

= ডানপক্ষ। ∴ প্রমাণিত হইল।

5. $(a+b+c-d)(d+c-a-b)=c^2-(a+b-d)^2$.

6. $x(x-1)(x-2)+x+3x(x-1)=x^3$.

7. $(x+2y+z)^3+(2x+y+2z)^3$
$+9(x+y+z)(x+2y+z)(2x+y+2z)=27(x+y+z)^3$.

8. $(ax+by)^2-(bx-ay)^2=(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$.

9. $(1-y^2)(1-z^2)-(x+yz)^2=(1-z^2)(1-x^2)-(y+zx)^2$
$=(1-x^2)(1-y^2)-(z+xy)^2$.

10. $(x+2)(y+2)+2(x-1)(y-1)=(x-2)(y-2)+2(x+1)(y+1)$.

11. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$.

12. $(a^4-b^4)(x^4-y^4)=\{(ax+by)^2+(ay-bx)^2\}$
$\{(ax+by)^2-(ay+bx)^2\}$.

13. $(1+x^2)(1-y^2)-(x+y)^2=1-2xy+x^2y^2$.

14. $(x+y-z)(x-y+z)-x^2=-(y-z)^2$.

15. $(a+b)(a+c)-a^2=(b+c)(b+a)-b^2=(c+a)(c+b)-c^2$.

16. $(a+c)^3-(b+c)^3-6(a+c)(b+c)(a-b)=(a-b)^3$.

17. $(b-c)^2+(a-b)(a-c)=(c-a)^2+(b-c)(b-a)$
$=(a-b)^2+(c-a)(c-b)$.

18. $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1=(a^2-5a+5)^2$.

19. $(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=3(x-y)(y-z)(z-x)$.
[B. U. 1865]

20. $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$. [C. U. 1903]

প্রশ্নমালা 10 B

[1 হইতে 16 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. যদি $bc+ca+ab=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0.$$

[W. B. S. F. 1962, '65, C. U. '51, '45, '27]

∵ $bc+ca+ab=0$; ∴ $ca+ab=-bc$, $ab+bc=-ca$, $bc+ca=-ab$;

$\therefore$ বামপক্ষ $= \dfrac{1}{a^2+ca+ab}+\dfrac{1}{b^2+ab+bc}+\dfrac{1}{c^2+bc+ca}$

$= \dfrac{1}{a(a+c+b)}+\dfrac{1}{b(b+a+c)}+\dfrac{1}{c(c+b+a)}$

$= \dfrac{bc+ca+ab}{abc(a+b+c)} = \dfrac{0}{abc(a+b+c)} = 0.$ প্রমাণিত হইল।

2. যদি $2s=a+b+c$ হয় তবে প্রমাণ কর যে,

$$s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2=a^2+b^2+c^2.$$

বামপক্ষ $= s^2+s^2-2as+a^2+s^2-2bs+b^2+s^2-2cs+c^2$

$= 4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$ [$a+b+c=2s$]

$= 4s^2-2s.2s+a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2$. $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

3. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

[W. B. S. F '65, C. U. 1954]

$\because$ $a+b+c=0$, $\therefore$ $a+b=-c$; $(a+b)^3=(-c)^3=-c^3$

বা, $a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3$, [কিন্তু $a+b=-c$]

$\therefore$ $a^3+b^3+3ab(-c)=-c^3$ বা, $a^3+b^3-3abc=-c^3$.

বা, $a^3+b^3+c^3=3abc$ [পক্ষান্তর করিয়া] $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

4. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ [C. U. 1943]

$\because$ $a+b+c=0$, $\therefore$ $a+b=-c$, $(a+b)^2=c^2$

বা, $a^2+b^2+2ab=c^2$ বা, $a^2+b^2-c^2=-2ab$

$\therefore$ $(a^2+b^2-c^2)^2=(-2ab)^2=4a^2b^2$

বা, $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=4a^2b^2$

বা, $a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-4a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=0$

বা, $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2=0$

$\therefore$ $a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$

$=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

5. যদি $x+y=2z$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=1$$ [C. U. 1953]

$\because$ $x+y=2z$; $\therefore$ $x+y=z+z$; বা, $x-z=z-y$.

বামপক্ষ $= \dfrac{x}{x-z}-\dfrac{z}{z-y}=\dfrac{x}{x-z}-\dfrac{z}{x-z}=\dfrac{x-z}{x-z}=1$. $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

6. যদি $2s=a+b+c$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$$s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)$$
$$=ab+bc+ca.$$ [C. U. 1953]

বামপক্ষ $=s^2+s^2-as-bs+ab+s^2-bs-cs+bc+s^2-cs-as+ca$
$=4s^2-2s(a+b+c)+ab+bc+ca$
$=4s^2-2s.2s+ab+bc+ca$ [$\because$ $a+b+c=2s$]
$=4s^2-4s^2+ab+bc+ca=ab+bc+ca=$ ডানপক্ষ।
$\therefore$ প্রমাণিত হইল।

7. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2$$
$$=3\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$ [W.B.S.F. Comp. 1965]

8. যদি $x=\dfrac{4ab}{a+b}$ হয়, দেখাও যে,
$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2.$$ [C.U. 1953, D.B. '32]

$\because$ $x=\dfrac{4ab}{a+b}$; $\therefore$ $x(a+b)=4ab$; $ax+bx=4ab.$

বামপক্ষ $=\dfrac{x+2a}{x-2a}-1+\dfrac{x+2b}{x-2b}-1+2$

$=\dfrac{x+2a-x+2a}{x-2a}+\dfrac{x+2b-x+2b}{x-2b}+2$

$=\dfrac{4a}{x-2a}+\dfrac{4b}{x-2b}+2=\dfrac{4ax-8ab+4bx-8ab}{(x-2a)(x-2b)}+2$

$=\dfrac{4x(a+b)-16ab}{(x-2a)(x-2b)}+2=\dfrac{4\times4ab-16ab}{(x-2a)(x-2b)}+2$

$=\dfrac{16ab-16ab}{(x-2a)(x-2b)}+2=\dfrac{0}{(x-2a)(x-2b)}+2$

$=2=$ ডানপক্ষ। $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

9. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab.$$
[C. U. 1923, D.B. '29, '27 ; W. B. S. F. Comp. 1965]

$\because$ $a+b+c=0$ $\therefore$ $a=-b-c$, উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করিয়া
$a^2=-ab-ac.$ তদ্রূপ $b^2=-ab-bc$ এবং $c^2=-ac-bc$

এক্ষণে $a^2-bc=-ab-ac-bc=-(ab+bc+ca),$
$b^2-ca=-ab-bc-ca=-(ab+bc+ca),$
$c^2-ab=-ac-bc-ab=-(ab+bc+ca).$

$\therefore\ a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab.\quad\therefore$ প্রমাণিত হইল।

10. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2=a^2+ab+b^2.$ [C. U. '26, '54]

$\because\ a+b+c=0.\quad\therefore\ a=-b-c\quad\therefore\ a^2=-ab-ac.$

অনুরূপে, $b^2=-ab-bc$ এবং $c^2=-ac-bc.$

এক্ষণে, $a^2+ab+b^2=-ab-ac+ab-ab-bc=-(ab+bc+ca),$

$b^2+bc+c^2=-ab-bc+bc-ac-bc=-(ab+ac+bc),$

$c^2+ca+a^2=-ac-bc+ac-ab-ac=-(bc+ab+ac),$

$\therefore\ a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2.\quad\therefore$ প্রমাণিত হইল।

11. $a+\frac{1}{b}=1$ এবং $b+\frac{1}{c}=1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(1) $c+\frac{1}{a}=1.$ (2) $abc+1=0.$ [C. U. '48, '40]

$a+\frac{1}{b}=1\quad\therefore\ a=1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b},\quad\therefore\ \frac{1}{a}=\frac{b}{b-1}.$

$b+\frac{1}{c}=1\quad\therefore\ \frac{1}{c}=1-b,\quad\therefore\ c=\frac{1}{1-b}.$

$\therefore\ c+\frac{1}{a}=\frac{1}{1-b}+\frac{b}{b-1}=\frac{1}{1-b}-\frac{b}{1-b}=\frac{1-b}{1-b}=1.$

(2) $abc+1=\frac{b-1}{b}.b.\frac{1}{1-b}+1=-\frac{b-1}{b}.b.\frac{1}{b-1}+1$

$=-1+1=0.\quad\therefore$ প্রমাণিত হইল।

12. যদি $x+y=1+xy$ হয়, প্রমাণ কর যে $x^3+y^3=1+x^3y^3.$

[W. B. S. F. 1959]

13. যদি $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+\frac{1}{a^3}=0$ [W.B.S.F. '57]

14. যদি $2s=a+b+c$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$(s-a)^2+(s-b)(s-c)+as=a^2+bc.$ [W. B. S. F. 1961]

15. যদি $2x=\frac{ab}{a+b}$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$\frac{x+a}{b-x}+\frac{x-a}{b+x}+\frac{ab}{x^2-b^2}=0.$ [W. B. S. F. 1959]

16. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=3abc.$ [W. B. S. F. 1957]

17. যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয়,
তবে দেখাও যে $a=b=c$, নতুবা $a+b+c=0.$

18. যদি $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$(ad-bc)(ad+bc)=(a-c)(a+c).$ [W. B. S. F. 1956]

19. যদি $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^3-\frac{1}{x^3}=a^3-\frac{1}{a^3}.$

20. যদি $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$ হয়,
প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc.$ [W.B.S.F. 1954]

ইঙ্গিত : $(b+c-a)x=2$, $\therefore$ $\frac{b+c-a}{2}=\frac{1}{x}$,

অনুরূপে $\frac{c+a-b}{2}=\frac{1}{y}$. এবং $\frac{a+b-c}{2}=\frac{1}{z}$.

$\left\{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right\}=\frac{1}{2}(c+a-b+a+b-c)=a$;

এইরূপে অপর দুইটি উৎপাদক দেখাও।

21. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(b+c)(b+a)}+\frac{1}{(c+a)(c+b)}=0$ [W. B. S. F. '65]

22. যদি $a+b+c=0$ হয়, দেখাও যে,
$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

23. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2a^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}=1.$ [C. U. 1906]

24. যদি $a+b=2c$ হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{(a-c)}+\frac{c}{b-c}=1.$

25. যদি $ab+bc+ca=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$\frac{a^2}{a^2-bc}+\frac{b^2}{b^2-ca}+\frac{c^2}{c^2-ab}=1.$ [C.U. '51, D.B.'37, G.U.'55]

26. যদি $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1.$ [C.U. '49, '42]

27. যদি $a=x^2-yz$, $b=y^2-zx$, $c=z^2-xy$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$a^3+b^3+c^3-3abc=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$ [C. U. 1944]

28. $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{2}{a+b}$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$a^2+b^2=2c^2$. [C. U. '47, '48]

29. $a+2b+3c=0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{2c}{a+c}-\frac{a}{b+c}=2.$$ [D. B. 1928]

30. $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}=1$ এবং $a-b+c\neq0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$ [C. U. 1875]

31. $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, [C. U. 1931]
হয়, $a+b+c=0$ নতুবা $a=b=c$.

32. যদি $x=by+cz$, $y=cz+ax$, $z=ax+by$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1.$$ [D. B. 1955]

33. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}$$ [C. U. '41, D. B. '42]

$$\because \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}.$$

$\therefore$ $(bc+ca+ab)(a+b+c)=abc$.

বা, $(bc+ca+ab)(a+b+c)-abc=0$

বা, $(a+b)(b+c)(c+a)=0$. তিনটি সংখ্যার গুণফল 0 হইলে, উহাদের যে কোনও একটি 0 হইবে। যদি $a+b=0$ তবে $a=-b$, $a^3=-b^3$.

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{-b^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{c^3}.$$

$$\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{-b^3+b^3+c^3}=\frac{1}{c^3}.$$

$$\frac{1}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{(-b+b+c)^3}=\frac{1}{c^3}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$

$\therefore$ প্রমাণিত হইল।

34. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$. [W.B.S.F. 1952]

35. যদি $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ হয়,
প্রমাণ কর যে, $a=b=c=d$. [W.B.S.F. 1952]

11

সরল সমীকরণ

Simple Equation

11·1. সমীকরণের উভয়পক্ষ জটিল হইলে উহাদের **সর্বপ্রথম সরল করিতে হইবে, তাহার পর পক্ষান্তর করিয়া x-যুক্ত রাশিগুলি বামপক্ষে এবং x-বর্জিত রাশিগুলি ডানপক্ষে রাখিয়া সমাধান করিতে হয়।**

11·2. সামান্য ভগ্নাংশ সম্বলিত সমীকরণে যখন লবে অজ্ঞাত রাশি x-থাকে তখন হরগুলির ল. সা. গু. বাহির করিয়া উহা দ্বারা উভয় পক্ষের প্রত্যেক পদকে গুণ করিলে ভগ্নাংশ পদগুলি ভগ্নাংশ-বর্জিত হইয়া সাধারণ আকারের সরল সমীকরণে পরিণত হইবে। মনে রাখিতে হইবে যে, গুণ করিবার সময় প্রত্যেক লবকে বন্ধনীভুক্ত করিয়া গুণ করিলে ভুল হইবার সম্ভাবনা থাকে না।

11·3. বজ্রগুণন, তির্যক গুণন বা আড় গুণন : ইহাকে ইংরাজীতে বলে 'Multiplying up' অথবা 'Multiplying across'. কেহ কেহ 'Cross multiplication'ও বলেন। দুইটি ভগ্নাংশ সমান হইলে **প্রথমটির লব × দ্বিতীয়টির হর = প্রথমটির হর × দ্বিতীয়টির লব।** অর্থাৎ যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে $ad=bc$.

প্রমাণ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; b ও dর ল. সা. গু. bd দিয়া উভয় পক্ষকে গুণ করিলে

$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$, বা $ad=bc$.

11·4. দশমিক ভগ্নাংশ-সম্বলিত সমীকরণের সমাধান : দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া সমাধান করা যায়। অনেক সময় না করিয়াও সমাধান করা যায়।

প্রশ্নমালা 11 A

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সমাধান কর :

1. $\frac{4x+3}{5}+\frac{5x-4}{9}=\frac{7x-11}{15}$. হরগুলির ল. সা. গু. $=45$.

∴ $45\times\frac{(4x+3)}{5}+45\times\frac{(5x-4)}{9}=45\times\frac{(7x-11)}{15}$

বা, $9(4x+3)+5(5x-4)=3(7x-11)$

বা, $36x+27+25x-20=21x-33$

বা, $36x+25x-21x=20-27-33$

বা, $40x=-40$, ∴ $x=-1$.

2. $\frac{6x-3}{2x+7}=\frac{3x-2}{x+5}$.

বা, $(6x-3)(x+5)=(3x-2)(2x+7)$ [তির্যক্ গুণন করিয়া]

বা, $6x^2+27x-15=6x^2+17x-14$

বা, $6x^2-6x^2+27x-17x=15-14$

বা, $10x=1$, ∴ $x=\frac{1}{10}$.

3. $\frac{x}{\cdot 5}-\frac{1}{\cdot 05}+\frac{x}{\cdot 005}-\frac{1}{\cdot 0005}=0$. [C. U. 1883]

বা, $\frac{x}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{1}{20}}+\frac{x}{\frac{1}{200}}-\frac{1}{\frac{1}{2000}}=0$. [দশমিকগুলি ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করা হইল।]

বা, $2x-20+200x-2000=0$ বা, $202x=2020$, ∴ $x=10$.

4. $\frac{a}{x-a}-\frac{b}{x-b}=\frac{a-b}{x-c}$.

5. $\frac{ax+b}{a+b}=\frac{cx-d}{c-d}$. বজ্রগুণন ও পক্ষান্তর করিতে হইবে।

বা, $(ax+b)(c-d)=(cx-d)(a+b)$

বা, $acx-adx-acx-bcx=bd-bc-ad-bd$

বা. $x(-ad-bc)=(-ad-bc)$ ∴ $x=1$

6. $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$. [D. B. 1937]

7. $\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-4)=2\frac{7}{15}$. [C. U. 1901]

8. $\frac{1}{3}(2-x)+\frac{1}{4}(3-x)+\frac{1}{5}(4-x)+\frac{1}{6}(5-x)+\frac{3}{4}=0$. [C. U. 1900]

9. $1\cdot 2x-\frac{\cdot 18x-\cdot 05}{\cdot 05}=\cdot 4x+8\cdot 9$. [B. U. 1941]

10. $\cdot 5x+\frac{\cdot 02x+\cdot 07}{\cdot 03}-\frac{x+2}{2}=9\cdot 5$. [C. U. 1933]

11. $\frac{4-x}{4}-\frac{5-x}{5}+\frac{6-x}{6}=1$. [C. U. 1923]

12. $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}$. [W.B.S.F. 1955]

13. $\frac{1}{2}\left(x-\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{3}\left(x-\frac{a}{4}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{a}{5}\right)=0.$ [C. U. 1866]

14. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0.$ [C. U. 1914]

15. $\frac{6x-7}{4x-5}=\frac{3x-4}{2x-3}.$

16. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-6}{x+3}=2.$

17. $\frac{1}{4}(x+3)-\frac{1}{5}(x+4)=\frac{1}{6}(x+5)-\frac{1}{7}(x+6)$ [W. B. S. F. 1957]

18. $\frac{a}{bx}-\frac{b}{ax}=a^2-b^2.$

19. $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-c}{b-c}=2.$

20. $\frac{x+a+c}{x+b+c}=\frac{b}{a}.$

21. $\frac{x}{p+q}+\frac{x}{p-q}=\frac{2pq}{p^2-q^2}.$

11·5. একান্তর প্রক্রিয়া (Alternendo) **:** অনেক সময় একান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা সমীকরণকে সুবিধামত আকারে পরিণত করিয়া অতি সহজেই সমাধান করা যায়। যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তাহা হইলে $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ হইবে। ইহাকে একান্তর প্রক্রিয়া বলে। অর্থাৎ $\frac{\text{প্রথমটির লব}}{\text{দ্বিতীয়টির লব}}=\frac{\text{প্রথমটির হর}}{\text{দ্বিতীয়টির হর}}$. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; উভয় পক্ষকে $\frac{b}{c}$ দিয়া গুণ করা হইল। $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$, সুতরাং $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

11·6. সুবিধামত পদসংযোগ ও পক্ষান্তর : এই প্রণালীতে সুবিধামত উভয়পক্ষের পদগুলি পক্ষান্তর করিয়া সমাধান করা হয়। দেখিতে হইবে যে লবে x-বর্জিত রাশি বা একই রাশি যেন হয়। হরে x-এর একাধিক ঘাত বিশিষ্ট রাশি থাকিলে উহাদের সহগগুলি যেন সমান হয়।

11·7. পদ বিশ্লেষণ প্রণালী : এই প্রণালীতে কোনও পদকে কয়েকটি অংশে বিভক্ত করিয়া পক্ষান্তর করা হয়। ইহাতেও পূর্বের ন্যায় দেখিতে হয় যে লবে x-বর্জিত রাশি বা একই রাশি যেন থাকে। ইত্যাদি।

11·8. ভাগ প্রক্রিয়া : অনেক সময় দেখা যায় যে, প্রত্যেক পদের হর দিয়া লবকে ভাগ করিয়া লইলে সমাধান সহজতর হয়।

প্রশ্নমালার মধ্যে উদাহরণগুলি লক্ষ্য করিলে বিষয়টি সরল হইবে।

প্রশ্নমালা 11 B

[1 হইতে 15 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সমাধান কর :

1. $\frac{x-8}{x-10}-\frac{x-5}{x-7}=\frac{x-7}{x-9}-\frac{x-4}{x-6}$. [B. U. 1887]

প্রতি পদের হর দ্বারা উহার লবকে ভাগ করিয়া রাখিতে হইবে। অর্থাৎ প্রথমপদ $=\frac{(x-10)+2}{x-10}=1+\frac{2}{x-10}$ এইরূপ। [অনুচ্ছেদ 11·8]

$$\frac{x-8}{x-10}-\frac{x-5}{x-7}=\frac{x-7}{x-9}-\frac{x-4}{x-6}.$$

বা, $\frac{(x-10)+2}{x-10}-\frac{(x-7)+2}{x-7}=\frac{(x-9)+2}{x-9}-\frac{(x-6)+2}{x-6}$

বা, $1+\frac{2}{x-10}-1-\frac{2}{x-7}=1+\frac{2}{x-9}-1-\frac{2}{x-6}$,

বা, $2\left[\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-7}\right]=2\left[\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-6}\right]$;

বা, $\frac{3}{(x-10)(x-7)}=\frac{3}{(x-9)(x-6)}$;

বা, $(x-10)(x-7)=(x-9)(x-6)$;

বা, $x^2-17x+70=x^2-15x+54$;

বা, $15x-17x=54-70$; বা, $-2x=-16$; $\therefore\ x=8$

2. $\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x+2}=\frac{7}{x+3}$. [C. U. 1931]

ডানপক্ষকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে প্রকাশ করিতে হইবে। $7=4+3$.

সুতরাং $\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x+2}=\frac{4}{x+3}+\frac{3}{x+3}$. [অনুচ্ছেদ 11·7]

বা, $\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+3}=\frac{4}{x+3}-\frac{4}{x+2}$; [পক্ষান্তর প্রক্রিয়া]

বা, $\frac{3x+9-3x-3}{(x+1)(x+3)}=\frac{4x+8-4x-12}{(x+3)(x+2)}$;

বা, $\frac{6}{(x+1)(x+3)}=\frac{-4}{(x+3)(x+2)}$;

বা, $\frac{3}{x+1}=\frac{-2}{x+2}$ [উভয় পক্ষকে 2 দিয়া ভাগ ও $x+3$ দিয়া গুণ করিয়া]

বা, $3x+6=-2x-2$; [আড় গুণন] বা, $3x+2x=-6-2$;

বা, $5x=-8$; $\therefore\ x=-\frac{8}{5}=-1\frac{3}{5}$.

3. $\frac{6}{3x-5}-\frac{1}{x-5}=\frac{2}{2x-5}$. [C. U. 1871]

4. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a+c}+\frac{1}{x+b-c}$. [C. U. 1954]

$$\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a+c}=\frac{1}{x+b-c}-\frac{1}{x+b};$$

[পক্ষান্তর প্রক্রিয়া ; অনুচ্ছেদ 11·6]

বা, $\frac{x+a+c-x-a}{(x+a)(x+a+c)}=\frac{x+b-x-b+c}{(x+b-c)(x+b)}$;

বা, $\frac{c}{(x+a)(x+a+c)}=\frac{c}{(x+b-c)(x+b)}$.

বা, $\frac{1}{(x+a)(x+a+c)}=\frac{1}{(x+b-c)(x+b)}$; [$c$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $(x+b-c)(x+b)=(x+a)(x+a+c)$; [বজ্রগুণন বা আড় গুণন]

বা, $x^2+2bx+b^2-cx-bc=x^2+2ax+a^2+cx+ac$;

বা, $x^2-x^2+2bx-cx-2ax-cx=a^2-b^2+ac+bc$;

বা, $-2x(a-b+c)=(a+b)(a-b)+c(a+b)$;

বা, $-2x(a-b+c)=(a+b)(a-b+c)$;

[উভয় পক্ষকে $-2(a-b+c)$ দিয়া ভাগ করা হইল]

বা, $x=-\frac{a+b}{2}=-\frac{1}{2}(a+b)$.

5. $\frac{x+a}{b+c}+\frac{x+b}{c+a}+\frac{x+c}{a+b}=-3$ [D. B. 1948]

-3কে পক্ষান্তর করিয়া 3 হইল। এইবার $3=1+1+1$. প্রত্যেক পদের সহিত 1 যোগ করিতে হইবে। অতএব

$$\left(\frac{x+a}{b+c}+1\right)+\left(\frac{x+b}{c+a}+1\right)+\left(\frac{x+c}{a+b}+1\right)=0,$$ [অনুচ্ছেদ 11·6]

বা, $\frac{x+a+b+c}{b+c}+\frac{x+b+c+a}{c+a}+\frac{x+c+a+b}{a+b}=0$,

বা, $(x+a+b+c)\left\{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right\}=0$,

[বন্ধনী দিতে ভুলিবে না।]

দুইটি রাশির গুণফল শূন্য হইলে উহাদের মধ্যে অন্ততঃ একটির মান, শূন্য হওয়া প্রয়োজন, কিন্তু x-বর্জিত ডানদিকের রাশিটি শূন্য হইতে পারে না।

$\therefore\ x+a+b+c=0.\ \ \therefore\ x=-(a+b+c)$.

6. $\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}+\dfrac{x-ab}{a+b}=a+b+c.$ [C. U. 1905, 1953]

$\dfrac{x-bc}{b+c}+\dfrac{x-ca}{c+a}+\dfrac{x-ab}{a+b}=a+b+c$; [অনুচ্ছেদ 11·6]

বা, $\left(\dfrac{x-bc}{b+c}-a\right)+\left(\dfrac{x-ca}{c+a}-b\right)+\left(\dfrac{x-ab}{a+b}-c\right)=0.$ [পক্ষান্তর প্রক্রিয়া]

[এইবার 5নং অঙ্কের ন্যায় কষ]

7. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2=\dfrac{x+2}{x+4}.$ [অনুচ্ছেদ 11·5] [C. U. '49, D. B. '43]

বা, $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2=\dfrac{x+2}{x+4}$; বা, $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x+4}=\dfrac{x+2}{x+4}$;

বা, $\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}=\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}.$ [একান্তর প্রক্রিয়া]

বা, $x+\dfrac{1}{x+2}=x+\dfrac{4}{x+4}$; [প্রত্যেক পদের হর দ্বারা লবকে ভাগ করা হইল]

বা, $\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x+4}$; $4x+8=x+4$; বা, $4x-x=4-8$;

বা, $3x=-4$; $\therefore\ x=-\dfrac{4}{3}=-1\dfrac{1}{3}.$

8. $\dfrac{(x+2)(x+6)}{(x+4)(x+5)}=\dfrac{x+8}{x+9}.$ [C. U. 1949]

বা, $\dfrac{(x+2)(x+6)}{(x+4)}=\dfrac{(x+8)(x+5)}{(x+9)}$;

[উভয় পক্ষকে $x+5$ দিয়া গুণ করা হইল]

বা, $\dfrac{x^2+8x+12}{x+4}=\dfrac{x^2+13x+40}{x+9}$;

বা, $x+4-\dfrac{4}{x+4}=x+4+\dfrac{4}{x+9}$; [লবকে হর দ্বারা ভাগ করা হইল]

বা, $\dfrac{-1}{x+4}=\dfrac{4}{x+9}$; [4 দিয়া ভাগ করা হইল]

বা, $\dfrac{-1}{x+4}=\dfrac{4}{x+9}$; বা, $x+4=-x-9$; বা, $x+x=-9-4$;

বা, $2x=-13$; $\therefore\ x=-\dfrac{13}{2}=-6\dfrac{1}{2}.$

9. $\frac{b}{x}=\frac{a}{x+a-b}$.   10. $\frac{2}{x-a}+\frac{2}{x+a}=\frac{9a}{x^2-a^2}$. [D.B. 1947]

11. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{5}=9$.   12. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$.

13. $\frac{8}{2x+1}+\frac{5}{2x-11}=\frac{5}{2x+5}$.   14. $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$. [C.U. '41]

15. $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)}=\frac{x+5}{x+8}$. [C. U. 1944]

16. $\frac{x+5}{x+4}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-15}{x-16}$.

17. $\frac{5x-8}{x-2}+\frac{6x-44}{x-7}=\frac{10x-8}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$.

18. $\frac{5}{5x-4}+\frac{6}{4x-3}=\frac{5}{2x-1}$. [W. B. S. F. '68]   19. $\frac{6x+1}{15}-\frac{2x-1}{5}=\frac{2x-4}{7x-16}$. [W. B. S. F. '67]

20. $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$. [S. F. '60, '57]

21. $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}=\frac{5}{x+3}$.   22. $\frac{3}{x+2}+\frac{4}{x-4}=\frac{7}{x-2}$. [S. F. '59]

23. $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}$. [S. F. '56]

24. $\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-13}-\frac{1}{x-11}$. [S. F. '54

25. $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-8}$. [C. U. '51]

26. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$. [C. U. '47]

27. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}=\frac{2}{x+b}$. [C.U. '50].   28. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}$.

29. $\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-ab}{c+a}+\frac{x-ca}{a+b}=3a$.

30. $\frac{x+b+c}{1+bc}+\frac{x+c+a}{1+ca}+\frac{x+a+b}{1+ab}+a+b+c=0$.

31. $\frac{bc(ax-1)}{b+c}+\frac{ca(bx-1)}{c+a}+\frac{ab(cx-1)}{a+b}=a+b+c.$ [C. U. 1902]

32. $\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=2(a+b+c)$ [C. U. 1906]

ডানপক্ষ$=b+c$, $c+a$, $a+b$, এইগুলি পক্ষান্তর করিয়া বিয়োগ কর।]

33. $\frac{x+a^3+2b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{x+b^3+2c^3}{c^2+ca+a^2}+\frac{x+c^3+2a^3}{a^2+ab+b^2}=0.$

[$0=(b-c)+(c-a)+(a-b)$, এইবার পক্ষান্তর কর।]

34. $\frac{x-a^2}{b+c}+\frac{x-b^2}{c+a}+\frac{x-c^2}{a+b}=4(a+b+c).$ [C. U. 1908]

[ডানপক্ষ$=(2a+b+c)+2b+c+a)+(2c+a+b)$, এইবার পক্ষান্তর কর]

35. $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+a+b+c=0.$ [C. U. 1942]

36. $\frac{(x+6)(x+10)}{(x+5)(x+7)}=\frac{(x+9)(x+1)}{(x+2)(x+4)}.$

37. (a) $\left(\frac{x-5}{x-6}\right)^3=\frac{x-4}{x-7}.$ (b) $\left(\frac{3x-28}{3x-26}\right)^3=\frac{x-10}{x-8}.$

(c) $\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^3=\frac{x+2a-b}{x-a+2b}.$ (d) $16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3=\frac{a+x}{a-x}.$

38. $\frac{2x+3}{x+1}=\frac{4x+5}{4x+4}+\frac{3x+3}{3x+1}.$ 39. $\frac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\frac{x(x-c)-b(x-c)}{x-b-c}$

40. $\frac{x+4a+b}{x+a+b}+\frac{4x+a+2b}{x+a-b}=5.$ [C. U. 1947]

12

দুইটি অজ্ঞাত রাশি-বিশিষ্ট সহ-সমীকরণ

Simultaneous Equations involving two unknowns

12·1. সরল সমীকরণে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি (x) থাকে, এবং সমীকরণও মাত্র একটি থাকে। সহ-সমীকরণে একাধিক অজ্ঞাত রাশি থাকে ; এবং যে কয়টি অজ্ঞাত রাশি আছে সমীকরণও সেই কয়টি থাকে। এখন দুইটি অজ্ঞাত রাশি এবং সেইজন্য দুইটি নিরপেক্ষ সমীকরণের কথা আলোচনা করা হইবে।

12·2. **সহ-সমীকরণ** (Simultaneous Equation): $2x-y=3$ একটি সমীকরণ। ইহাতে দুইটি অজ্ঞাত রাশি x ও y আছে। এখন $x=0$ হইলে $y=-3$ হইবে, তদ্রূপ $x=1$ হইলে $y=-1$ হইবে ; $x=2$ হইলে $y=1$; $x=-2$ হইলে $y=-7$ প্রভৃতি অসংখ্য x ও y-র মান হইতে পারে, যদ্বারা $2x-y=3$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

$x+3y=5$ আর একটি সমীকরণ। ইহারও x ও y-র অসংখ্য মান লইলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। কিন্তু x-এর মান মাত্র একটি ও y-এর মান মাত্র একটি এরূপ যদি স্থির করা যায় যে ঐ দুইটি নির্দিষ্ট মান দিয়া প্রথম ও দ্বিতীয় সমাকরণ উভয়ই যুগপৎ (Simultaneously) সিদ্ধ হয়, তখন ঐ সমীকরণ দুইটিকে **সহ-সমীকরণ** বলে। $x=2$ এবং $y=1$ হইলে দুইটি সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

সংজ্ঞা : দুই বা ততোধিক অজ্ঞাত রাশির প্রত্যেক রাশির যখন মাত্র একটি নির্দিষ্ট মান দ্বারা দুই বা ততোধিক সমীকরণসমূহ যুগপৎ সিদ্ধ হয়, তখন ঐ সমীকরণগুলিকে সহ-সমীকরণ বলে।

দুইটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট এক ঘাত দুইটি সমীকরণ, অজ্ঞাত রাশি দুইটির **একই** নির্দিষ্ট মান দ্বারা যুগপৎ সিদ্ধ হইলে, **একঘাত সহ-সমীকরণ** (Simultaneous Linear Equation) বলে।

12·3. সহ-সমীকরণের প্রত্যেক সমীকরণ সম্পূর্ণ নিরপেক্ষ ও স্বাধীন (Independent) হইতে হইবে। নচেৎ বীজ নির্ণয় অসম্ভব হইবে। যেমন, $2x-y=3$, $4x-3=2y+3$, এই দুই সহ-সমীকরণের একটি অপরটি হইতে পাওয়া যায়। ইহাদের আকার ভিন্ন হইলেও মূলতঃ ইহারা অভিন্ন। এইরূপ সমীকরণের সমাধান অসম্ভব।

সমীকরণের সংখ্যা কম হইলেও সমাধান-যোগ্য নহে। দুইটি অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সমীকরণের জন্য দুইটি সমীকরণের অবশ্যই প্রয়োজন। সমীকরণের সংখ্যা কম থাকিলে উহাকে অনির্ণেয় সমীকরণ বা অনির্ণেয় সহ-সমীকরণ (Indeterminate Equations) বলে।

12·4. সাধারণতঃ **চারিটি** প্রণালীতে সহ-সমীকরণ সমাধান করা হয়। সব কয়টি প্রণালীই ভালভাবে জানা প্রয়োজন।

12·5. প্রথম প্রণালী : ~~একটি সমীকরণ হইতে~~ যে কোনও একটি অজ্ঞাত রাশির মান অপর অজ্ঞাত রাশির দ্বারা প্রকাশ করিতে হইবে। এইরূপে আর একটি সমীকরণ হইতেও ঐ অজ্ঞাত রাশির মান অপর অজ্ঞাত রাশি দ্বারা প্রকাশ করা হইলে, উভয় মান সমান করিয়া অপর অজ্ঞাত রাশিটি সমাধান করিয়া বাহির করা হয়। ইহাকে **তুলনা পদ্ধতিও** বলে।

উদাহরণ : সমাধান কর : $5x-3y=1$; $5y-3x=9$.

প্রথম সমীকরণ হইতে $5x-3y=1$; বা, $-3y=1-5x$;

বা, $y=\dfrac{1-5x}{-3}$; বা, $y=\dfrac{5x-1}{3}$,

দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে $5y-3x=9$; বা, $5y=9+3x$;

বা, $y=\dfrac{9+3x}{5}$; এখন y-এর এই দুইটি মান সমান।

সুতরাং, $\dfrac{5x-1}{3}=\dfrac{9+3x}{5}$;

বা, $25x-5=27+9x$; [তির্যক গুণন প্রক্রিয়া]

বা, $25x-9x=27+5$, বা, $16x=32$; $\therefore$ $x=2$;

x-এর এই মান প্রথম সমীকরণে স্থাপন করা হইল,

$5.2-3y=1$; বা, $10-3y=1$; বা, $-3y=1-10$; বা, $-3y=-9$;

$\therefore$ $y=3$. অতএব, $x=2, y=3$.

12·6. দ্বিতীয় প্রণালী : ইহাকে **পরিবর্ত প্রণালী** (Method of Substitution) বলে। যে কোন একটি সমীকরণ হইতে অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করিয়া, দ্বিতীয় সমীকরণে ঐ নির্ণীত মান বসাইয়া সমাধান করিলে একটি সরল সমীকরণ হইবে। উহা সমাধান করিলে যে অজ্ঞাত রাশির মান পাওয়া যাইবে তাহা প্রদত্ত সমীকরণের যে কোনও একটিতে বসাইয়া সমাধান করিলে দ্বিতীয় অজ্ঞাত রাশিটির মান পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ ঃ সমাধান কর ঃ $2x-y=3$; $x+3y=5$.

প্রথম সমীকরণ হইতে y-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে।

$2x-y=3$; বা $-y=3-2x$, বা $y=2x-3$;

y-এর এই মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসান হইল।

$x+3y=5$; বা $x+3(2x-3)=5$; বা $x+6x-9=5$;

বা, $7x=14$ $\therefore$ $x=2$.

x-এর এই মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইতে হইবে। তাহা হইলে y-এর মান পাওয়া যাইবে।

$x+3y=5$; বা $2+3y=5$; $3y=5-2$; বা $3y=3$; বা $y=1$.

$\therefore$ $x=2$; $y=1$.

প্রশ্নমালা 12 A

[1 হইতে 6 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

প্রথম ও দ্বিতীয় প্রণালীর সাহায্যে সমাধান কর ঃ

1. $4x-y=5$, $7x-4y=2$ [C.U. '26]
2. $x+3y=7$, $5x-y=3$ [C. U. '30]
3. $3x-4y=1$, $4x=3y+6$ [C. U. '21]
4. $2x+3y-7=0$, $3x+2y-8=0$ [S. F. '56]
5. $2x+3y=13$, $5x-2y=4$ [C. U. '25]
6. $x+y-3=0$, $4x-5y+6=0$ [S. F. '51]
7. $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y=17$, $\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}y=19$ [P. U. '22]
8. $5x-7y=17$, $8x+3y=13$
9. $3x+4y=27$, $5x-3y=16$
10. $x+2y=3=4x-y$ [S. F. '62]
11. $2x-9y=11$, $3x-12y=15$
12. $2x+y=3=4x-y$ [C. U. '21]
13. $x+y=3(x-y)=6$ [D. B. '41]
14. $13x-12y+15=0$, $8x-7y=0$ [S. F. '61]
15. $17x-7y=52$, $3x=2y$ [S. F. '60]
16. $15x+7y=29$, $9x+15y=39$
17. $8x+5y=1$, $5x+3y=1$ [S. F. '58]
18. $9x+5y=124$, $7x=3y$ [S. F. '57]
19. $2x-y=5$, $3x+2y=11$ [S. F. '55]
20. $x+3y=9$, $4x+y=14$ [S. F. '54]
21. $2x+y=3y-x=7$ [C. U. '13]
22. $3x+4y=11$, $5x-2y=1$ [S. F. '53]

12·7. তৃতীয় প্রণালী বা অপনয়ন প্রণালী (Elimination) **:**

সমীকরণ দুইটির যে কোন অজ্ঞাত রাশির সহগগুলি ল. সা. গু. করিয়া সেই ল. সা. গু-কে একটির সহগ দ্বারা ভাগ করিয়া লব্ধ ভাগফল দ্বারা সেই সেই সমীকরণকে গুণ করিতে হইবে। ইহাতে একটি অজ্ঞাত রাশির সহগ দুইটির পরম মান সমান হইয়া যাইবে। এখন ইহাদের পূর্বে যদি একই চিহ্ন, অর্থাৎ যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন থাকে তাহা হইলে একটি সমীকরণ হইতে অপরটি বিয়োগ করিতে হইবে। যদি বিপরীত চিহ্ন থাকে তাহা হইলে উহাদের যোগ করিতে হইবে। ইহাতে দেখা যায় যে, যোগফলে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি বিশিষ্ট সরল সমীকরণ হইয়াছে। ইহাকে সমাধান করিয়া অজ্ঞাত রাশিটির মান নির্ণয় করিয়া উহা যে কোন একটি প্রদত্ত সমীকরণে বসাইলে অপর অজ্ঞাত রাশিটি বাহির হইয়া যাইবে।

উদাহরণ : সমাধান কর : $5x+12y=3$, $3x+4y=5$.

অজ্ঞাত রাশি x-এর সহগদ্বয় 5 ও 3, উহাদের ল. সা. গু. 15. প্রথম সমীকরণকে $15\div5=3$ দ্বারা এবং দ্বিতীয় সমীকরণকে $15\div3=5$ দ্বারা গুণ করিতে হইবে। কিন্তু y-এর সহগদ্বয় 12 ও 4, উহাদের ল. সা. গু. 12। অতএব এখানে প্রথম সমীকরণকে $12\div12=1$ দিয়া ও দ্বিতীয় সমীকরণকে $12\div4=3$ দ্বারা গুণ করাই সুবিধাজনক। দেখিতে হইবে যে যত ছোট সংখ্যা দ্বারা গুণ করা যায় ততই সুবিধাজনক। অতএব প্রথম সমীকরণকে 1 দিয়া গুণ করিয়া পাওয়া যায় $5x+12y=3$, দ্বিতীয় সমীকরণকে 3 দিয়া গুণ করিলে হইবে $9x+12y=15$. এই দুইটি সমীকরণ এখন বিয়োগ করিলে y-এর অপনয়ন (elimination) হইয়া যাইবে।

$$\begin{array}{l} 9x+12y=15 \\ 5x+12y=\ 3 \\ \hline 4x\qquad\ =12, \end{array}\qquad \therefore\ x=3.$$

এই x-এর মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসান হইল।

$3.3+4y=5$; বা, $4y=5-9$, $4y=-4$; $\therefore\ y=-1$.

সুতরাং $x=3, y=-1$.

12·8. চতুর্থ প্রণালী বা বজ্রগুণন প্রণালী (Method of Cross Multiplication) **:** এই প্রণালী নিম্নের উপপাদ্যের উপর প্রতিষ্ঠিত।

উপপাদ্য : যদি $a_1x+b_1y+c_1=0$ ···(i)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ ···(ii) হয়

এবং $a_1b_2-a_2b_1\neq0$ হয়, তাহা হইলে

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$$ হইবে।

প্রমাণ : (i) নং সমীকরণকে c_2 দিয়া এবং (ii) নং সমীকরণকে c_1 দিয়া গুণ করা হইল।

$a_1c_2x+b_1c_2y+c_1c_2=0$ ...(iii)

$a_2c_1x+b_2c_1y+c_2c_1=0$ ...(iv)

(iv) হইতে (iii) বিয়োগ করা হইল।

$a_2c_1x-a_1c_2x+b_2c_1y-b_1c_2y=0$

বা, $x(a_2c_1-a_1c_2)-y(b_1c_2-b_2c_1)=0$

বা, $x(a_2c_1-a_1c_2)=y(b_1c_2-b_2c_1)$

$\therefore \dfrac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\dfrac{y}{a_2c_1-a_1c_2}$ ...(v)

আবার (i) নং সমীকরণকে a_2 এবং (ii) নং সমীকরণকে a_1 দিয়া গুণ করা হইল।

$a_1a_2x+b_1a_2y+c_1a_2=0$...(vi)

$a_2a_1x+b_2a_1y+c_2a_1=0$...(vii)

(vii) হইতে (vi) বিয়োগ করা হইল।

$b_2a_1y-b_1a_2y+c_2a_1-c_1a_2=0.$

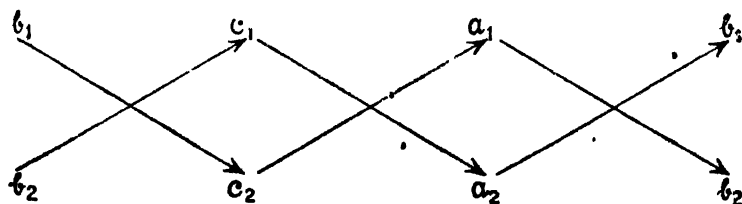
বা, $y(a_1b_2-a_2b_1)=c_1a_2-c_2a_1$

$\therefore \dfrac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$ ...(viii)

$\therefore$ (v) নং ও (viii) নং হইতে পাওয়া গেল—

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

$a_1b_2-a_2b_1$-এর মান শূন্য হইলে উপরের উপপাদ্যটি সিদ্ধ হইবে না ; এবং তখন সমীকরণগুলি সমাধান-যোগ্য নহে।

দ্রষ্টব্য : সমীকরণ দুইটি প্রথমে এরূপভাবে সাজাইতে হইবে যেন সমতা-চিহ্নের ডান দিকে শূন্য থাকে। মনে রাখিবার সুবিধার জন্য সমীকরণদ্বয়ের সহগগুলিকে নিম্নের চিত্রের আকারে সজ্জিত করিতে হইবে, ও তিনজোড়া তীর কাটাকাটি করিয়া রাখিতে হইবে। x, y ও 1 একবার করিয়া উপরে রাখিয়া তাহার নীচে,

উপর হইতে নীচের গুণফল হইতে নীচ হইতে উপরের গুণফল বিয়োগ করিতে হইবে। যেটি উপরে থাকিবে সেই পদটি ত্যাগ করিতে হয়। অনেকে মনে রাখার নিমিত্ত ইংরাজীতে বলেন, "Heaven to hell minus hell to heaven."

উদাহরণ : সমাধান কর : $2x+3y+4=0,\ 3x+4y+2=0.$

এখানে $a_1=2,\ b_1=3.\ c_1=4,\ a_2=3,\ b_2=4,\ c_2=2.$

∴ বজ্রগুণন প্রণালী অনুসারে পাওয়া যায়,

$$\frac{x}{3.2-4.4}=\frac{y}{4.3-2.2}=\frac{1}{2.4-3.3}.$$

বা, $\frac{x}{6-16}=\frac{y}{12-4}=\frac{1}{8-9}$; বা, $\frac{x}{-10}=\frac{y}{8}=\frac{1}{-1}=-1,$

∴ $x=-1\times-10=10$; $y=-1\times8=-8.$

অতএব **$x=10, y=-8.$**

প্রশ্নমালা 12 B

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ ।]

অপনয়ন ও বজ্রগুণন প্রণালী প্রয়োগ করিয়া সমাধান কর :

1. $4x-3y=1$ ··· (1) $9x-7y=1$ ... (2)

(1) নং সমীকরণকে 7 দিয়া এবং (2) নং সমীকরণকে 3 দিয়া গুণ করা হইল ।

$$28x-21y=7$$
$$27x-21y=3$$
$$x\qquad=4$$ [বিয়োগ করিয়া পাওয়া গেল]

x-এর মান (1) নং সমীকরণে স্থাপন করা হইল ।

$4.4-3y=1$; বা, $-3y=1-16.$

$y=\frac{-15}{-3}=5$; ∴ **$x=4, y=5.$**

2. $6x-5y=8$, $15x-13y=17.$ অথবা $6x-5y-8=0$ এবং $15x-13y-17=0$, এখন বজ্রগুণন প্রণালী অনুসারে পাওয়া গেল,

$$\frac{x}{(-5)(-17)-(-13)(-8)}=\frac{y}{(-8)(15)-(-17)(6)}$$
$$=\frac{1}{(6)(-13)-(15)(-5)}$$

বা, $\frac{x}{85-104}=\frac{y}{(-120)+102}=\frac{1}{-78+75}$

বা, $\frac{x}{-19}=\frac{y}{-18}=\frac{1}{-3}$

∴ $x=\frac{1}{-3}\times-19=\frac{19}{3}=6\frac{1}{3}$; এবং $y=\frac{1}{-3}\times-18=6.$

অতএব, **$x=6\frac{1}{3}, y=6.$**

3. $3x+5y=69$, $x-2y=1$ [C. U. '19]

4. $9x-5y=17$, $8y-2x=10$ [C. U. '10]

5. $7x-5y=31$, $9x-5y=41$ [C. U. '20]

6. $3x+4y=27$, $5x-3y=16$ [S. F. '63]

7. $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}=3$; $\frac{9}{x}-\frac{1}{y}=2\frac{3}{4}$.

8. $ax+by=c$, $2c^2x+b^2y=bc$.

9. $6x-7y=16$, $9x-5y=35$.

10. $3x+4y=11$, $5x-2y=1$.

11. $8x-9y=20$, $7x-10y=9$.

12. $x-y=2a$, $ax+by=a^2+b^2$.

13. $x+5y=36$, $\frac{x+y}{x-y}=\frac{5}{3}$. [C. U. 1912]

14. $ax+by+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$ [C. U. 1867]

15. $x+y=3$, $4x-5y+6=0$. [W.B.S.F. 1957]

16. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2$, $\frac{1}{x}-\frac{1}{2y}=\frac{1}{3}$. [C. U. 1927]

17. $ax+by=a^3$, $ax-by-b^3$.

কতিপয় কৌশল : অনেক সময় কয়েকটি কৌশল অবলম্বন করিয়া অতি সহজে সমীকরণ সমাধান করা যায়। প্রশ্নমালার মধ্যে উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

প্রশ্নমালা 12 C

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সমাধান কর :

1. $x+y=2xy$, $x-y=xy$. [D. B. 1931]

উভয় সমীকরণকে xy দ্বারা ভাগ করা হইল।

$$\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=\frac{2xy}{xy}\text{ ; বা, }\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=2\text{ ; } \cdots \text{ (i)}$$

$$\frac{x}{xy}-\frac{y}{xy}=\frac{xy}{xy}\text{, বা, }\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=1\text{ ; } \cdots \text{ (ii)}$$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ দুইটি যোগ করা হইল। $\frac{2}{y}=3$; বা, $3y=2$, $\therefore\ y=\frac{2}{3}$

আবার উহাদের বিয়োগ করিলে, $\frac{2}{x}=1$; $\therefore\ x=2$ এবং $y=\frac{2}{3}$.

2. $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13 \cdots (1)$ $\frac{5}{x}+\frac{4}{y}=22 \cdots (2)$

মনে করা যাউক $\frac{1}{x}=u$, এবং $\frac{1}{y}=v$, তাহা হইলে সমীকরণ দুইটি হইল,

$2u+3v=13 \cdots (3)$ $5u+4v=22 \cdot (4)$

(3) নং সমীকরণকে 5 ও (4) নং সমীকরণকে 2 দিয়া গুণ করা হইল।

$$10u+15v=65$$
$$10u+\ 8v=44$$
$$7v=21 \quad \text{(বিয়োগ করিয়া)}$$

∴ $v=3$, এই মান (3) নং সমীকরণে স্থাপন করা হইল।

$2u+3\ 3=13$, বা, $2u=13-9=4$, ∴ $u=2$.

অতএব, $u=\frac{1}{x}=2$, ∴ $x=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{y}=3$, ∴ $y=\frac{1}{3}$

$$x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{3}.$$

3. $51x+101y=405 \ldots (1)$ $101x+51y=355 \ldots (2)$

(1) ও (2) যোগ করা হইল। $152x+152y=760$, 152 দিয়া ভাগ করা হইল। $x+y=5 \cdots (3)$, (1) ও (2) বিয়োগ করা হইল।

$-50x+50y=50$, -50 দিয়া ভাগ করা হইল। $x-y=-1 \cdots (4)$

(3) ও (4) যোগ করা হইলে $2x=4$, ∴ $x=2$. x-এর এই মান (3) নং সমীকরণে স্থাপন করা হইল।

$2+y=5$, বা, $y=5-2=3$. $x=2, y=3$.

4. $\frac{x+y}{xy}=5 \cdot (i)$ $\frac{x-y}{xy}=9 \cdots (ii)$ [C. U. 1932]

(i) সমীকরণ $\frac{x}{xy}+\frac{y}{xy}=5$, বা, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=5. \cdots (iii)$

(ii) সমীকরণ $\frac{x}{xy}-\frac{y}{xy}=9$, বা, $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=9. \cdots (iv)$

(iii) and (iv) যোগ করা হইল, $\frac{2}{y}=14$, ∴ $y=\frac{1}{7}$.

(iii) ও (iv) বিয়োগ করা হইল, $\frac{2}{x}=-4$. ∴ $x=-\frac{1}{2}$.

∴ $x=-\frac{1}{2}$ এবং $y=\frac{1}{7}$.

5. $25x+27y=131,\ 27x+25y=129.$

6. $ax+by=ab, \quad bx+ay=ab.$

7. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2, \quad \frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-2}=5.$ [C. U. 1913]

8. $2x+3y=2xy,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}.$ [A. U. 1914]

9. $81x-62y=138,\ 62x-81y=5.$

10. $29x+37y=124,\ 37x+29y=140.$

11. $ax-by=ab,\ bx-ay=ab.$

12. $ax+by=c$
$a^2x+b^2y=c^2$ [C. U. '30]

13. $\frac{m}{x}-\frac{n}{y}=a,\ px=qy.$ [C. U. 1885]

14. $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1, \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}.$ [W. B. S. F. 1956]

15. $\frac{2x+2y-3}{5}=\frac{3x-7y+4}{6}=\frac{8y-x+2}{7}.$ [C. U. 1914]

16. $\frac{5}{x}+\frac{3}{y}=30, \quad \frac{9}{x}=2+\frac{5}{y}.$ [B U. 1927]

17. $\frac{x-y}{3}=\frac{y-1}{4}, \quad \frac{4x-5y}{7}=x-7.$ [C. U. 1872]

18. $\frac{3}{x+y}+\frac{2}{x-y}=2, \quad \frac{9}{x+y}-\frac{4}{x-y}=1.$ [A. U. 1927]

13

সমীকরণ-সাধ্য প্রশ্নাবলী
সরল ও সহ-সমীকরণ
Problems leading to Equations
Simple & Simultaneous

A. সরল সমীকরণ

13·1. পাটীগণিতের নানাবিধ সমস্যামূলক প্রশ্নাবলী সরল সমীকরণের সাহায্যে অতি সহজেই সমাধান করা যায়। ইহা পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে। এখানে অপেক্ষাকৃত জটিল প্রশ্নাবলীর আলোচনা করা হইবে। এই সকল প্রশ্নের সমাধানের যদিও বিশেষ কোন সাধারণ নিয়মাবলী (General method) নাই, তথাপি কয়েকটি বিষয়ে লক্ষ্য রাখিলে এই প্রকার প্রশ্নের সমাধানে সুবিধা হইবে।

(ক) প্রশ্নটি বার বার পড়িয়া উহার প্রকৃত অর্থ হৃদয়ঙ্গম করিতে হইবে। কয়েকবার বেশী পড়িলে অনেক কঠিন প্রশ্নও সহজে বোধগম্য হয়।

(খ) প্রশ্নের মধ্যে যে অজ্ঞাত রাশি থাকিবে তাহাকে x ধরিতে হইবে।

(গ) প্রশ্নে প্রদত্ত শর্তাবলী ঐ অজ্ঞাত রাশি x-এর সাহায্যে প্রকাশ করিয়া একটি সরল সমীকরণ গঠন করিতে হইবে।

(ঘ) সমীকরণটি শুদ্ধ হইয়াছে কিনা পুনরায় দেখিয়া লইতে হইবে। (Revision).

(ঙ) সমীকরণটি সমাধান করিয়া x-এর মান বাহির করিতে হইবে।

(চ) সমীকরণে x-এর মান বসাইয়া প্রশ্নে প্রদত্ত শর্তাবলী সিদ্ধ হয় কিনা তাহা দেখিয়া লইতে হইবে।

প্রশ্নমালা 13 A

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

(ক) সংখ্যা বিষয়ক প্রশ্ন :

1. দুই অঙ্ক-বিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 5; ঐ সংখ্যার সহিত 9 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [S.F. 1952]

মনে কর, একক স্থানীয় অঙ্কটি x, যেহেতু অঙ্ক দুইটির সমষ্টি 5. $\therefore$ দশক স্থানীয় অঙ্কটি $5-x$. সংখ্যাটি $10(5-x)+x$, অঙ্কগুলি স্থান বিনিময় (অর্থাৎ এককের অঙ্কটি দশক স্থানে এবং দশকের অঙ্কটি একক স্থানে) করিলে সংখ্যাটি হইবে $10x+(5-x)$.

এখন প্রশ্নানুসারে, $\{10(5-x)+x\}+9=10x+(5-x)$

বা, $50-10x+x+9=10x+5-x$

বা, $-10x-10x+x+x=5-9-50$

বা, $-18x=-54$. $\therefore$ $x=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10(5-3)+3=23$.

2. দুই অঙ্কের একটি সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 9 ; সংখ্যাটির সহিত 9 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. '34, A. U. '48].

3. 100-র অনধিক কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 6. অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করিয়া যে সংখ্যা গঠিত হয় তাহা পূর্বের সংখ্যা অপেক্ষা 18 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. 1925]

(খ) অংশ বিভাগ :

4. 54-কে এমন দুই অংশে ভাগ কর যেন, এক অংশের দ্বিগুণ অপর অংশের তিনগুণ অপেক্ষা 8 বেশী হয়। [W. B. S. F. 1954]

মনে কর একটি অংশ x, তাহা হইলে অপর অংশ $54-x$.

এখন প্রশ্নানুসারে, $2(54-x)=3x+8$

বা, $108-2x=3x+8$; বা, $-2x-3x=8-108$; বা, $-5x=-100$.

$\therefore$ $x=20$, অপর অংশ $=54-20=34$. $\therefore$ নির্ণেয় অংশ $=20, 34$.

5. 20-কে এমন দুই অংশে ভাগ কর যেন, উক্ত অংশদ্বয়ের বর্গের অন্তর 160 হয়। [G. U. 1950].

6. 20-কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, প্রথম অংশের দ্বিগুণের সহিত দ্বিতীয় অংশের তিনগুণ যোগ করিলে যোগফল 47 হয়।

(গ) বয়স সংক্রান্ত প্রশ্ন :

7. বর্তমানে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ ; 8 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 7 : 4 হইবে। পুত্রের বর্তমান বয়স কত ? [C. U. '32]

মনে কর, পুত্রের বর্তমান বয়স x বৎসর। তাহা হইলে পিতার বর্তমান বয়স $2x$ বৎসর। 8 বৎসর পরে তাহাদের বয়স যথাক্রমে $2x+8$ ও $x+8$.

এখন প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{2x+8}{x+8}=\dfrac{7}{4}$

বা, $4(2x+8)=7(x+8)$; বা, $8x+32=7x+56$;

বা, $8x-7x=56-32$; বা, $x=24$. $\therefore$ পুত্রের বয়স 24 বৎসর।

8. আমার বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে 6 বৎসর পূর্বের বয়সের তিনগুণ বিয়োগ করিলে আমার বর্তমান বয়সের সমান হইবে। আমার বর্তমান বয়স কত?

9. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিনগুণ ছিল। পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইলে, 10 বৎসর পরে পুত্রের বয়স কত হইবে?

10. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 6 গুণ ছিল, 5 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের $2\frac{1}{4}$ গুণ হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত?

11. পিতার বর্তমান বয়স তাহার দুই পুত্রের বয়সের সমষ্টির তিনগুণ। 5 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হইবে। পিতার বর্তমান বয়স কত?

12. এখন হইতে 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ ছিল। দুই বৎসর পরে পিতার বয়সের দ্বিগুণ, পুত্রের বয়সের 5 গুণ হইবে। দুইজনের বয়স কত?

13. দুই অঙ্ক দ্বারা গঠিত একটি সংখ্যার দশক-স্থানীয় অঙ্ক একক-স্থানীয় অঙ্কটির দ্বিগুণ। অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করিলে যে সংখ্যাটি উৎপন্ন হয় তাহা মূল সংখ্যাটি অপেক্ষা 18 কম। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [W.B.S.F. '54, G. U. '54]

14. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্ক সমষ্টি 11; উহার দশক স্থানীয় অঙ্কটির সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল সংখ্যাটির $\frac{1}{8}$ হয়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C.U. '36]

15. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করিলে উৎপন্ন সংখ্যাটি পূর্ব সংখ্যার $\frac{5}{6}$ হয়। অঙ্ক দুইটির অন্তর 1 হইলে, সংখ্যাটি কত? [C.U. 1949]

16. তিনটি পরপর ক্রমিক অঙ্ক দ্বারা গঠিত একটি সংখ্যার এবং উহা উল্টাইয়া লিখিলে সংখ্যাটির অন্তর বৃহত্তর অঙ্কটির 33 গুণ। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[C. U. 1939]

17. তিন অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার প্রত্যেক অঙ্ক উহার অব্যবহিত পরবর্তী অঙ্ক অপেক্ষা 1 কম। সংখ্যাটি হইতে 3 বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল অঙ্কগুলির সমষ্টির 20 গুণের সমান। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [G. U. 1948]

18. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 61 এবং প্রথমটির দ্বিগুণ দ্বিতীয়টির $\frac{2}{3}$ অপেক্ষা 10 বেশী। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [D. B. 1942]

19. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যা উহার অঙ্ক সমষ্টির চারিগুণ। দেখাও যে অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করিলে সংখ্যাটি অঙ্কসমষ্টির সাতগুণ হইবে। [W.B.S.F. '56]

20. 1924 সালে কোন ব্যক্তির বয়স তাহার পুত্রের বয়সের তিনগুণ ছিল। 1952 সালে তাহা $1\frac{4}{5}$ গুণ হইল। পুত্রটি কোন্ সালে জন্মিয়াছিল?

[W. B. S. F. 1958]

প্রশ্নমালা 13 B

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

(ঘ) সময় ও কার্য-বিষয়ক প্রশ্ন :

1. 20 দিনে ক যে কাজ করিতে পারে, খ উহা 12 দিনে করিতে পারে। ক প্রথমে কাজটি কয়দিন করিবার পর খ তাহার স্থানে কাজটি করিতে লাগিল এবং সমস্ত কাজটি 14 দিনে শেষ হইল। ক কতদিন কাজ করিয়াছিল ?

[W. B.S.F. 1957]

মনে কর, ক x দিন কাজ করিয়াছিল। সুতরাং খ $(14-x)$ দিনে কাজ করিয়াছিল। ক 20 দিনে কাজটি শেষ করিতে পারে। অতএব 1 দিনে $\frac{1}{20}$ অংশ করে। তদ্রূপ খ 1 দিনে $\frac{1}{12}$ অংশ করে। ক x দিনে $\frac{x}{20}$ অংশ এবং খ $(14-x)$ দিনে $\frac{14-x}{12}$ অংশ করিতে পারে।

অতএব প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{20}+\frac{14-x}{12}=1$; বা, $3x+5(14-x)=60$.

বা, $3x+70-5x=60$; বা, $-2x=-10$; $\therefore$ $x=5$.

$\therefore$ ক মোট 5 দিন কাজ করিয়াছে।

2. A যে কাজ 9 দিনে করিতে পারে, B উহা 18 দিনে করিতে পারে। উভয়ে একসঙ্গে কাজ আরম্ভ করিল, কিন্তু কাজ শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে A চলিয়া গেল। কাজটি কতদিনে শেষ হইয়াছিল ? [C. U. 1934]

3. ক ও খ একত্রে একটি কাজ 15 দিনে করিতে পারে। তাহারা দুইজনে একসঙ্গে 8 দিন করিবার পর ক চলিয়া গেল এবং আরও 15 দিন পরে কাজটি শেষ হইল। ক একাকী কতদিনে কাজটি শেষ করিতে পারিত ? [C. U. 1947]

(ঙ) সময় ও দূরত্ব বিষয়ক প্রশ্ন :

4. ঘণ্টায় তিন মাইল বেগে চলিলে কোন স্থানে যাইতে যত সময় লাগে ঘণ্টায় চার মাইল বেগে চলিলে তাহা অপেক্ষা 4 ঘণ্টা সময় কম লাগে। স্থানটির দূরত্ব কত ?

মনে কর, স্থানটির দূরত্ব x মাইল, 3 মাইল বেগে সময় লাগিবে $\frac{x}{3}$ ও 4 মাইল বেগে সময় লাগিবে $\frac{x}{4}$. $\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}=4$; বা, $\frac{x}{12}=4$; $\therefore$ $x=48$

$\therefore$ স্থানটির দূরত্ব 48 মাইল।

5. পূর্ণ গতিবেগে চলিলে একখানি রেলগাড়ীর গন্তব্যস্থলে পৌঁছাইতে যে সময় লাগে, উহার $\frac{4}{5}$ অংশ গতিবেগে চলিলে পূর্বের সময় অপেক্ষা $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা অধিক সময় লাগে। পূর্ণ গতিবেগে উহার কত সময় লাগিত ? [P. U. 1883]

6. A স্টেশন হইতে একখানি ট্রেন বেলা 3টার পর ছাড়িয়া বেলা 6টায় B স্টেশনে পৌছিল। B স্টেশন হইতে অপর একখানি ট্রেন বেলা 1-30 টায় ছাড়িয়া সন্ধ্যা 6টায় A স্টেশনে পৌছিল। . কখন তাহাদের পরস্পরের সহিত সাক্ষাৎ হইয়াছিল ?

(চ) লাভ ও ক্ষতি বিষয়ক প্রশ্ন :

7. একটি গরু বিক্রয় করিয়া $2\frac{1}{2}\%$ লোকসান হইল। গরুটি যদি আরও ছয় টাকা বেশী দামে বিক্রয় করা যাইত, তাহা হইলে 5% লাভ হইত। গরুটির ক্রয়মূল্য কত ছিল ? [C. U. 1934]

মনে কর, গরুটির বিক্রয়মূল্য x টাকা। $100-2\frac{1}{2}=97\frac{1}{2}$,

$\therefore$ বিক্রয়মূল্য $\frac{97\frac{1}{2}}{100}x=\frac{195x}{200}$. 5% লাভ অর্থাৎ $\frac{105x}{100}$ বিক্রয়মূল্য।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\frac{105x}{100}=\frac{195x}{200}+6$; বা, $x\left[\frac{105}{100}-\frac{195}{200}\right]=6$,

বা, $x.\frac{15}{200}=6$; বা, $x=\frac{6\times 200}{15}=80$.

$\therefore$ গরুটির ক্রয়মূল্য 80 টাকা।

8. 90 পাউণ্ড দিয়া একটি ঘোড়া ও গাড়ী কিনিলাম। ঘোড়াটি 12% লাভে এবং গাড়ীটি 4% লোকসানে বিক্রয় করায় আমার মোটের উপর 6% লাভ হইল। গাড়ীটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর। [B. U. 1885]

(ছ) ঘড়ি বিষয়ক প্রশ্ন :

9. 5টা ও 6টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন একত্রিত হইবে ?

মনে কর, 5টা বাজিয়া x মিনিটের সময় উহারা একত্রিত হইবে।

মিনিটের কাঁটা 60 মিনিট ঘর যখন যায় ঘণ্টার কাঁটা তখন 5 মিনিট ঘর যায়।

$\therefore$ ... ... 1 ... ... $\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$ .. ...

$\therefore$ ... ... x ... . $\frac{x}{12}$ ... ...

ঠিক 5টার সময় কাঁটা দুইটির ব্যবধান 25 মিনিট ঘর। মিনিটের কাঁটা এই 25 ঘর অধিক গেলে উহারা একত্রিত হইবে।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $x=25+\frac{x}{12}$, বা, $\frac{11}{12}x=25$,

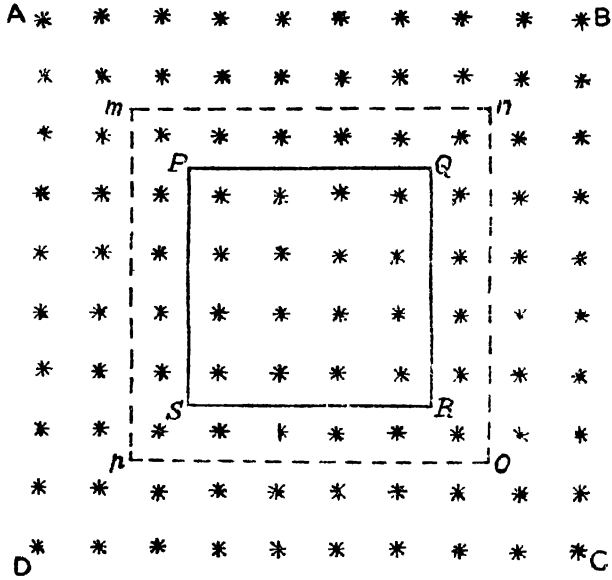
$\therefore$ $x=\frac{25\times 12}{11}=27\frac{3}{11}$.

অতএব, 5টা $27\frac{3}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি একত্রিত হইবে।

10. 7টা ও 8টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন একত্রিত হইবে ? [C. U. 1938]

(জ) শূন্যগর্ভ বর্গাকৃতি ব্যূহ রচনা বিষয়ক প্রশ্ন :

মনে কর, প্রতিটি * তারা চিহ্ন এক একটি মানুষ। প্রতি সারিতে 10টি করিয়া তারা এবং এইরূপে 10টি সারি আছে। সুতরাং এইরূপ পূর্ণবর্গে সজ্জিত লোকগুলির মোট সংখ্যা $10^2 = 100$.

যদি ABCD পূর্ণবর্গটি হইতে PQRS বর্গটি সরাইয়া লওয়া যায় তাহা হইলে

একটি 3 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গ হইবে। MNOP সরাইয়া লইলে 2 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গ হইবে।

3 গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভের লোকসংখ্যা হইবে $10^2 - 4^2$.

$= 10^2 - (10-6)^2 = 10^2 - \{10 - 2.3\}^2$. সুতরাং **সম্মুখ সারির লোক সংখ্যা x হইলে, n গভীরতা বিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গের লোক সংখ্যা হইবে $x^2 - (x-2n)^2$.**

11. 40 জন লোককে 2 গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গে সাজাইলে সম্মুখ সারিতে কয়জন লোক থাকিবে? [Civil Service 1950]

12. এক সেনাপতি তাঁহার সৈন্যদের 3 গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গে সাজাইতে পারেন। সৈন্যসংখ্যা 800 জন অধিক হইলে, সৈন্যগণকে তিনি সম্মুখ

সারিতে পূর্বের ন্যায় একই সংখ্যক সংখ্যাবিশিষ্ট 4 গভীরতা বিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গে সাজাইতে পারেন। তাঁহার সৈন্যসংখ্যা কত ?

(ঝ) বিবিধ বিষয়ক প্রশ্ন :

13. এক চোর 100 গজ দৌড়াইবার পর পুলিশ তাহার পিছনে ছুটিল। প্রতি মিনিটে চোর 176 গজ ও পুলিশ $293\frac{1}{3}$ গজ দৌড়াইলে, চোর আর কত গজ দৌড়াইলে পুলিশ তাহাকে ধরিয়া ফেলিবে ? [A. U. 1895]

ইঙ্গিত : মনে কর, চোর x গজ দৌড়াইল। তাহার সময় লাগিবে $\frac{x}{176}$ মিনিট, ঐ সময় পুলিশ $100+x$ গজ দৌড়ায় অর্থাৎ $x+100$ গজ দৌড়ায় $\frac{x+100}{293\frac{1}{3}}$ মিনিটে। এই দুই সময় সমান।

14. কোন আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা 60 ফুট। যদি উহার দৈর্ঘ্য 3 ফুট অধিক এবং প্রস্থ 3 ফুট কম হইত, তাহা হইলে উহার ক্ষেত্রফল 21 বর্গফুট কম হইত। উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ নির্ণয় কর।

15. চাউল যখন 20 টাকা মণ দরে বিক্রয় হয় তখন কোন পরিবারের মাসিক ব্যয় 450 টাকা ; 15 টাকা মণ দরে বিক্রয় হইলে মাসিক ব্যয় 375 টাকা। চাউল ছাড়া অন্যান্য খরচ কত ?

16. কোন ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হর 3 বেশী। লবের সহিত 7 যোগ করিলে ভগ্নাংশটি মূল ভগ্নাংশ অপেক্ষা 1 বেশী হয়। মূল ভগ্নাংশটি কত ? [C. U. 1933]

17. ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে 80 মাইল পথের কতক অংশ এবং অবশিষ্ট অংশ ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে মোটর চালাইয়া এক ব্যক্তি সমস্ত পথ মোট 6 ঘণ্টায় অতিক্রম করিল। তিনি কোন্ গতিতে কত পথ চলিয়াছিলেন ? [C. U. 1929]

18. একটি ঘোড়া 840 টাকায় বিক্রয় করিয়া ক্ষতি হইল। উহা যদি 1050 টাকায় বিক্রয় হইত, তাহা হইলে পূর্বের ক্ষতির $\frac{3}{4}$ অংশ লাভ হইত। উহার ক্রয়মূল্য কত ?

19. স্থির জলে দাঁড় টানিয়া ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে যায়। স্রোতের অনুকূলে দাঁড় টানিয়া 40 মাইল যাইতে যে সময় লাগে, স্রোতের প্রতিকূলে দাঁড় টানিয়া ঐ পথ যাইতে তাহার তিনগুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় কত মাইল ?

20. 4টা ও 5টার ভিতর ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমকোণে থাকিবে ?

21. একখানা ট্রেন 264 ফুট দীর্ঘ একটি প্লাটফর্ম 10 সেকেণ্ডে ও 88 ফুট দীর্ঘ আর একটি প্লাটফর্ম 5 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল। ট্রেনটির দৈর্ঘ্য এবং ঘণ্টায় গতিবেগ কত ? [C. U. 1885]

22. কোন লোক 4টা ও 5টার মধ্যে বাহির হইয়া গেলেন এবং 5টা ও 6টার মধ্যে ফিরিয়া দেখিলেন যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি স্থান বিনিময় করিয়াছে। ঐ ভদ্রলোক কখন বাহির হইয়াছিলেন ? [C. U. 1951]

B. সরল সহ-সমীকরণ

13·2. যে সব প্রশ্নে অজ্ঞাত রাশি দুইটি থাকে, সে সব স্থলে একটিকে x ও অপরটিকে y ধরিয়া দুইটি সমীকরণ গঠিত করিতে হয়, এবং এই সহ-সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া নির্ণেয় উত্তর পাওয়া যায়। অনেক সময় সহ-সমীকরণ-সাধ্য প্রশ্নাবলী সরল সমীকরণের সাহায্যেও সমাধান করা যায়।

প্রশ্নমালা 13 C

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. কোন দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া লিখিলে নূতন সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার $\frac{5}{6}$ অংশের সমান হয় এবং অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 1 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

মনে কর, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x এবং একক স্থানীয় অঙ্কটি y ; অতএব সংখ্যাটি $10x+y$ এবং উল্টাইয়া লিখিলে সংখ্যাটি $10y+x$. $\therefore$ প্রশ্নানুসারে,

$$10y+x=\tfrac{5}{6}(10x+y) \ldots (1) \text{ এবং } x-y=1 \ldots (2)$$

এই দুই সমীকরণ সমাধান করিয়া $x=5$, $y=4$ পাওয়া যায় $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $=54$.

2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 160 এবং ভাগফল $\frac{3}{5}$; সংখ্যা দুইটি কত ?

মনে কর, সংখ্যা দুইটি x ও y. সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $x+y=160$ এবং $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$.

এই দুই সহ-সমীকরণ সমাধান করিয়া $x=60$ ও $y=100$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ সংখ্যাদ্বয় **100 ও 60.**

3. 9 খানি চেয়ার ও 5 খানি টেবিলের মূল্য 90 টাকা। 5 খানি চেয়ার ও 4 খানি টেবিলের মূল্য 61 টাকা। 6 খানি চেয়ার ও 3 খানি টেবিলের মূল্য কত ? [P. U. 1930]

মনে কর, 1 খানি চেয়ারের মূল্য x টাকা ও একখানি টেবিলের মূল্য y টাকা,
সুতরাং প্রশ্নানুসারে, $9x+5y=90$, এবং $5x+4y=61$.
এই সহ-সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া $x=5$ ও $y=9$ পাওয়া যাইবে।
$\therefore$ নির্ণেয় মূল্য $=6\times5+3\times9=$ **57** টাকা।

4. পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের $1\frac{3}{4}$ গুণ হইবে। পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

[C. U. 1923]

মনে কর, পিতার বর্তমান বয়স x বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স y বৎসর,

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $x=2y$; $(x+8)=1\frac{3}{4}(y+8)$. সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া $x=48$ এবং $y=24$ হইল।

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স 48 বৎসর ও পুত্রের বয়স 24 বৎসর।

5. এমন একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার লব হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহার মান $\frac{3}{4}$ হয় এবং হরের সহিত 6 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{2}$ হয়। [C.U. 1961]

মনে কর, লব $=x$ এবং হর $=y$. $\therefore$ সংখ্যাটি $=\frac{x}{y}$.

এখন প্রশ্নানুসারে, $\frac{x-1}{y}=\frac{3}{4}$; $\frac{x}{y+6}=\frac{1}{2}$. এই দুইটি সহ-সমীকরণ সমাধান করিয়া $x=7$ এবং $y=8$ পাওয়া যাইবে। $\therefore$ নির্ণেয় ভগ্নাংশটি $\frac{7}{8}$.

6. Aর বয়স Bর বয়সের দ্বিগুণ এবং Cর বয়স অপেক্ষা 4 বৎসর অধিক। A, B ও Cর বয়সের সমষ্টি 96 বৎসর হইলে, Bর বয়স নির্ণয় কর। [C. U. 1902]

মনে কর, Bর বয়স x বৎসর $\therefore$ Cর বয়স $x-4$ এবং Aর বয়স y.

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $y=2x$ এবং $y+x+x-4=96$, বা $2x+2x-4=96$,

বা, $4x=100$. $\therefore$ $x=25$, অতএব Bর বয়স 25 বৎসর।

7. পিতার বয়স জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়সের চারিগুণ এবং কনিষ্ঠ পুত্রের বয়সের পাঁচগুণ। জ্যেষ্ঠ পুত্রের বয়স যখন তাহার বর্তমান বয়সের তিন গুণ হইবে, তখন পিতার বয়স কনিষ্ঠ পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 4 বৎসর অধিক হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 1953]

8. 40 মাইল দূরে অবস্থিত দুইজন লোক পরস্পর অভিমুখে চলিতে আরম্ভ করিয়া $6\frac{2}{3}$ ঘণ্টা পরে মিলিত হইল। যদি একজন দ্বিগুণ বেগে চলিত, তবে ঐ সময়ের তিন-চতুর্থাংশ সময়ের মধ্যে সাক্ষাৎ করিতে পারিত। প্রত্যেকের বেগ নির্ণয় কর। [Pat. U. 1931]

9. দুই-অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা উহার অঙ্কসমষ্টির 8 গুণ। সংখ্যাটি হইতে 45 বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্বসংখ্যাটির উল্টা হয়। সংখ্যাটি কত? [C.U. '19]

10. যদি 12 জন পুরুষ ও 10 জন বালক একটি কার্যের $\frac{2}{9}$ অংশ 3 দিনে করে, এবং 4 জন পুরুষ ও 5 জন বালক ঐ কার্যের $\frac{1}{27}$ অংশ 7 দিনে করিতে পারে, তবে 7 জন পুরুষ কয় দিনে সমস্ত কাজটি শেষ করিবে? [C. U. 1942]

11. একখানি নৌকা 10 ঘণ্টায় স্রোতের প্রতিকূলে 30 মাইল গিয়া স্রোতের অনুকূলে 44 মাইল যাইতে পারে। স্রোতের প্রতিকূলে 40 মাইল গিয়া স্রোতের অনুকূলে 55 মাইল যাইতে 13 ঘণ্টা সময় লাগে। নৌকার ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর। [C. U. 1880]

12. কোন ভগ্নাংশের লব হইতে 1 বিয়োগ এবং হরের সহিত 2 যোগ করিলে উহার মান $\frac{1}{2}$ হয়, এবং উহার লব ও হর হইতে যথাক্রমে 7 এবং 2 বিয়োগ করিলে, ভগ্নাংশটির মান $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি কত? [C. U. 1950]

13. এমন একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর, যাহার লব ও হরের সহিত 2 যোগ করিলে উহার মান দ্বিগুণ হয়, এবং লব ও হরের সহিত 8 যোগ করিলে উহার মান তিনগুণ হয়। [D. B. 1950]

14. এক ব্যক্তি একটি জিনিষ কিনিয়া উহা 6% লাভে বিক্রয় করিল। যদি সে বিক্রয়মূল্য অপেক্ষা আরও 1 টাকা 19 পয়সা অধিক দরে বিক্রয় করিত, এবং জিনিষটির ক্রয়মূল্য যদি 4% কম হইত, তাহা হইলে তাহার 12% লাভ হইত। জিনিষটির ক্রয়মূল্য নির্ণয় কর। [C. U. 1944]

15. কোন মূলধন 3 বৎসরে সুদেমূলে 632 টা. 50 পয়সা এবং $4\frac{1}{2}$ বৎসরে 673 টা. 75 পয়সা হয়। মূলধন ও সুদের হার কত? [P. U. 1925]

16. একখানি পুস্তকের কতকগুলি পৃষ্ঠায় 30টি করিয়া লাইন এবং অবশিষ্ট-গুলিতে 25টি করিয়া লাইন আছে। মোট 36 খানি পৃষ্ঠা এবং 1055টি লাইন থাকিলে, 25 লাইনের পৃষ্ঠা কতগুলি আছে?

17. স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বাহিয়া 70 মাইল যাইতে 10 ঘণ্টা এবং প্রতিকূলে ঐ দূরত্ব ফিরিয়া আসিতে 70 ঘণ্টা সময় লাগে। স্রোতের বেগ প্রতি ঘণ্টায় কত? [C. U. 1940]

18. কোনও অঙ্কের অর্ধাংশ তাহার পরবর্তী বৃহত্তর ক্রমিক অঙ্কের তৃতীয়াংশ অপেক্ষা দুই অধিক। অঙ্কটি নির্ণয় কর। [C. U. 1917]

***19.** একজন লোক কতকগুলি আনারস কিনিল। সে অর্ধেকগুলি টাকায় 2টি এবং বাকী অর্ধেক টাকায় 3টি হিসাবে ক্রয় করিয়াছিল। সমস্ত আনারস সে

পরে 2 টাকায় 5টি হিসাবে বিক্রয় করাতে তাহার মোটের উপর 1 টাকা ক্ষতি হইল। সে মোট কতগুলি আনারস কিনিয়াছিল?

*20. মোট $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় এক ব্যক্তি সমগতিতে কিছুদূর অশ্বারোহণ করিল। যদি তাহার দূরত্ব 1 মাইল কম হইত এবং গতি ঘণ্টায় 2 মাইল বেশী হইত তাহা হইলে সে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পূর্বে পৌছাইত। তাহার গতিবেগ নির্ণয় কর।

*21. তিরিশ দিন কাজ করিবার জন্য একজন কর্মীকে নিযুক্ত করা হইল। এই শর্তে নিযুক্ত হইল যে সে প্রতিদিন কাজ করিলে 2 শি. 6 পে. করিয়া পাইবে এবং কাজ না করিলে 1 শি. প্রতিদিন জরিমানা হইবে। সে মোট 2 পা. 7 শি. পাইল। কতদিন সে কাজ করে নাই? [W. B. S. F. 1955]

*22. দুইটি সংখ্যার গুণফল 18225 এবং ভাগফল 81 ; সংখ্যা দুইটি কি কি?
[C. U. 1945]

23. এক ব্যক্তি 5টা হইতে 6টার মধ্যে ভ্রমণে বাহির হইয়া 6টা ও 7টার মধ্যে ফিরিয়া দেখিলেন তাঁহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি স্থান বিনিময় করিয়াছে। কখন তিনি বাহির হইয়াছিলেন?

*24. এক পথিক কিছুদূর যাইল। সে যদি ঘণ্টায় $\frac{1}{2}$ মাইল দ্রুত বেগে যাইত, তাহা হইলে সে ঐ সময়ের $\frac{4}{5}$ অংশে যাইত, এবং যদি সে ঘণ্টায় $\frac{1}{2}$ মাইল ধীর বেগে যাইত, তাহা হইলে সে ঐ সময় অপেক্ষা $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে পৌছাইত। সে কতদূর গিয়াছিল?

*25. 20 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের চার গুণ ছিল। 4 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত?
[C. U. 1940]

*26. এক ব্যক্তি দাঁড় বাহিয়া স্রোতের অনুকূলে 10 ঘণ্টায় 70 কিলোমিটার গেল এবং স্রোতের প্রতিকূলে 70 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার?

*27. আট বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিন গুণ হইবে ; এবং 4 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের নয় গুণ ছিল। তাহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 1968]

14

সরল সমীকরণের লেখ

Graphs of Simple Equations

14·1. কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি দেওয়া থাকিলে ছক কাগজে তাহার অবস্থান জানা যায়। কিন্তু এই ভুজ ও কোটি বা x, y যদি কোনও নির্দিষ্ট সম্বন্ধযুক্ত হয় তাহা হইলে যে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দিয়া ঐ সম্বন্ধ সিদ্ধ হয় না। সম্বন্ধটি একটি বীজগণিতীয় সমীকরণে প্রকাশ করা হয় ও একটি চলমান বিন্দুর ভুজ ও কোটি যদি ঐ সমীকরণকে সিদ্ধ করে তবে উহা সমীকরণের লেখর উপর অবস্থিত হইবে। x-এর একটি মান লইলে সমীকরণ হইতে y-এর মান পাওয়া যায়। ছক কাগজে ঐ যুগ্ম মানগুলি স্থাপন করিয়া একটি সন্তত রেখা দ্বারা বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে যে সঞ্চার পথের (Locus) সৃষ্টি হয় উহাই সমীকরণের লেখ। সরল সমীকরণের লেখ সর্বদাই একটি সরলরেখা হয়।

14·2. সরল সমীকরণের লেখ অঙ্কন প্রণালী : (i) সমীকরণটিকে $y=mx+c$ এই আকারে প্রকাশ করিতে হইবে।

(ii) এখন x-এর সুবিধামত মান বসাইয়া y-এর মান কত হয় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। প্রত্যেকবার ঐ মানগুলি পূর্ণসংখ্যা যেন হয় তাহা দেখিলে সুবিধা হয়।

(iii) অন্ততঃপক্ষে **চারিটি বিন্দুর** মান নির্ণয় করিলে ভাল হয়। যদি তিনটির অধিক মান বাহির করিতে না পারা যায়, তাহা হইলে ঐ তিনটি মান বার বার দেখিয়া শুদ্ধ করিতে হইবে। মানগুলি একটি তালিকাবদ্ধ (Table) করিয়া রাখিতে হইবে।

(iv) ছক কাগজের মাঝামাঝি XOX' এবং YOY' দুইটি অক্ষরেখা স্থাপন করিয়া, O মূলবিন্দু চিহ্নিত করিয়া রাখিতে হইবে ও সুবিধামত দৈর্ঘ্যের একক লইতে হইবে।

(v) তালিকা (Table) হইতে বিন্দুগুলি ছক কাগজে (Graph paper) স্থাপন করিয়া একটি সরলরেখা দ্বারা বিন্দুগুলি পরস্পর সংযুক্ত করিয়া উভয় দিকে প্রসারিত করিতে হইবে। রেখাটি সূক্ষ্ম ও সর্বত্র সমান স্থূলতাবিশিষ্ট হওয়া প্রয়োজন। তাহা হইলে এই অসীম সরলরেখাই প্রদত্ত সমীকরণের লেখ হইবে।

প্রশ্নমালা 14

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

লেখ অঙ্কন কর :

1. (*a*) $x=13$, (*b*) $x=-15$, (*c*) $y=20$, (*d*) $y=-18$
(*e*) $x=0$, (*f*) $y=0$. [1নং চিত্র দেখ]

XOX′ এবং YOY′ দুইটি অক্ষরেখা O মূলবিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এক্ষেত্রে একটি-ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক লওয়া হইল। $(x)=13$. OX সরলরেখা বরাবর O হইতে **ডাইনে** 13 একক দূরে একটি বিন্দু M লওয়া হইল M বিন্দুতে Y অক্ষের সমান্তরাল AB সরলরেখা $x=13$ সমীকরণের লেখ হইবে এই সরলরেখার উপর সমস্ত বিন্দুরই ভুজ বা $x=13$ হইবে।

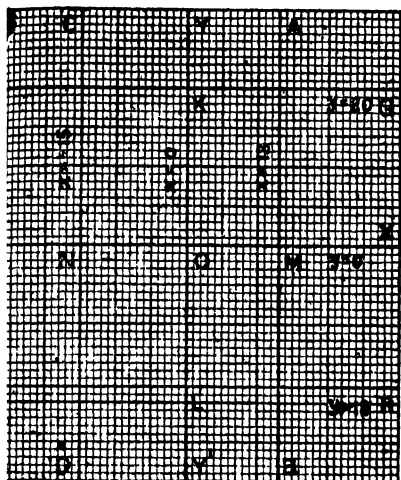
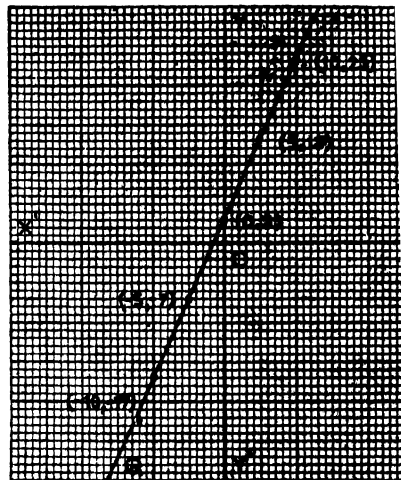
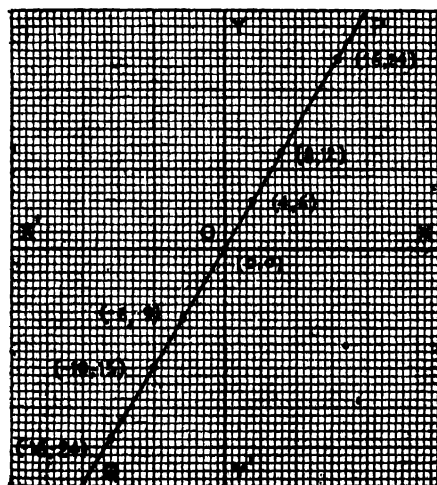
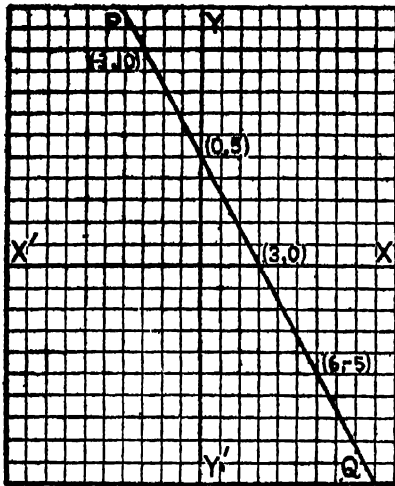
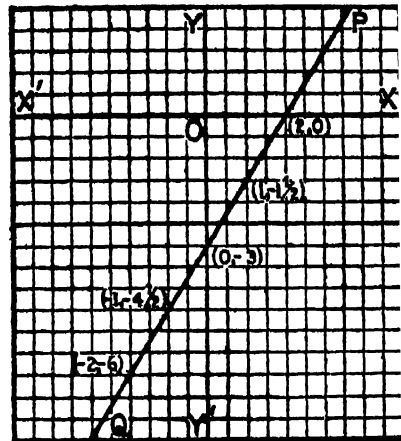
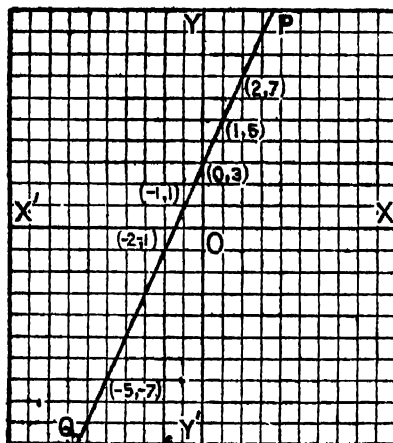
(*b*) $x=-15$. OX′ সরলরেখা বরাবর O হইতে **বাম** দিকে (যেহেতু ঋণাত্মক মান) 15 একক দূরে N একটি বিন্দু লওয়া হইল। ঐ N বিন্দুতে Y অক্ষের সমান্তরাল CD সরলরেখা $x=-15$ সমীকরণের লেখ হইবে। এই সরলরেখার উপর সকল বিন্দুরই ভুজ বা $x=-15$ হইবে।

(*c*) $y=20$. OY সরলরেখা বরাবর O হইতে **উপরে** 20 একক দূরে K একটি বিন্দু লওয়া হইল, এবং ঐ বিন্দুতে একটি X অক্ষের সমান্তরাল PQ সরলরেখা $y=20$ সমীকরণের লেখ হইবে। এই সরলরেখার উপর সকল বিন্দুরই কোটি বা y সর্বদা 20 একক হইবে।

(*d*) $y=-18$. O হইতে OY′ সরলরেখার উপর 18 একক **নীচে** L বিন্দু লওয়া হইল, এবং ঐ বিন্দুতে X অক্ষের সমান্তরাল RS সরলরেখা $y=-18$ সমীকরণের লেখ হইবে। ঐ সরলরেখার উপর সকল বিন্দুরই কোটি বা y সর্বদা -18 একক হইবে।

(*e, f*) X অক্ষরেখার সমীকরণ $y=0$ এবং y অক্ষরেখার সমীকরণ $x=0$। কারণ x অক্ষরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির ভুজ যাহাই হউক না কেন কোটি বা y সর্বদা শূন্য হইবে। তদ্রূপ y অক্ষরেখার উপর অবস্থিত বিন্দুগুলির কোটি যাহাই হউক না কেন ভুজ বা x সর্বদা শূন্য হইবে।

2. $y=2x+3$ [2নং চিত্র দেখ] x-এর বিভিন্ন মান লইয়া y-এর অনুরূপ মান বাহির করিয়া তালিকাবদ্ধ করিতে হইবে।

যখন	x	0	5	10	-5	-10
তখন	y	3	13	23	-7	-17

[1 নং চিত্র]

[2 নং চিত্র]

[3 নং চিত্র]

[4 নং চিত্র]

[5 নং চিত্র]

[6 নং চিত্র]

ছক কাগজে XOX′ এবং YOY′ দুইটি অক্ষরেখা O মূলবিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এক্ষণে একটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক লইয়া পূর্ব পৃষ্ঠার তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করা হইল। ঐ বিন্দুগুলিকে একটি অসীম PQ সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করা হইল। এই PQ সরলরেখাই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় লেখ।

3. $3x=2y$ [C.U. 1923] $3x=2y$ বা, $2y=3x$. $\therefore$ $y=\frac{3x}{2}$.

x-এর বিভিন্ন মান লইয়া y-এর অনুরূপ মান সমীকরণ হইতে বাহির করিয়া তালিকাভুক্ত করা হইল। [3নং চিত্র দেখ]

যখন	x	0	4	8	16	−6	−10	−16
তখন	y	0	6	12	24	−9	−15	−24

2নং উদাহরণের ন্যায় লিখিতে হইবে। দেখা যায় সরলরেখাটি মূলবিন্দুর মধ্য দিয়া গিয়াছে।

দ্রষ্টব্য : উপরের সমীকরণে x-এর মান 1, 3, 5 প্রভৃতি বসাইলে y-এর মান ভগ্নাংশ হয়। সেরূপ ক্ষেত্রে প্রয়োজনমত ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ, তিনগুণ প্রভৃতিকে দৈর্ঘ্যের একক লইতে হইবে। উপরের উদাহরণ হইতে দেখা যায় যে $y=mx$ এই আকারের লেখ মূলবিন্দু-গামী।

4. $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$.   [C. U. 1939]   [4নং চিত্র দেখ]

$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$, বা, $\frac{y}{5}=1-\frac{x}{3}$, বা, $3y=15-5x$, $\therefore$ $y=\frac{15-5x}{3}$.

যখন	x	0	3	6	−3
তখন	y	5	0	−5	10

2নং উদাহরণের ন্যায় লিখিয়া যাইতে হইবে। $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এই আকারের লেখ O হইতে x অক্ষকে a একক দূরে এবং y অক্ষকে b একক দূরে ছেদ করে।

5. $x=\frac{1}{3}(2y+6)$ [C. U. 1941]   [5নং চিত্র দেখ]

$x=\frac{1}{3}(2y+6)$ বা, $3x=2y+6$ বা, $3x-6=2y$.

$$\therefore \quad y=\frac{3x-6}{2}.$$

x এবং y-এর অনুরূপ মানগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল। এখানে y-এর ভগ্নাংশ মান লওয়া হইয়াছে।

যখন x	0	1	−1	2	−2
তখন y	−3	$-1\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{2}$	0	−6

যেহেতু y-এর ভগ্নাংশ মানগুলির হর 2 আছে, সেইজন্য দুইটি ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের এককরূপে লইয়া উপরের তালিকাভুক্ত বিন্দুগুলির মানযুগল ছক কাগজে স্থাপন করা হইয়াছে উহাদের PQ সরলরেখা দ্বারা যুক্ত করিয়া প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় লেখ পাওয়া গিয়াছে

6. $2x+3$. [6নং চিত্র দেখ $2x+3$ অপেক্ষকের লেখ এবং $y=2x+3$ সমীকরণের লেখ একই। অতএব $y=2x+3$ সমীকরণ হইতে x এবং y-এর মান যুগ্মগুলি তালিকাভুক্ত করা হইল।

যখন x	0	1	2	−1	2	−5
তখন y	3	5	7	1	−1	−7

2নং উদাহরণের ন্যায় লিখিতে হইবে। PQ সরলরেখা প্রদত্ত বীজগণিতীয় রাশি বা অপেক্ষক $2x+3$-র নির্ণেয় লেখ।

7. $y=7$. [C.U. '44] 8. $y=2x$. [C. U. '44]

9. $4x=3y$. [C.U. '48] 10. $2x-y=1$. [C.U. '33]

11. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ [C. U. '36] 12. $y=2x-3$.

13. $3x=2y$. [C. U. '33] 14. $5x=3y$. [C. U. '36]

15. $y=2x+7$. [C. U. '46] 16. $2x+3y=6$. [C. U. '42]

17. $2y-3x=6$. [C. U. '40] 18. $5x+3y=8$. [C.U. '40]

19. $6x-7y=42$. [C.U. '41] 20. $3x+2y=24$. [C. U. '37]

21. $2y-3x=4$. [C. U. '25] 22. $2x+7y=-12$. [C. U. '37]

নিম্নলিখিত অপেক্ষকগুলির লেখ অঙ্কিত কর :

23. (i) $2x-3$. (ii) $\frac{3x+1}{2}$. (iii) $\frac{5x-6}{4}$. (iv) $\frac{7x-3}{3}$.

24. একই অক্ষ এবং একই একক লইয়া $3x-2y=6$ এবং $2x+3y=0$ এর লেখচিত্র অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে, উহারা পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।

[C. U. 1912]

1

দ্বিঘাত সমীকরণ

Quadratic Equation

1·1. **সংজ্ঞা :** যে সমীকরণের অজ্ঞাত রাশির সর্বাপেক্ষা উচ্চ ঘাত বর্গ (Square) অর্থাৎ x^2, তাহাকে **দ্বিঘাত সমীকরণ** (Quadratic Equation) বা **দ্বিতীয় মানের সমীকরণ** (Equation of the Second Degree) বলে। যেমন, $2x^2-32=0$, $x^2+x-2=0$, ইত্যাদি।

1·2. কোন দ্বিঘাত সমীকরণে তিন প্রকারের পদ থাকিতে পারে। (1) অজ্ঞাত রাশিটির দ্বিতীয় ঘাতবিশিষ্ট পদ, অর্থাৎ x^2, (2) উহার প্রথম ঘাতবিশিষ্ট পদ, অর্থাৎ x, এবং (3) অজ্ঞাত রাশিবিহীন পদ অর্থাৎ x-বর্জিত পদ। যেমন, $x^2+x-2=0$, $2x^2+3x+2=0$ ইত্যাদি।

1·3. দ্বিঘাত সমীকরণ দুই প্রকার—(*a*) **অমিশ্র** ও (*b*) **মিশ্র**।

1·4. যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির প্রথম ঘাতবিশিষ্ট পদটি থাকে না অর্থাৎ x-যুক্ত পদটি থাকে না, কেবল x^2 ও x-বর্জিত রাশি থাকে, তাহাকে **অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ** (Pure Quadratic Equation) বলে। যেমন, $2x^2-32=0$, $4x^2=25$, $7x^2=176$, $\boldsymbol{ax^2+b=0}$, ইত্যাদি।

1·5. যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির দ্বিতীয় ঘাত, প্রথম ঘাত ও অজ্ঞাত রাশি বর্জিত পদ থাকে, অর্থাৎ x^2, x এবং x-বর্জিত পদ তিনটিই থাকে তাহাকে **মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ** (Adfected Quadratic Equation) বলে। যেমন, $x^2+x-2=0$; $6x^2-19x+10=0$; $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$ ইত্যাদি।

1·6. কোন বর্গরাশির বর্গমূল নির্ণয় করিলে দুইটি ভিন্ন চিহ্ন-যুক্ত রাশি হয়। যেমন 25র বর্গমূল $+5$ এবং -5। কারণ $(+5)^2=(+5)\times(+5)=25$ এবং $(-5)^2=(-5)\times(-5)=25$. সুতরাং $x^2=25$র সমাধান করিলে $x=+5$ এবং $x=-5$ হয়। ইহাকে '± 5' এইরূপ লেখা হয়। সুতরাং দ্বিঘাত সমীকরণের সর্বদাই দুইটি **বীজ** (Root) থাকে। দুইটির বেশী বা কম বীজ থাকিতে পারে না। বীজ দুইটি সমান হইতেও পারে।

1·7. অমিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ দুই প্রকারে সমাধান করা যায়।

প্রথম প্রণালী : অজ্ঞাত রাশি ঘটিত পদগুলিকে সমতা চিহ্নের বামপক্ষে এবং অজ্ঞাত রাশি বর্জিত পদগুলিকে সমতা চিহ্নিত ডানপক্ষে পক্ষান্তরিত করিয়া উভ পক্ষের বর্গমূল আকর্ষণ করিতে হয়।

দ্বিতীয় প্রণালী : সমীকরণের সকল পদগুলি সমতা চিহ্নের বাম দিকে পক্ষান্তর করিয়া রাশিটিকে বিশ্লেষণ করিয়া সমাধান করিতে হয়।

প্রশ্নমালা 1 A

[1 হইতে 14 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

সমাধান কর :

1. $10x^2=50+8x^2.$

(*a*) $10x^2-8x^2=50,$ বা, $2x^2=50$ বা, $x^2=25,$

$\therefore \quad x=\pm 5.$

(*b*) $10x^2-8x^2-50=0,$ বা, $2x^2-50=0,$ $x^2-25=0,$ [2 দ্বারা ভাগ করিয়া, কারণ $2\neq 0$]

বা, $(x+5)(x-5)=0,$ দুইটি উৎপাদকের গুণফল শূন্য হইলে উহাদের যে কোন একটি শূন্য হইবে।

যদি $x+5=0$ হয়, তাহা হইলে $x=-5$ এবং $x-5=0$ হইলে, $x=5,$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $\pm 5.$

2. $x(x+3)=3x+1.$

বা, $x^2+3x=3x+1,$ $x^2+3x-3x=1,$

বা, $x^2=1,$ $\therefore \quad x=\pm 1.$

3. $9x^2-49=0.$

বা, $9x^2=49,$ বা, $x^2=\frac{49}{9},$ $\therefore \quad x=\pm\frac{7}{3},$ $\therefore \quad x=\pm 2\frac{1}{3}.$

4. $\frac{x}{2}+\frac{20}{x}=\frac{7}{4}x.$

বা, $4x\cdot\frac{x}{2}+4x\cdot\frac{20}{x}=4x\cdot\frac{7x}{4},$ [হরগুলির ল. সা. গু. $4x$ দিয়া গুণ করা হইল]

বা, $2x^2+80=7x^2,$ $7x^2-2x^2=80,$ বা, $5x^2=80$

বা, $x^2=16,$ $\therefore \quad x=\pm 4.$

5. $\frac{2x+3}{4x+5}=\frac{3x+2}{5x+4}$.

বা, $(3x+2)(4x+5)=(2x+3)(5x+4)$

বা, $12x^2+23x+10=10x^2+23x+12$

বা, $12x^2+23x+10-10x^2-23x-12=0$

বা, $2x^2-2=0$, বা, $x^2-1=0$, বা, $x^2=1$, $\therefore$ $x=\pm 1$.

6. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3}$. [C. U. '12, M. U. '11, D. B. '22]

$\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}$, বা, $\frac{(x+4)^2+(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}=\frac{10}{3}$.

বা, $\frac{x^2+8x+16+x^2-8x+16}{x^2-16}=\frac{10}{3}$.

বা, $\frac{2x^2+32}{x^2-16}=\frac{10}{3}$ বা, $\frac{2(x^2+16)}{x^2-16}=\frac{10}{3}$

বা, $\frac{x^2+16}{x^2-16}=\frac{5}{3}$ [উভয় পক্ষকে 2 দিয়া ভাগ করিয়া $\because$ $2\neq 0$]

বা, $5(x^2-16)=3(x^2+16)$ [বজ্রগুণন প্রক্রিয়া]

বা, $5x^2-80=3x^2+48$, বা, $5x^2-3x^2=48+80$

বা, $2x^2=128$, বা, $x^2=64$ $\therefore$ $x=\pm 8$.

7. $\frac{ax+b}{bx+a}=\frac{cx+d}{dx+c}$.

$\frac{ax+b}{bx+a}=\frac{cx+d}{dx+c}$ বা, $(ax+b)(dx+c)=(cx+d)(bx+a)$,

বা, $adx^2+bdx+acx+bc=bcx^2+bdx+acx+ad$,

বা, $adx^2-bcx^2+bdx+acx-bdx-acx=ad-bc$

বা, $x^2(ad-bc)=ad-bc$, বা, $x^2=\frac{ad-bc}{ad-bc}$

বা, $x^2=1$, $\therefore$ $x=\pm 1$.

8. $\frac{x}{5}-\frac{4}{x}=\frac{x}{4}-\frac{5}{x}$ বা, $\frac{5}{x}-\frac{4}{x}=\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$

বা, $\frac{1}{x}=\frac{5x-4x}{20}$ বা, $\frac{1}{x}=\frac{x}{20}$, বা, $x^2=20$, $\therefore$ $x=\pm 2\sqrt{5}$.

9. $x^2=a^2$. 10. $6x^2-16=200$.

11. $\frac{x^2}{3}+3=30.$ 12. $7x^2-3x=2^2.$

13. $ax^2+b=0.$ 14. $(x+2)(x-2)=21.$

15. $(x-3)(x+7)=4x$ 16 $\frac{5x^2-8}{3}=\frac{2x^2+3}{2}$

17. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$ [C U. '31] 18. $\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}=1.$

19 $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\frac{1}{2}$ [C U. 1919]

20. $\frac{1}{6}(x^2-7)+\frac{1}{4}(x^2-4)+\frac{1}{3}(x^2-3)=0$

21. $\sqrt{x^2+16}-\sqrt{x^2+7}=1$ 22. $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}=a+b.$

1·8 মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান : সকল মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণকে সরল করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া $ax^2+bx+c=0$ এই আকারে পরিণত করা যায়। সেইজন্য ইহাকে **আদর্শ মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ** বলে।

1·9. উৎপাদক বিশ্লেষণ প্রণালীতে সমাধান : (Solution by the method of factorisation) **:** এই প্রণালীতে মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণকে সমাধান করিতে হইলে সমীকরণকে সরল করিয়া এবং পক্ষান্তর করিয়া সকল পদগুলিই সমতা চিহ্নের বাম পার্শ্বে আনিতে হয়। পরে বামপক্ষের রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া প্রত্যেক উৎপাদকের মানকে শূন্য ধরিয়া অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করিতে হয়।

1·10. পূর্ণ বর্গে পরিবর্তন প্রণালীতে সমাধান (Solution by the method of completing the square) **:** এই প্রণালীতে সমীকরণটি সরল করিয়া অজ্ঞাত রাশিযুক্ত পদগুলিকে সমতা চিহ্নের বাম পার্শ্বে এবং অজ্ঞাত রাশি বর্জিত পদগুলিকে ডানপার্শ্বে পক্ষান্তর করিয়া উভয় পক্ষকে অজ্ঞাত রাশির বর্গযুক্ত পদের অর্থাৎ (x^2 যুক্ত পদের) সহগ দ্বারা ভাগ করিতে হয়। পরে উভয় পক্ষের সহিত অজ্ঞাত রাশির প্রথম ঘাতবিশিষ্ট পদের (অর্থাৎ x যুক্ত পদের) সহগের অর্ধেকের বর্গ যোগ করিয়া বামপক্ষের রাশিগুলিকে পূর্ণবর্গে প্রকাশ করিতে হয়। পরে উভয় পক্ষের বর্গমূল আকর্ষণ করিয়া অজ্ঞাত রাশিটির দুইটি বীজ নির্ণয় করিতে হয়। পরপৃষ্ঠার প্রশ্নমালার মধ্যে উদাহরণগুলিতে দুই প্রকার প্রণালী দেখান হইয়াছে।

প্রশ্নমালা 1 B

[1 হইতে 17 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ]

সমাধান কর :

1. $2x^2-5x-3=0$.

(১ম) $2x^2-5x-3=0$, বা, $2x^2-6x+x-3=0$,

বা, $2x(x-3)+1(x-3)=0$. বা, $(2x+1)(x-3)=0$

$\therefore$ যদি $2x+1=0$ হয়, তাহা হইলে $2x=-1$, বা, $x=-\frac{1}{2}$;

অথবা $x-3=0$, বা, $x=3$, $\therefore$ $x=-\frac{1}{2}$, 3.

(২য়) $2x^2-5x-3=0$, বা, $2x^2-5x=3$, বা, $x^2-\frac{5}{2}x=\frac{3}{2}$

বা, $x^2-\frac{5}{2}x+(\frac{5}{4})^2=\frac{3}{2}+(\frac{5}{4})^2$, বা, $(x-\frac{5}{4})^2=\frac{3}{2}+\frac{25}{16}$,

বা, $(x-\frac{5}{4})^2=\frac{49}{16}$, বা, $x-\frac{5}{4}=\pm\frac{7}{4}$; $x=\frac{7}{4}+\frac{5}{4}$, বা, $x=3$;

অথবা, $x=\frac{5}{4}-\frac{7}{4}$, বা, $x=-\frac{1}{2}$, $\therefore$ $x=-\frac{1}{2}$, 3.

2. $3(x^2+1)=10x$. [C. U. 1933]

(১ম) $3(x^2+1)=10x$ বা, $3x^2+3-10x=0$, বা, $3x^2-10x+3=0$,

বা, $3x^2-9x-x+3=0$, বা. $3x(x-3)-1(x-3)=0$,

বা, $(x-3)(3x-1)=0$, যদি $x-3=0$ হয়, তাহা হইলে $x=3$ এবং

যদি $3x-1=0$ হয়, তাহা হইলে $3x=1$, বা, $x=\frac{1}{3}$. $\therefore$ $x=3, \frac{1}{3}$.

(২য়) $3x^2-10x=-3$, বা, $x^2-\frac{10}{3}x=-1$,

বা, $x^2-\frac{10}{3}x+(\frac{10}{6})^2=(\frac{10}{6})^2-1$, বা, $(x-\frac{5}{3})^2=\frac{25}{9}-1$,

বা, $(x-\frac{5}{3})^2=\frac{16}{9}$, বা, $x-\frac{5}{3}=\pm\frac{4}{3}$, বা, $x=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}$, বা, $x=3$;

অথবা, $x=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$, বা, $x=\frac{1}{3}$, $\therefore$ $x=3, \frac{1}{3}$.

3. $(x-7)(x-19)=64$. [C. U. 1918]

(১ম) $(x-7)(x-19)=64$, বা, $x^2-26x+133=64$.

বা, $x^2-26x+69=0$ বা, $x^2-23x-3x+69=0$,

বা, $x(x-23)-3(x-23)=0$ বা, $(x-23)(x-3)=0$.

যদি $x-23=0$ হয়, তাহা হইলে $x=23$;

এবং যদি $x-3=0$ হয়, তাহা হইলে, $x=3$ $\therefore$ $x=23$, 3.

(২য়) $x^2-26x=-69$ বা, $x^2-26x+(13)^2=(13)^2-69$.

বা, $(x-13)^2=169-69$, বা, $(x-13)^2=100$,

বা, $x-13=\pm10$, বা, $x-13=10$, $\therefore$ $x=13+10$, বা, $x=23$,

অথবা $x-13=-10$, বা, $x=13-10$. $\therefore$ $x=3$. $\therefore$ $x=23$, 3.

4. $ax^2+bx+c=0.$

$ax^2+bx+c=0$

বা, $ax^2+bx=-c$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$ [a দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করিয়া]

বা, $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$ [x-র সহগের অর্ধেকের বর্গ যোগ করিয়া]

বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$, বা, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

বা, $x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, [বর্গমূল আকর্ষণ করিয়া]

বা, $x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, [পক্ষান্তর করিয়া]

$\therefore\quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের উদাহরণটিকে **মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের সাধারণ প্রণালী** বলে। যে কোন দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$ আকারে পরিণত করিয়া উহার বীজ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ এই সূত্র হইতে সহজেই নির্ণয় করা যায়। এখানে $a=x^2$-র সহগ, $b=x$-র সহগ এবং $c=x$-বর্জিত রাশি।

5. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}.$ [D. B. '48, '43]

$\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$, বা, $\frac{1}{a+b+x}-\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

বা, $\frac{-a-b}{x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}$, বা $\frac{-(a+b)}{x(a+b+x)}=\frac{a+b}{ab}$

বা, $\frac{-1}{x(a+b+x)}=\frac{1}{ab}$ [$(a+b)$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x(a+b+x)=-ab$, বা, $x^2+ax+bx+ab=0$

বা, $(x+a)(x+b)=0$ $\therefore\ x+a=0,$ বা, $x=-a,$

এবং $x+b=0,$ বা, $x=-b,$ $\therefore\ x=-a, -b.$

6. $\frac{x+3}{x-3}+6\frac{x-3}{x+3}=5.$ [C.U. 1952]

$\frac{x+3}{x-3}+6\frac{x-3}{x+3}=5$, মনে করা যাউক $\frac{x+3}{x-3}=z.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি $z+\frac{6}{z}=5$, বা, $z^2+6=5z$, বা, $z^2-5z+6=0.$

বা, $(z-3)(z-2)=0$, যদি $z-3=0$ হয় তাহা হইলে $z=3$,

কিংবা $z-2=0$ $\therefore$ $z=2$. যদি $z=3$ হয়, অর্থাৎ

$\frac{x+3}{x-3}=3$, বা, $x+3=3x-9$, বা, $x-3x=-9-3$,

বা, $-2x=-12$, $\therefore$ $x=6$;

অথবা $z=2$ হইলে, $\frac{x+3}{x-3}=2$, বা, $x+3=2x-6$.

বা, $x-2x=-6-3$, বা, $-x=-9$, $\therefore$ $x=9$ $\therefore$ $x=6, 9.$

7. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1.$ [C.U. 1951]

$\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$, বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=1-\frac{x-2}{x+2}$

বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=\frac{x+2-x+2}{x+2}$, বা, $\frac{6(x-2)}{x-6}=\frac{4}{x+2}$ বা, $\frac{3(x-2)}{x-6}=\frac{2}{x+2}$

বা, $3(x^2-4)=2(x-6)$ বা, $3x^2-12=2x-12$,

বা, $3x^2-2x=0$, বা, $x(3x-2)=0$ $\therefore$ হয় $x=0$.

নতুবা, $3x-2=0$, বা, $3x=2$, বা, $x=\frac{2}{3}$. $\therefore$ $x=0, \frac{2}{3}$.

8. $x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}.$ [C.U. '14, '39, D.B. '25]

$x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$, বা, $\frac{x^2+1}{x}=\frac{626}{25}$, বা, $25x^2+25=626x$

বা, $25x^2-626x+25=0$, বা, $25x^2-625x-x+25=0$,

বা, $25x(x-25)-1(x-25)=0$, বা, $(x-25)(25x-1)=0$

$\therefore$ যদি $x-25=0$ হয়, তাহা হইলে $x=25$.

এবং $25x-1=0$ হইলে, $25x=1$, $x=\frac{1}{25}$, অতএব $x=25, \frac{1}{25}$.

9. $x^2-2\sqrt{7}x-2=0.$ [G.U. 1948]

এস্থলে $a=1$, $b=-2\sqrt{7}$ এবং $c=-2$ অর্থাৎ সমীকরণটি এইরূপে লেখা যায়।

$$x^2+(-2\sqrt{7})x+(-2)=0$$

$\therefore$ সূত্রানুসারে $x = \dfrac{-(-2\sqrt{7}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{7})^2 - 4(1)(-2)}}{2.(1)}$

$= \dfrac{2\sqrt{7} \pm \sqrt{28+8}}{2} = \dfrac{2\sqrt{7} \pm \sqrt{36}}{2}$

$= \dfrac{2\sqrt{7} \pm 6}{2} = \dfrac{2(\sqrt{7} \pm 3)}{2} = \sqrt{7} \pm 3.$

10. $17x^2 + 19x = 1848$ [C U. 1921]

$17x^2 + 19x = 1848$, বা, $x^2 + \dfrac{19}{17}x = \dfrac{1848}{17}$

বা, $x^2 + \dfrac{19}{17}x + \left(\dfrac{19}{34}\right)^2 = \left(\dfrac{19}{34}\right)^2 + \dfrac{1848}{17}$

বা, $\left(x + \dfrac{19}{34}\right)^2 = \dfrac{361}{1156} + \dfrac{1848}{17}$, বা, $\left(x + \dfrac{19}{34}\right)^2 = \dfrac{361 + 125664}{1156}$

বা, $\left(x + \dfrac{19}{34}\right)^2 = \dfrac{126025}{1156}$, বা, $\left(x + \dfrac{19}{34}\right)^2 = \left(\dfrac{355}{34}\right)^2$

বা, $x + \dfrac{19}{34} = \pm \dfrac{355}{34}$ $\therefore$ $x = \dfrac{355}{34} - \dfrac{19}{34}$, বা, $x = \dfrac{168}{17} = 9\dfrac{15}{17}$

অথবা $x = -\dfrac{355}{34} - \dfrac{19}{34} = -11$, $\therefore$ $x = 9\dfrac{15}{17}$, -11.

11. $4x^2 + 25x - 351 = 0$. **12** $x^2 - 26x = 407$. [D. B. '29]

13. $10x^2 - 69x + 45 = 0$. **14.** $3x^2 - 11x + 9 = 0$. [C. U. '35]

15. $(x-2)(17x-8) = 555$. [C. U. '32]

16. $(x-7)(x-19) = 64$ [C. U. '18]

17. $6x^2 - 11x - 10 = 0$. [C U. '22]

18. $x^2 - 6x + 2 = 0$. [G. U. '48]

19. $42x^2 - 41x - 20 = 0$. [C. U. '13]

20. $6x^2 - 91x + 323 = 0$. [C. U. '14]

21. $x^2 - 11x - 82052 = 0$. [C. U. '42]

22. $\frac{1}{3}x + \dfrac{3}{x} = 4\frac{1}{4}$. [C. U. '31]

$\dfrac{x^2}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} = 2\frac{1}{6}$. [D. B. '50]

24. $x^2 - 2\sqrt{13}x + 4 = 0$. [C. U. '49]

25. $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{25}{12}$. [C. U. '10]

26. $\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2-5\left(\frac{x-a}{x+a}\right)+6=0$. [P. U. '14]

27. $\frac{x-6}{x+2}+\frac{x-10}{x+6}+2=0$. [C. U. '28]

28. $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}$. [C. U. '20]

29. $\frac{x-3}{x+3}-\frac{x+3}{x-3}+6\frac{6}{7}=0$. [C. U. '11]

30. $ax^2-bx-c=0$. [C. U. '44]

প্রশ্নমালা 1 C

[সব অঙ্কগুলি বাড়ির কাজ।]

সমাধান কর :

1. $2x^2-9x+7=0$.

2. $27x^2+12x+1=0$.

3. $x+156=x^2$.

4. $22x+23-x^2=0$.

5. $23x=120+x^2$.

6. $(9+x)(9-x)=17$.

7. $x^2-\frac{2}{3}x=32$.

8. $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$.

9. $\frac{5x-1}{x+1}=\frac{3x}{2}$.

10. $\frac{1}{1+x}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{35}$.

11. $\frac{3x-1}{4x+7}=1-\frac{6}{x+7}$.

12. $\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x}=\frac{3}{x+6}$.

13. $ax^2+2x=bx$.

14. $3x^2-2ax-bx=0$.

15. $16\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=257$.

16. $4=5x^2-x^4$.

17. 30 কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশদ্বয়ের বর্গফলের সমষ্টি 650 হয়।

18. 50 কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উহাদের অন্যোন্যকের সমষ্টি $\frac{1}{12}$ হয়। [C. U. '13]

19. কোন্ সংখ্যা উহার অন্যোন্যক অপেক্ষা $1\frac{1}{3}$ বড় ? [C. U. '34]

20. দুইটি ক্রমিক যুগ্ম সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 100 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [A. U. '24]

2

লেখর সাহায্যে সহ-সমীকরণের সমাধান

Graphical Solution of Simultaneous Equation

2·1. সহ-সমীকরণে x ও y-এর এক ঘাত মান থাকিলে তাহাদের লেখ-এর সাহায্যে সমাধান করা যায়। একই অক্ষরেখা দুইটি এবং একই দৈর্ঘ্যের একক লইয়া উভয় সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কিত করিতে হয়। যে বিন্দুতে সমীকরণ দুইটির লেখ দুইটি ছেদ করিবে তাহাকে স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হইবে, কারণ বিন্দুটি উভয় লেখর উপরই অবস্থিত। সেইজন্য ছেদ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক মাপিয়া অর্থাৎ ভুজ ও কোটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে সমীকরণ দুইটির x ও y-র মান হইবে। এইরূপে লেখ র সাহায্যে সমাধান করা হয়।

প্রশ্নমালা 2

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

লেখর সাহায্যে সমাধান কর ঃ

1. $3x+2y=7$, $8x-y=6$. [W.B.S.F. 1956]

$3x+2y=7$, বা, $2y=7-3x$, $\therefore \quad y=\dfrac{7-3x}{2}$

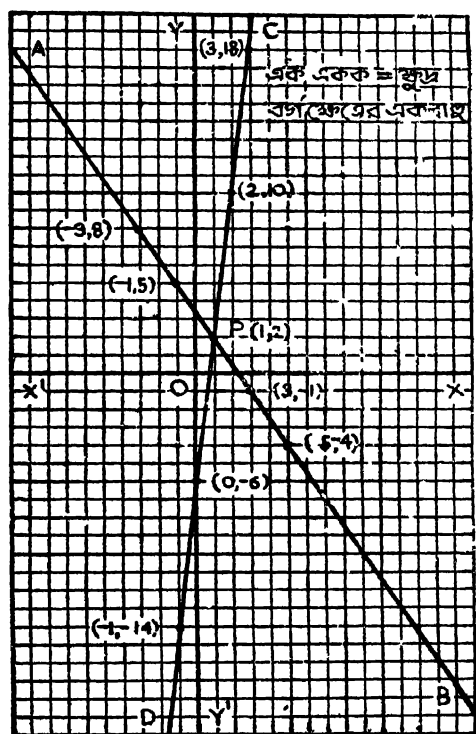
এই সমীকরণ হইতে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি পাওয়া যায়।

যখন	$x=$	1	-1	3	-3	5
তখন	$y=$	2	5	-1	8	-4

এবং $8x-y=6$, বা, $8x-6=y$, অথবা $y=8x-6$, এই সমীকরণ হইতে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি পাওয়া যায়।

যখন	$x=$	0	1	-1	2	3
তখন	$y=$	-6	2	-14	10	18

মনে করিলাম XOX′ এবং YOY′ দুইটি অক্ষরেখা O মূলবিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। এক্ষণে ছক কাগজের একটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া পূর্বলিখিত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করা হইল।

সমীকরণ দুইটির বিন্দুগুলি স্বতন্ত্রভাবে পরপর যুক্ত করিয়া প্রদত্ত দুইটি সমীকরণের লেখচিত্র হইল যথাক্রমে AB ও CD সরলরেখা। ইহারা পরস্পর

1 নং চিত্র

P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক মাপিয়া দেখা গেল যে উহার ভুজ 1 একক ও কোটি 2 একক। ∴ সমীকরণ দুইটির নির্ণেয় সমাধান, $x=1$ এবং $y=2$.

2. $3x=17-2y$; $3y=2x+6$. [A. U. 1927

2 নং চিত্র

$3x=17-2y$, বা, $2y=17-3x$

$\therefore\ y=\dfrac{17-3x}{2}$

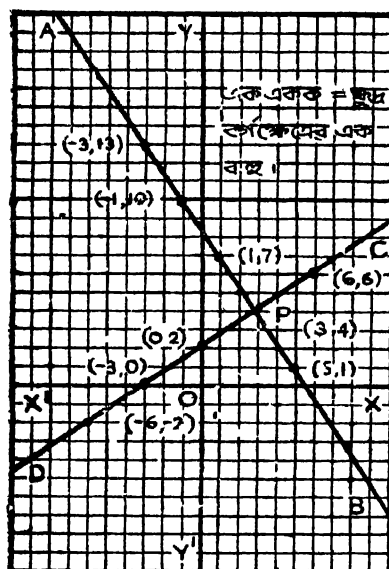
যখন	$x=$	1	-1	3	-3	5
তখন	$y=$	7	10	4	13	1

এবং $3y=2x+6$, $\therefore\ y=\dfrac{2x+6}{3}$.

যখন	$x=$	0	3	-3	6	-6
তখন	$y=$	2	4	0	6	-2

1 নং উদাহরণের ন্যায় লিখিয়া যাইতে হইবে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক মাপিয়া দেখা গেল যে উহার ভুজ 3 একক ও কোটি 4 একক।

$\therefore$ সমীকরণ দুইটির নির্ণেয় সমাধান, $x=3$, এবং $y=4$.

3. $2x-y=8$; $4x+3y=6$.

$2x-y=8$, বা, $y=2x-8$.

যখন	$x=$	0	4	5	6	3
তখন	$y=$	-8	0	2	4	-2

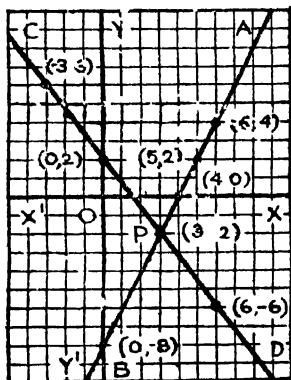
এবং $4x+3y=6$, বা $3y=6-4x$,

$\therefore\ y=\dfrac{6-4x}{3}$

যখন	$x=$	0	3	-3	6
তখন	$y=$	2	-2	6	-6

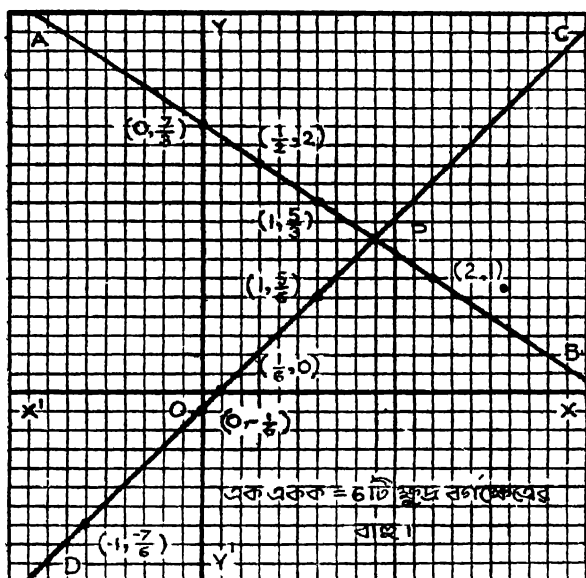
1 নং উদাহরণের ন্যায় লিখিয়া যাইতে হইবে।

P বিন্দুর স্থানাঙ্ক মাপিয়া দেখা গেল যে, উহার ভুজ 3 একক ও কোটি -2 একক। সুতরাং সমীকরণ দুইটির নির্ণেয় সমাধান, $x=3$ এবং $y=-2$.

এক একক = ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহু।

3 নং চিত্র

4. $2x+3y=7$; $6x-6y=1$.

$2x+3y=7$, বা, $3y=7-2x$, $\therefore\ y=\dfrac{7-2x}{3}$.

যখন	$x=$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
তখন	$y=$	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	1

4 নং চিত্র

পুনরায় দ্বিতীয় সমীকরণ হইতে পাওয়া যায়,

$6x-6y=1$, বা, $6y=6x-1$, $\therefore\ y=\dfrac{6x-1}{6}$

যখন	$x=$	0	$\frac{1}{6}$	1	-1
তখন	$y=$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{7}{6}$

বিন্দুগুলির স্থানাঙ্কে ভগ্নাংশ আছে। ভগ্নাংশগুলির হরের ল. সা. গু. 6, সুতরাং ছয়টি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিতে হইবে। পূর্বের 1নং উদাহরণগুলিতে যেরূপ লেখা আছে সেইরূপ সব লিখিয়া যাইতে হইবে, কেবল একটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রে না বলিয়া '6টি' ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উপরিলিখিত বিন্দুগুলি ছক কাগজে স্থাপন করা হইল'—এইরূপ লিখিতে হইবে।

সরলরেখা দুইটি P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $x=9\div6=1\frac{1}{2}$ একক এবং $y=8\div6=1\frac{1}{3}$ একক। অতএব নির্ণেয় বীজ $x=1\frac{1}{2}$ এবং $y=1\frac{1}{3}$.

5. $y=2x+3$; $y+x=6$. 6. $y=4x$; $2x+y=18$.

7. $3x+2y=16$; $5x-3y=14$. 8. $6y-5x=18$; $4x=3y$.

9. $2y=5x+15$; $3y-4x=12$. 10. $2x+y=0$; $y=\frac{4}{3}(x+5)$.

11. $\frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1$; $4x-3y=6$. 12. $2x-y=1$; $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$.

13. $x+4y=5$; $3x+y=4$. [C. U. '26]

14. $3x+4y+6=0$; $6x+5y+9=0$. [C. U. '20]

15. $x+y=2$; $x-y=0$. [C. U. '18]

16. $3x+4y=25$; $4x-3y=0$. [C. U. '14]

17. $x-2y=4$; $2x+y=3$. [C. U. '21]

18. $7x-2y=14$; $x+2y=2$. [C. U. '31]

19. $3x-2y=0$; $2x-y=1$. [W. B. S. F. '57]

20. $2x-5y=0$; $x-y=6$. [W. B. S. F. '59]

21. $3x+2y=8$; $4x-3y=5$. [C. U. '51]

22. লেখ সাহায্যে $x=y$, এবং $x+y=2$ এর সমাধান কর এবং ঐ লেখদ্বয়ের অন্তর্ভূ্ত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '52]

23. $2x+3y=13$; $3x-2y=13$. [P. U. '24]

24 $3x+2y=5$; $5x-2y=3$. [P. U. '32]

25. $y=5$; $5x+6y=30$. [C. U. 1943] 26. $y=3x$; $y+5x=16$.

27. একই অক্ষরেখা এবং একই একক লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কিত কর। লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি বাহির কর।

(i) $y-x=2$; $3x-2y=5$. [W. B. S. F. 1962 Comp.]

(ii) $3x-y=5$, $4x+3y=11$. [W. B. S. F. 1962]

(iii) $4y=3x$, $4x-3y=14$. [W. B. S. F. 1961]

(iv) $x=y+1$; $2y=3x-5$. [W. B. S. F. 1960]

28. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$, এই সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। লেখচিত্রটি দুই অক্ষরেখাকে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের ভুজ ও কোটি বাহির কর।

3

অনুপাত

Ratio

3·1. দুইটি একই জাতীয় রাশির মধ্যে সম্বন্ধ নির্ণয় করিতে হইলে, কিংবা একটির সহিত অপরটির তুলনা করিতে হইলে, রাশি দুইটিকে একই এককে পরিণত করিয়া একটি অপরটির কত গুণ বড় বা কত অংশ ছোট তাহাকেই প্রথম বা দ্বিতীয় রাশির **অনুপাত** (Ratio) বলে। প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল হয় তাহাই রাশি দুইটির অনুপাত। এই অনুপাত সর্বদাই একটি একক নিরপেক্ষ **শুদ্ধ সংখ্যা** (Abstract number)। যেমন 10 কিলোর সহিত 2 কিলোর কি অনুপাত, তাহা বুঝিতে হইলে 10 কিলো 2 কিলোর কত গুণ বড় তাহাই বাহির করিতে হয়। সুতরাং 10 কিলো 2 কিলোর অনুপাত=10 কিলো÷2 কিলো $=\frac{10 \text{ কিলো}}{2 \text{ কিলো}}=\frac{5}{1}$. অনুপাত সর্বদা একই জাতীয় রাশির মধ্যে হয়, ভিন্ন জাতীয় রাশিদ্বয়ের মধ্যে হয় না। যেমন, 20 টাকা ও 5 টাকার অনুপাত $=\frac{20 \text{ টাকা}}{5 \text{ টাকা}}=\frac{4}{1}$, 70 বৎসর ও 30 বৎসরের অনুপাত $=\frac{70 \text{ বৎসর}}{30 \text{ বৎসর}}=\frac{7}{3}$; 2 ডেকামিটার ও 2 মিটারের অনুপাত $=\frac{20 \text{ মিটার}}{2 \text{ মিটার}}=\frac{10}{1}$.

3·2. দুইটি রাশির অনুপাত বুঝাইতে হইলে দ্বিতীয়টি দ্বারা প্রথমটিকে ভাগ করিতে হয়, সেইজন্য অনুপাত নির্দেশক চিহ্নটি, ভাগ চিহ্নের মধ্যস্থলের দাঁড়িটি ত্যাগ করিলে যে (:) দুইটি উপরে ও নীচে বিন্দু থাকে তাহা দ্বারাই প্রকাশ করা হয়। সুতরাং $a:b$ ও $a\div b$ বা, $\frac{a}{b}$ কিংবা a/b সমার্থবোধক। $a:b$ কে পড়িতে হয় a অনুপাত b, a ও bর অনুপাত কিংবা 'a ইজ টু b' এইরূপ।

3·3. যে দুইটি রাশির অনুপাত গঠিত হয় তাহাদের প্রত্যেকটিকে **পদ** বা **রাশি** (Terms) বলে। প্রথমটিকে **পূর্ব পদ** বা **পূর্ব রাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয়টিকে **উত্তর পদ** বা **উত্তর রাশি** (Consequent) বলে। যেমন, $x:y$ এই অনুপাতের x পূর্ব পদ ও y উত্তর পদ।

3·4. বিবিধ অনুপাত :

(*a*) **সাম্যানুপাত ও বৈষম্যানুপাত :** যে সকল অনুপাতের পূর্ব পদ ও উত্তর পদ সমান তাহাদের **সাম্যানুপাত** (Ratio of equality) বলে। যেমন, 4 : 4, 1 : 1, $a : a$ ইত্যাদি। যদি উহারা অসমান হয় তাহা হইলে তাহাদের **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of inequality) বলে।

(*b*) **গুরু অনুপাত ও লঘু অনুপাত :** পূর্বরাশির উত্তর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অনুপাতটিকে **গুরু অনুপাত** (Ratio of greater inequality) বলে। যেমন, 8 : 3, 20 : 11, $a : b$ (যদি $a>b$ হয়) এবং ক্ষুদ্রতর হইলে অনুপাতটিকে **লঘু অনুপাত** (Ratio of lesser inequality) বলে। যেমন, 3 : 8, 11 : 20, $a : b$ (যদি $a<b$ হয়)।

সংজ্ঞানুসারে দেখা যায় গুরু অনুপাত>1, সাম্যানুপাত$=1$ এবং লঘু অনুপাত<1.

ব্যস্ত বা বিপরীত অনুপাত : কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি অপর কোন অনুপাতের যথাক্রমে উত্তর রাশি ও পূর্ব রাশির সমান হইলে অনুপাত দুইটির প্রত্যেকটিকে অপরটির **ব্যস্ত বা বিপরীত অনুপাত** (Inverse বা Reciprocal ratio) বলে। যেমন, $a : b$ এবং $b : a$ ইহারা পরস্পর ব্যস্ত অনুপাত।

(*d*) **মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত :** দুই বা তাহার অধিক অনুপাতের পূর্বরাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে পূর্ব রাশি এবং উত্তর রাশিগুলির ক্রমিক গুণফলকে উত্তর রাশিরূপে প্রকাশ করিয়া লব্ধ অনুপাতকে পূর্বোক্ত অনুপাতগুলির **মিশ্র বা যৌগিক অনুপাত** (Compound ratio) বলে। যেমন $a : b, c : d, e : f$ এই তিনটি অনুপাতের মিশ্র অনুপাত হইবে ($ace : bdf$), কিংবা 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4, 4 : 5 এর মিশ্র অনুপাত $(1\times2\times3\times4) : (2\times3\times4\times5)$ বা 1 : 5.

(*e*) কোন অনুপাতের পূর্ব পদের বর্গকে পূর্ব পদ ও উত্তর পদের বর্গকে উত্তর পদ রূপে প্রকাশিত অনুপাতকে **দ্বিগুণানুপাত বা দ্বৈত অনুপাত** (Duplicate ratio) বলে। যেমন, $a^2 : b^2$ এই অনুপাতকে $a : b$-এর দ্বিগুণানুপাত বলে। তদ্রূপ, $a^3 : b^3$ এই অনুপাতকে $a : b$-এর **ত্রিগুণানুপাত** (Triplicate ratio) বলে। $a^4 : b^4$ এই অনুপাতকে $a : b$-এর **চতুর্গুণানুপাত** বলে ইত্যাদি।

(*f*) কোন অনুপাতের পূর্বপদের বর্গমূল পূর্বপদ এবং উত্তর পদের বর্গমূল উত্তর পদরূপে প্রকাশিত অনুপাতকে প্রথমোক্ত অনুপাতের **দ্বিভাজিত অনুপাত**

(subduplicate ratio) বলে। যেমন $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ বা, $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ অনুপাতটি $a:b$ এর দ্বিভাজিত অনুপাত। তদ্রূপ, $a^{\frac{1}{3}}:b^{\frac{1}{3}}$ বা, $\sqrt[3]{a}:\sqrt[3]{b}$ অনুপাতটি $a:b$ অনুপাতের **ত্রিভাজিত অনুপাত** (Subtriplicate ratio) বলে।

(*g*) যে অনুপাতের পদগুলি সরল রাশি, ভগ্নাংশ নহে, তাহাকে **সরল অনুপাত** (Simple ratio) বলে। যেমন, 3 : 5, 7 : 10 ইত্যাদি।

3·5. অনুপাতের কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয়ঃ

(*a*) কোন ভগ্নাংশের লব ও হরকে শূন্য ভিন্ন যে-কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের মানের কোনও পরিবর্তন হয় না। সেইরূপ কোন অনুপাতের উভয় পদকে শূন্য ভিন্ন যে কোন একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে, ঐ অনুপাতের মানের কোন পরিবর্তন হয় না। কারণ,

$a:b=\frac{a}{b}$ এবং $(ma):(mb)=\frac{ma}{mb}$ কিন্তু $\because\ \frac{a}{b}=\frac{ma}{mb}$

$\therefore\ a:b=ma:mb.\ [m\neq 0]$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় $a:b=(a\div m):(b\div m).\ [m\neq 0]$

(*b*) পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি উভয় পদের সহিত একই ধনরাশি যোগ করিলে গুরু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হয় এবং লঘু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়।

$a:b$ অর্থাৎ $\frac{a}{b}$ এই অনুপাতের উভয় পদের সহিত x একটি ধনরাশি যোগ করিলে অনুপাতটি হইবে $\frac{a+x}{b+x}$ বা, $(a+x):(b+x)$.

এখন, $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{a(b+x)-b(a+x)}{b(b+x)}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$.

যদি $a>b$ হয়, তাহা হইলে $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ধনাত্মক। $\therefore\ \frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$,

অর্থাৎ গুরু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। এবং যদি $a<b$ হয়, তাহা হইলে $\frac{x(a-b)}{b(a+x)}$ ঋণাত্মক। $\therefore\ \frac{a+x}{b+x}>\frac{a}{b}$, অর্থাৎ লঘু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়।

(*c*) পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি উভয় পদ হইতে একই ধন রাশি বিয়োগ করিলে গুরু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় এবং লঘু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

$\frac{a}{b}$ এই অনুপাতের উভয় পদ হইতে x ধন রাশিটি বিয়োগ করিলে, অনুপাতটি হইবে $\frac{a-x}{b-x}$, বা $(a-x):(b-x)$। এখন $\frac{a}{b}-\frac{a-x}{b-x}$

$$=\frac{ab-ax-ab+bx}{b(b-x)}=\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$$

যদি $a>b$ হয়, তাহা হইলে $\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$ ঋণাত্মক ; $\therefore \frac{a-x}{b-x}>\frac{a}{b}$

এবং $a<b$ হইলে, $\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$ ধনাত্মক ; $\therefore \frac{a-x}{b-x}<\frac{a}{b}$.

(d) অনুপাতগুলিকে ভগ্নাংশের আকারে পরিণত করা যায় বলিয়া সহজেই উহাকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$$20:50=\frac{20}{50}=\frac{2}{5}=2:5.$$

(e) কতকগুলি অনুপাত তুলনা করিবার সময়, অনুপাতগুলিকে সাধারণ ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করিয়া উহাদের সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হয়। লবের মানগুলি দেখিয়া ভগ্নাংশগুলির ক্রমমান অনুসারে অনুপাতগুলিরও ক্রমমান নির্ণয় করা হয়। যেমন, 2 : 3, 3 : 4 এবং 4 : 5 তুলনা করিতে হইলে, অনুপাতগুলি $=\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ এবং $\frac{4}{5}$; ইহাদের হরগুলির ল. সা. গু. 60. সুতরাং,

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times(60\div3)}{3\times(60\div3)}=\frac{40}{60};\ \frac{3}{4}=\frac{3\times(60\div4)}{4\times(60\div4)}=\frac{45}{60};\ \frac{4}{5}=\frac{4\times(60\div5)}{5\times(60\div5)}=\frac{48}{60}.$$

$\therefore$ ভগ্নাংশগুলির ক্রমমান $\frac{48}{60}, \frac{45}{60}, \frac{40}{60}$ অর্থাৎ $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$. অতএব অনুপাতগুলির ক্রমমান 4 : 5, 3 : 4, 2 : 3.

প্রশ্নমালা 3

[1 হইতে 16 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. 49 : 84 অনুপাতকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

49, 84 এর গ. সা. গু. $=7$ $\therefore$ $49:84=\frac{49}{84}=\frac{49\div7}{84\div7}=\frac{7}{12}=7:12$

2. 3 : 4, 5 : 6, 7 : 12 ক্রমমান অনুসারে সাজাও।

$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{12}$; হরগুলির ল. সা. গু. 12 এবং $12\div4=3$, $12\div6=2$, $12\div12=1$.

$\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$; $\frac{5}{6}=\frac{5\times2}{6\times2}=\frac{10}{12}$; $\frac{7}{12}=\frac{7\times1}{12\times1}=\frac{7}{12}$ $\therefore$ $\frac{10}{12}, \frac{9}{12}, \frac{7}{12}$.

অতএব ভগ্নাংশগুলির ক্রমমান $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{7}{12}$ $\therefore$ অনুপাতগুলির ক্রমমান

5 : 6 ; 3 : 4 ; 7 : 12.

3\. মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর : (a) $2:3, 3:4, 6:7, 7:18$.

নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত $=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{6}{7}\times\frac{7}{18}=\frac{1}{6}=1:6$.

(b) $a:x, x:y$ এবং $y:b$

নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত $=\frac{a}{x}\times\frac{x}{y}\times\frac{y}{b}=\frac{a}{b}=a:b$.

4\. $a+x:b+x$ এই অনুপাত $a:b$ এর দ্বিগুণানুপাতের সমান হইলে x-র মান নির্ণয় কর।

[Pat. U. 1896]

$\because\ a+x:b+x=a^2:b^2$; $\therefore\ \frac{a+x}{b+x}=\frac{a^2}{b^2}$

বা, $a^2(b+x)=b^2(a+x)$, বা, $x(b^2-a^2)=a^2b-ab^2=ab(a-b)$;

$\therefore\ x=\frac{ab(a-b)}{b^2-a^2}=\frac{-ab}{a+b}$.

5\. যদি $5x-2y:3x+4y=2:3$ হয়, $x:y$-র মান কত ?

$\frac{5x-2y}{3x+4y}=\frac{2}{3}$, বা, $15x-6y=6x+8y$; বা, $9x=14y$.

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{14}{9}\ \ \therefore\ x:y=14:9$.

6\. যদি $2a:3b$ অনুপাতটি $2a-x:3b-x$ এর দ্বিগুণানুপাতের সমান হয়, x-এর মান নির্ণয় কর।

$\frac{2a}{3b}=\left(\frac{2a-x}{3b-x}\right)^2$, বা, $2a(9b^2-6bx+x^2)=3b(4a^2-4ax+x^2)$,

বা, $18ab^2-12abx+2ax^2=12a^2b-12abx+3bx^2$, বা, $x^2(2a-3b)$ $=6ab(2a-3b)$, বা, $x^2=6ab$. $\therefore\ x=\sqrt{6ab}$. [$\because\ 2a-3b\neq0$]

7\. যদি $a:b$ এর দ্বিগুণানুপাত $a-x:b-x$ হয়, তাহা হইলে দেখাও যে, $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. $(b\neq a)$

$\because\ \frac{a-x}{b-x}=\frac{a^2}{b^2}$, বা, $ab^2-b^2x=a^2b-a^2x$, বা, a^2x-b^2x

$=a^2b-ab^2$, বা, $x(a^2-b^2)=ab(a-b)$; বা, $x=\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)}$,

বা, $x=\frac{ab}{a+b}\ \therefore\ \frac{1}{x}=\frac{a+b}{ab}=\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

8. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 ; যদি প্রতি পদের সহিত 4 যোগ করা হয়, তাহা হইলে 5 : 6-র সমান হয়। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর সংখ্যা দুইটি $3x$ এবং $4x$, তাহা হইলে $\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}$.

প্রশ্নানুসারে $\frac{3x+4}{4x+4}=\frac{5}{6}$, বা, $5(4x+4)=6(3x+4)$,

বা, $20x+20=18x+24$, বা, $2x=4$, $\therefore x=2$

অতএব সংখ্যা দুইটি $3\times2=6$, এবং $4\times2=8$.

9. $a : b$ অনুপাতটির প্রতি পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে অনুপাতটি $c : d$-র সমান হইবে ?

মনে করা যাউক নির্ণেয় সংখ্যাটি x. $\therefore \frac{a+x}{b+x}=\frac{c}{d}$, বা, $c(b+x)=d(a+x)$.

বা, $bc+cx=ad+dx$, বা, $x(c-d)=ad-bc$.

$\therefore x=\frac{ad-bc}{c-d}$ অথবা, $\frac{bc-ad}{d-c}$.

10. A-র বয়স 24 বৎসর এবং B-র বয়স 15 বৎসর। ন্যূনতম কত বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 7 : 5 অপেক্ষা কম হইবে ? [B. U. 1893]

মনে করা যাউক নির্ণেয় বৎসর x. $\therefore$ x বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত $\frac{24+x}{15+x}$ হইবে। x-র মান যতই বর্ধিত হইবে অনুপাতটির মান ততই হ্রাস প্রাপ্ত হইবে। মান কমিতে কমিতে 24 : 15 বা 8 : 5 অপেক্ষা কমিবে এবং ক্রমে ক্রমে 1-এর নিকটবর্তী হইবে। যদি x-র মান এরূপ হয় যে $\frac{24+x}{15+x}=\frac{7}{5}$ অর্থাৎ যখন $x=7\frac{1}{2}$ তখন তাহাদের বয়সের অনুপাত 7 : 5 হইবে। কিন্তু x-এর মান আরও বর্ধিত হইলে বয়সের অনুপাত 7 : 5 অপেক্ষা কমিয়া যাইবে। $\therefore$ ন্যূনতম বৎসর $x=8$ হইলে অনুপাতটি 7 : 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বৎসর $=8$.

মানের তুলনা কর :

11. 13 : 14, 23 : 24. 12. 3 : 7, 7 : 11, 11 : 15.

13. $x+y : x-y$, $x^2+y^2 : x^2-y^2$. যদি $x>y$ হয়।

14. $x+3y : x+4y$, $x+2y : x+3y$.

মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর :

15. 2 : 3, 15 : 16. 16. 2 : 3, 5 : 6, 9 : 10.

17. $x+y : x-y,\ x^2+y^2 : (x+y)^2,\ (x^2-y^2)^{\frac{2}{2}} : x^4-y^4$.

18. যদি $x : y=3 : 4$ হয়, তাহা হইলে $3y-x : 2x+y$-র মান নির্ণয় কর।

19. $a+x : b+x$-এর দ্বিগুণানুপাত $a : b$ হইলে x-এর মান নির্ণয় কর। [Pat. U. 1896]

20. $a-x : b-x$ অনুপাতটি $a : b$-এর দ্বিগুণানুপাতের সমান হইলে, x-এর মান নির্ণয় কর।

21. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4, সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টি 28 হইলে, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

22. $a : b$ গুরু অনুপাত হইলে, দেখাও যে $a : b > a^2+b^2 : 2ab$ [B. U. 1888]

23. 7 : 11 অনুপাতের উভয় পদ হইতে কত বিয়োগ করিলে 4 : 7 অনুপাতের সমান হইবে?

24. $a-x : b-x$-এর দ্বিভাজিত অনুপাতটি যদি $a : b$ হয়, তবে x-এর মান নির্ণয় কর।

25. 8 : 5 অনুপাতের উভয় পদের সহিত কত যোগ করিলে অনুপাতটি 4 : 3-এর সমান হইবে?

26. কোন অনুপাতের উভয় পদের সহিত 2 যোগ করিলে অনুপাতটি 4 : 5-এর সমান হয়, এবং প্রতি পদ হইতে যদি 1 বিয়োগ করা হয়, অনুপাতটি 3 : 4 হয়। অনুপাতটি নির্ণয় কর।

27. দুই ব্যক্তির বয়সের অনুপাত 8 : 13; 5 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 7 : 12, উহাদের বর্তমান বয়স কত?

28. দুই ব্যক্তির বয়স 36 বৎসর ও 31 বৎসর। কত বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 17 : 15 এই অনুপাতের সমান হইবে?

4

সমানুপাত

Proportion

4·1. **সমানুপাত :** যদি প্রথম দুইটি রাশির অনুপাত অপর দুইটি রাশির অনুপাতের সমান হয়, তাহা হইলে ঐ চারিটি রাশি **সমানুপাত** (Proportion) উৎপন্ন করে ; এবং ঐ চারিটি রাশিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলা হয়। যেমন, 2 কিলোগ্রাম : 5 কিলোগ্রাম = 10 টাকা : 25 টাকা, এখানে দুইটি অনুপাত সমান, কারণ, প্রত্যেক অনুপাত 2 : 5-র সমান। তাহা হইলে এই চারিটি রাশি সমানুপাতী। আবার $a : b = c : d$ হইলে, a, b, c, d-কে সমানুপাতী এবং $a : b = c : d$ এই সম্বন্ধকে সমানুপাত বলা হয়। a, b, c, d রাশি চারিটি সমানুপাতী হইলে উহাদিগকে সাধারণতঃ এইরূপে লেখা হয় $a : b :: c : d$; '=' সমান চিহ্নের পরিবর্তে সমান চিহ্নের সংক্ষিপ্ত আকার '::' এই চিহ্নটি ব্যবহৃত হয়। ইহা পড়িতে হয় a অনুপাত b সমান c অনুপাত d এইরূপে। ইংরাজীতে বলে 'a is to b as c is to d'. প্রকৃতপক্ষে, $a : b :: c : d$, $a : b = c : d$, $a \div b = c \div d$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ সবগুলি একই সমানুপাতের বিভিন্ন রূপ।

4·2. $a : b :: c : d$, এই সমানুপাতের চারিটি রাশির **প্রথম** ও **চতুর্থ** অর্থাৎ a ও d রাশিদ্বয়কে **অন্ত্যরাশি** বা **প্রান্তীয় রাশি** (Extremes) এবং **দ্বিতীয়** ও **তৃতীয়** অর্থাৎ b ও c রাশিদ্বয়কে **মধ্যরাশি** বা **মধ্যক** (Means) বলে। প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির **চতুর্থ** রাশিটিকে **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলে। d রাশিটি a, b, c-র চতুর্থ সমানুপাতী।

4·3. যদি পৃথক চারিটি রাশি সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ঐ সমানুপাতকে **সরল সমানুপাত** (Simple proportion) বলে। যেমন, $a : b :: c : d$ ইহা সরল সমানুপাত।

4·4. **ক্রমিক সমানুপাত :** যদি প্রথম রাশি : দ্বিতীয় রাশি, দ্বিতীয় রাশি : তৃতীয় রাশি, তৃতীয় রাশি : চতুর্থ রাশি প্রভৃতি অনুপাতগুলি সমান হয়, তাহা হইলে ঐ রাশিগুলিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলে। যেমন, $a : b :: b : c :: c : d$ হইলে a, b, c ও d ক্রমিক সমানুপাতী হইবে। তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে অর্থাৎ $a : b :: b : c$ হইলে b রাশিটিকে

a ও c-র **মধ্য সমানুপাতী** (Mean proportional) এবং c-কে a ও b-র **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলে।

4·5. **উপপাদ্য** (i): $\boldsymbol{a:b::c:d}$ হইলে, $\boldsymbol{ad=bc}$ হইবে। **অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে,**

অন্ত্যরাশিদ্বয়ের গুণফল = মধ্যরাশিদ্বয়ের গুণফল।

যেহেতু, $a:b::c:d$ অর্থাৎ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore$ বজ্রগুণন করিয়া $\boldsymbol{ad=bc}$.

4·6. (a) $\boldsymbol{a:b::b:c}$ হইলে, (a) $\boldsymbol{b^2=ac}$ হইবে। **অর্থাৎ তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতি হইলে, অন্ত্যরাশির গুণফল = মধ্যকের বর্গ।**

যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ $\therefore$ বজ্রগুণন করিয়া $\boldsymbol{b^2=ac}$ বা, $\boldsymbol{b=\sqrt{ac}}$.

(b) **প্রথম ও তৃতীয় রাশির অনুপাত = প্রথম ও মধ্যকের দ্বিগুণানুপাতের সমান।** অর্থাৎ $\boldsymbol{\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}}$.

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, বা, $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ বা, $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$.

4·7. $\boldsymbol{a:b::c:d}$ হইলে, $\boldsymbol{b:a::d:c}$ হইবে। **অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদের ব্যস্তভাবে লইলেও উহাদের অন্যোন্যকগুলিও সমানুপাতী হইবে।**

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ 1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}\ \text{বা},\ \frac{b}{a}=\frac{d}{c}.$$

এই প্রক্রিয়াকে **ব্যস্ত প্রক্রিয়া** (Invertendo) বলে।

4·8. $\boldsymbol{a:b::c:d}$ হইলে, $\boldsymbol{a:c::b:d}$ হইবে। **অর্থাৎ একজাতীয় চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, উহাদের একান্তরভাবে** (alternately) **লইলেও উহারা সমানুপাতী হইবে।**

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; উভয়পক্ষকে একই রাশি $\frac{b}{c}$ দিয়া গুণ করা হইল।

$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\times\frac{b}{c}$, বা, $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. এই প্রক্রিয়াকে **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternendo) **বলে।**

4·9 $a:b::c:d$ হইলে, $a+b:b::c+d:d$ হইবে অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের সমষ্টি ও দ্বিতীয়ের অনুপাত এবং তৃতীয় ও চতুর্থের সমষ্টি ও চতুর্থের অনুপাত সমানুপাতী হইবে।

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, বা, $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$, বা, $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

এই প্রক্রিয়াকে যোগ প্রক্রিয়া (Componendo) বলে।

(ii) $a:b::c:d$ হইলে, $a+b:a::c+d:c$ হইবে।

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, বা, $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, বা, $\frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1$; বা, $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$.

4·10 (i) $a:b::c:d$ হইলে, $a-b:b::c-d:d$ হইবে। অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের বিয়োগফল এবং দ্বিতীয়ের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের বিয়োগফল এবং চতুর্থের অনুপাত সমান হইবে।

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, বা, $\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$, বা, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

এই প্রক্রিয়াকে ভাগ প্রক্রিয়া (Dividendo) বলে।

(ii) $a:b::c:d$ হইলে, $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$ হইবে।

4·11. $a:b::c:d$ হইলে, $a+b:a-b::c+d:c-d$ হইবে। অর্থাৎ চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের যোগফল এবং বিয়োগফলের অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির যোগফল ও বিয়োগফলের অনুপাতের সমান হইবে।

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 4·9 ও 4·10 অনুচ্ছেদ হইতে পাওয়া যায়।

$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ এবং $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

ভাগ করিয়া $\frac{a+b}{b}\times\frac{b}{a-b}=\frac{c+d}{d}\times\frac{d}{c-d}$, বা, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

এই প্রক্রিয়াকে যোগ ও ভাগ (Componendo and Dividendo) প্রক্রিয়া বলে।

4·12. $a : b :: c : d$ হইলে, $a : a-b :: c : c-d$ হইবে। **চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে, প্রথম এবং প্রথম ও দ্বিতীয়ের বিয়োগফলের অনুপাত, তৃতীয় এবং তৃতীয় ও চতুর্থের বিয়োগফলের অনুপাত সমান হইবে।**

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\therefore$ ভাগ প্রক্রিয়ায় $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ এবং ব্যস্ত প্রক্রিয়ায়

$\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$ $\therefore$ $\frac{b}{a-b}\times\frac{a}{b}=\frac{d}{c-d}\times\frac{c}{d}$, বা, $\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}$.

এই প্রক্রিয়াকে **রূপান্তর প্রক্রিয়া** (Convertendo) বলে।

4·13. $a : b :: c : d$ হইলে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$ হইবে।

অর্থাৎ চারিটি রাশি সমাপাতী হইলে, তাহাদের

প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{\text{লবের যোগফল}}{\text{হরের যোগফল}}=\frac{\text{লবের বিয়োগফল}}{\text{হরের বিয়োগফল}}$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ (মনে করা যাউক), $\therefore$ $a=bk$ এবং $c=dk$.

$\therefore$ $\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{(b+d)k}{(b+d)}=k$;

এবং $\frac{a-c}{b-d}=\frac{bk-dk}{b-d}=\frac{(b-d)k}{(b-d)}=k$.

অতএব $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}$. [কারণ প্রত্যেক অনুপাত $=k$]

4·14. একটি **প্রয়োজনীয় উপপাদ্য ঃ**

$p, q, r,$······এবং n যে কোন সংখ্যাই হোক না কেন,

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=$······হইলে, অনুপাতগুলির প্রত্যেকটি

$$\left\{\frac{pa^n+qd^n+re^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

মনে করা যাউক, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots k$.

$\therefore$ $a=bk$; $c=dk$; $e=fk$;.....

$\therefore$ $pa^n=p(bk)^n=pb^nk^n$, $qc^n=q(dk)^n=qd^nk^n$

$re^n=r(fk)^n=rf^nk^n$ ইত্যাদি।

∴ যোগ করিয়া $pa^n+qc^n+re^n+\cdots=(pb^n+qd^n+rf^n+\ldots)k^n$.

$$\therefore \left\{\frac{pa^n+qc^n+re^n+\ldots}{pb^n+qd^n+rf^n+\ldots}\right\}^{\frac{1}{n}}=\left\{\frac{k^n(pb^n+qd^n+rf^n+\ldots)}{(pb^n+qd^n+rf^n+\cdots)}\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$=(k^n)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$ সুতরাং উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

প্রশ্নমালা 4

[1 হইতে 12 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. 16, 10 এবং 24 এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে করা যাউক নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী $=x$; তাহা হইলে,

$16:10::24:x$; বা, $\frac{16}{10}=\frac{24}{x}$, বা, $16x=24\times 10$,

$\therefore\ x=\frac{24\times 10}{16}=15.$

2. 16 এবং 24 এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে করা যাউক x নির্ণেয় সমানুপাতী; তাহা হইলে,

$16:24::24:x$; বা, $\frac{16}{24}=\frac{24}{x}$, বা, $16x=24\times 24$,

$\therefore\ x=\frac{24\times 24}{16}=36.$

3. a^3b এবং ab^3 এর মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর।

যদি x নির্ণেয় মধ্য সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে,

$a^3b:x::x:ab^3$, বা, $\frac{a^3b}{x}=\frac{x}{ab^3}$.

$\therefore\ x^2=a^3b\times ab^3=a^4b^4$, অতএব $x=a^2b^2$.

4. $a:b::c:d$ হইলে দেখাও যে, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\therefore\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$;

অতএব যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া অনুসারে $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2+d^2}{c^2-d^2}$.

5. x ও z-এর মধ্য সমানুপাতী y হইলে, প্রমাণ কর যে, x^2+y^2 এবং y^2+z^2 এর মধ্য সমানুপাতী $xy+yz$. [P. U. 1890]

যেহেতু $x:y::y:z$, $\therefore\ y^2=xz$.

এক্ষণে $(x^2+y^2)(y^2+z^2)=(x^2+xz)(xz+z^2)=x(x+z).z(x+z)$
$$=(x+z)^2xz=(x+z)^2y^2=\{y(x+z)\}^2$$
$$=(xy+yz)^2$$

$\therefore\ (x^2+y^2):(xy+yz)::(xy+yz):(y^2+z^2).$

অতএব (x^2+y^2) এবং (y^2+z^2) এর মধ্য সমানুপাতী $xy+yz$.

6. 3, 5, 7 এবং 10 ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কত যোগ করিলে যোগফল চারিটি সমানুপাতী হইবে ?

মনে করা যাউক x নির্ণেয় সংখ্যা। $\therefore$ $3+x$, $5+x$, $7+x$ এবং $10+x$ সমানুপাতী। অর্থাৎ $\dfrac{3+x}{5+x}=\dfrac{7+x}{10+x}$, বা, $(7+x)(5+x)=(10+x)(3+x)$,

বা, $30+13x+x^2=35+12x+x^2$, বা, $x=5$.

চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :

7. 4, 5, 6. 8. 10, 15, 12. 9. $2a, 3b, 7c$. 10. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

11. ab, a^2, bc. 12. $x+y, x^2-y^2, x^2+xy+y^2$.

তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :

13. 5, 6. 14. ab, bc. 15. a^2b^2c, abc.

16. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. 17. $(x-y)^3, x^3-y^3$.

মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর :

18. 16, 25. 19. $\dfrac{a^2}{bc}, \dfrac{b^3}{ca}$. 20. $6+3\sqrt{3}, 8-4\sqrt{3}$. [P. U. 1902]

21. 2, 4, 8 এবং 14 ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কত যোগ করিলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ? [P. U. 1921]

22. 3, 5, 1 এবং 2 ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কত যোগ করিলে যোগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

23. a, b, c ইহাদের প্রত্যেকটি হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি ক্রমিক সমানুপাতী হইবে ?

24. a, b, c, d ইহাদের প্রত্যেকটি হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

25. $a:b::b:c$ হইলে, দেখাও যে,
$a:c=a^2+ab+b^2:b^2+bc+c^2$. [C. U. 1948]

26. x, y, z ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{1}{y^2}=\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{y^2-z^2}.$$

প্রশ্নমালা 4 B

[1 হইতে 13 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. $a:b::b:c::c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$$\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}.$$ [C. U. 1902]

$$\frac{a^3}{b^3}=\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}.\quad\therefore\quad\frac{a}{d}=\frac{a^3}{b^3}.$$

2. $a:b::b:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{a^2+b^2}{a+c}=\dfrac{a^2-b^2}{a-c}.$

যেহেতু, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$; $\therefore\ b^2=ac$ এবং $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{b^2}{c^2}$;

যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{b^2+c^2}{b^2-c^2}$,

মান বসাইয়া $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{ac+c^2}{ac-c^2}=\dfrac{c(a+c)}{c(a-c)}=\dfrac{a+c}{a-c}$

$\therefore$ একান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা $\dfrac{a^2+b^2}{a+c}=\dfrac{a^2-b^2}{a-c}.$

3. $a:b::c:d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}.$$ [C. U. 1872]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ একান্তর প্রক্রিয়ায় $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, বা, $\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}$

(যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া)

বা, $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$ (একান্তর প্রক্রিয়া)

4. $a:b::c:d$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{4a^2+5c^2}{4b^2+5d^2}$ [C. U.]

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\quad\therefore\quad\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\times\dfrac{a}{b}$. বা, $\dfrac{ac}{bd}=\dfrac{a^2}{b^2}.$

পুনরায়, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, বা, $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}.\quad\therefore\quad\dfrac{4a^2}{4b^2}=\dfrac{5c^2}{5d^2}$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\dfrac{4a^2+5c^2}{4b^2+5d^2}.$

অর্থাৎ $\dfrac{4a^2+5c^2}{4b^2+5d^2}=\dfrac{4a^2}{4b^2}=\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{ac}{bd}.$

5. $a:b=b:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3=a(a+b)(a-b+c)$.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, বা, $b^2=ac$. প্রদত্ত অভেদটির বামপক্ষ a^3+b^3

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)(a^2-ab+ac)=a(a+b)(a-b+c)$

6. $a:b::c:d$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^2+ab+b^2:a^2-ab+b^2$
$=c^2+cd+d^2:c^2-cd+d^2$. [C. U. '45 ; P. U. '48]

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\therefore\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$ $\therefore\ \frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{c^2+d^2}{d^2}$,

এবং $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, বা, $\frac{b}{a}.\frac{b}{b}=\frac{d}{c}.\frac{d}{d}$; বা, $\frac{b^2}{ab}=\frac{d^2}{cd}$,

অতএব, $\frac{a^2+b^2}{b^2}\times\frac{b^2}{ab}=\frac{c^2+d^2}{d^2}\times\frac{d^2}{cd}$, বা, $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{c^2+d^2}{cd}$,

সুতরাং $\frac{a^2+b^2+ab}{a^2+b^2-ab}=\frac{c^2+d^2+cd}{c^2+d^2-cd}$. [যোগ ও ভাগ প্রক্রিয়া]

অর্থাৎ $a^2+ab+b^2:a^2-ab+b^2::c^2+cd+d^2:c^2-cd+d^2$.

7. $a:b::b:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$. [C.U. '12 ; D. B. '34, '37]

$\because\ \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$. $\therefore\ ac=b^2$. বামপক্ষ$=(a+b+c)(a-b+c)$

$=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2=a^2+2b^2+c^2-b^2$

$=a^2+b^2+c^2=$ডানপক্ষ। $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

8. $a:b::b:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(a+b)^2:(b+c)^2::a^2+b^2:b^2+c^2$.

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a+b}{b+c}$. $\therefore\ \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}=\frac{a^2}{b^2}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}$

$\therefore\ (a+b)^2:(b+c)^2=a^2+b^2:b^2+c^2$.

9. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হইলে প্রমাণ কর যে,
$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$. [C. U. 1944]

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$ $\therefore$ প্রত্যেক অনুপাত$=\frac{a^2}{ab}=\frac{b^2}{bc}=\frac{c^2}{cd}$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}\ \ldots\ldots(1)$$

পুনরায় প্রত্যেক অনুপাত$=\frac{ab}{b^2}=\frac{bc}{c^2}=\frac{cd}{d^2}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}\ldots\ldots(2)$

অতএব, (1) ও (2) হইতে $\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+cd}=\frac{ab+bc+cd}{b^2+c^2+d^2}$

$\therefore\ (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

10. $a : b :: c : d :: e : f$ হইলে, দেখাও যে,

$$27(a+b)(c+d)(e+f)=bdf\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}+\frac{e+f}{f}\right)^3.$$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$; $\therefore \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}=\frac{e+f}{f}$.

$$\therefore \frac{3(a+b)}{b}=\frac{3(c+d)}{d}=\frac{3(e+f)}{f}=\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}+\frac{e+f}{f},$$

$$\therefore \frac{3(a+b)}{b}\times\frac{3(c+d)}{d}\times\frac{3(e+f)}{f}=\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}+\frac{e+f}{f}\right)^3$$

অর্থাৎ $27(a+b)(c+d)(e+f)=bdf\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}+\frac{e+f}{f}\right)^3$.

$a : b :: c : d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

11. $ma-nb : a+b :: mc-nd : c+d$. [C. U 1933]

12. $a^2+b^2 : a^2-b^2 :: ac+bd : ac-bd$. [C. U. 1888]

13. $\sqrt{(a^2+c^2)} : \sqrt{(b^2+d^2)} :: ma+nc : mb+nd$. [C. U. 1880]

14. $a^2+c^2 : ab+cd :: ab+cd : b^2+d^2$. [D. B. 1928]

15. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 : (\sqrt{c}+\sqrt{d})^2 :: a-b : c-d$. [C. U. 1895]

16. $a^2+b^2 : a^2-b^2 :: c^2+d^2 : c^2-d^2$. [C. U. 1932]

17. $a^2+c^2 : b^2+d^2 :: c(a+c) : d(b+d)$. [C. U. 1937]

18. $a : b :: b : c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$. [W. B. S. F. 1957]

19. $a : c :: a^2+b^2 : b^2+c^2$. [C. U. 1921]

20. $a : c :: a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2$. [C. U. 1948]

21. $a^2+b^2 : b^2+c^2 :: (a+b)^2 : (b+c)^2$ [B. U. 1934]

22. $a : b :: b : c :: c : d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$a^3+b^3+c^3 : b^3+c^3+d^3=a : d$. [C. U. 1934 ; P. U. '48]

4·15. 'K' প্রণালী ('K' Method): সমানুপাতের অনেক প্রশ্ন K প্রণালীতে অতি সহজেই সমাধান করা যায়। যে সমানুপাত প্রদত্ত থাকে তাহাকে K-এর সহিত সমান করিয়া সম্বন্ধ নির্ণয় করিয়া সমানুপাতের ডানপক্ষ ও বামপক্ষ স্থাপন করিয়া এবং সরল করিয়া উভয় পক্ষ সমান দেখাইতে হয়। প্রশ্নমালার ভিতর উদাহরণগুলি লক্ষণীয়।

প্রশ্নমালা 4 C

[1 হইতে 15 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. $x : a :: y : b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$ [C. U. '10, '28]

মনে করা যাউক $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$; $\therefore$ $x=ak$ এবং $y=bk$.

এক্ষণে বামপক্ষ $=(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(a^2k^2+b^2k^2)(a^2+b^2)$
$=k^2(a^2+b^2)(a^2+b^2)=k^2(a^2+b^2)^2$

ডানপক্ষ $=(ax+by)^2=(a.ak+b.bk)^2=(a^2k+b^2k)^2$.
$=k^2(a^2+b^2)^2$ $\therefore$ $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$.

2. $x : a :: y : b$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}=\frac{(x+y)^3}{(a+b)^2}$. [P. U. 1928]

মনে করা যাউক $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$; $\therefore$ $x=ak$ এবং $y=bk$

এক্ষণে বামপক্ষ $=\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}=ak^3+bk^3=k^3(a+b)$

ডানপক্ষ $=\frac{(x+y)^3}{(a+b)^2}=\frac{(ak+bk)^3}{(a+b)^2}=\frac{k^3(a+b)^3}{(a+b)^2}=k^3(a+b)$

অতএব, $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}=\frac{(x+y)^3}{(a+b)^2}$.

3. $a : b :: b : c :: c : d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d)$. [D. B. 1924]

মনে করা যাউক $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=k$; $\therefore$ $c=dk$, $b=ck$, $a=bk$

এক্ষণে বামপক্ষ $=(b+c)(b+d)=(ck+dk)(b+d)=k(c+d)(b+d)$
$=(c+d)(bk+dk)=(c+d)(a+c)$
$\therefore$ $(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d)$.

4. $a : b :: b : c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$a^2+b^2 : b^2+c^2 :: a : c$. [C. U. 1917]

মনে করা যাউক $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$; $\therefore$ $b=ck$, $a=bk=ck^2$

এক্ষণে বামপক্ষ $=\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{b^2k^2+c^2k^2}{b^2+c^2}=\frac{k^2(b^2+c^2)}{b^2+c^2}=k^2$

এবং ডানপক্ষ $=\frac{a}{c}=\frac{ck^2}{c}=k^2$ $\therefore$ $a^2+b^2 : b^2+c^2 :: a : c$.

5. যদি $a:b::c:d::e:f$ হয়, প্রমাণ কর যে,

প্রত্যেকটি অনুপাত $=\left\{\dfrac{la^n+mc^n+pe^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right\}^{\frac{1}{n}}$ হইবে।

মনে করা যাউক $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k$; $\therefore$ $a=bk$, $c=dk$, $e=fk$

$$\left(\frac{la^n+mc^n+pe^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(\frac{lb^nk^n+md^nk^n+pf^nk^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\left(\frac{k^n(lb^n+md^n+pf^n)}{lb^n+md^n+pf^n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}=(k^n)^{\frac{1}{n}}=k^{n\cdot\frac{1}{n}}=k=\text{প্রত্যেক অনুপাত}$$

অতএব, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\left(\dfrac{la^n+mc^n+pe^n}{lb^n+md^n+pf^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ প্রমাণিত হইল।

6. $\dfrac{x}{a+b-c}=\dfrac{y}{b+c-a}=\dfrac{z}{c+a-b}$ হইলে,

প্রত্যেকটি অনুপাত $=\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$ হইবে। [C. U. '11, D. B. '36

যেহেতু $\dfrac{x}{a+b-c}=\dfrac{y}{b+c-a}=\dfrac{z}{c+a-b}$, $\therefore$ ইহাদের প্রত্যেকটি

$$=\frac{x+y+z}{a+b-c+b+c-a+c+a-b}=\frac{x+y+z}{a+b+c}.$$ $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

7. $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$x:a::y:b::z:c.$ [C. U. 1952]

প্রত্যেক অনুপাতে লব ও হরকে যথাক্রমে c, b ও a দ্বারা গুণ করা হইল।

$$\frac{acy-bcx}{c^2}=\frac{bcx-abz}{b^2}=\frac{abz-acy}{a^2}$$

$$=\frac{acy-bcx+bcx-abz+abz-acy}{c^2+b^2+a^2}=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}=0$$

$\therefore$ $\dfrac{acy-bcx}{c^2}=0$, বা, $ay-bx=0$, বা, $ay=bx$.

$\therefore$ $\dfrac{y}{b}=\dfrac{x}{a}$. এবং $\dfrac{bcx-abz}{b^2}=0$, বা, $cx-az=0$,

বা, $cx=az$ $\therefore$ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$, অতএব, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}.$

৪. $\dfrac{a}{y+z}=\dfrac{b}{z+x}=\dfrac{c}{x+y}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\dfrac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\dfrac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\dfrac{c(a-b)}{x^2-y^2}$. [D. B. '27, '50]

যেহেতু, $\dfrac{a}{y+z}=\dfrac{b}{z+x}=\dfrac{c}{x+y}$; $\dfrac{a}{y+z}=\dfrac{b-c}{(z+x)-(x+y)}=\dfrac{b-c}{z-y}$;

$\dfrac{b}{z+x}=\dfrac{c-a}{(x+y)-(y+z)}=\dfrac{c-a}{x-z}$; $\dfrac{c}{x+y}=\dfrac{a-b}{(y+z)-(z+x)}=\dfrac{a-b}{y-x}$;

$\therefore \dfrac{a}{y+z}\cdot\dfrac{b-c}{z-y}=\dfrac{b}{z+x}\cdot\dfrac{c-a}{x-z}=\dfrac{c}{x+y}\cdot\dfrac{a-b}{y-x}$,

অথবা, $\dfrac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\dfrac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\dfrac{c(a-b)}{x^2-y^2}$. $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

9. $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{1}{2}$ অথবা -1.

যেহেতু $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$, $\therefore$ প্রত্যেক অনুপাত $=\dfrac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}$;

পুনরায় $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}$, $\therefore$ প্রত্যেক অনুপাত $=\dfrac{a-b}{b+c-c-a}$

$=\dfrac{a-b}{b-a}=\dfrac{a-b}{-(a-b)}=-1$. অতএব প্রত্যেক অনুপাত $=\frac{1}{2}$ অথবা -1.

10. $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ এবং $a+b+c\neq0$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

$\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ $\therefore \dfrac{a}{b+c}+1=\dfrac{b}{c+a}+1=\dfrac{c}{a+b}+1$.

বা, $\dfrac{a+b+c}{b+c}=\dfrac{a+b+c}{c+a}=\dfrac{a+b+c}{a+b}$ $\because a+b+c\neq0$

$\therefore$ $a+b+c$ দ্বারা ভাগ করিয়া $\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{1}{c+a}=\dfrac{1}{a+b}$

বা, $b+c=c+a=a+b$. $\therefore b+c=c+a$ $\therefore a=b$.

এবং $a+b=c+a$, $\therefore b=c$. অতএব, $a=b=c$. $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

11. $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a+b-c-d)(a-b+c-d)$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a:b::c:d.$ [C. U. 192(

যেহেতু, $(a+b+c+d)(a-b-c+d)=(a+b-c-d)(a-b+c-d)$

বা, $\{(a+d)+(b+c)\}\{(a+d)-(b+c)\}$
$=\{(a-d)+(b-c)\}\{(a-d)-(b-c)\}$

বা, $(a+d)^2-(b+c)^2=(a-d)^2-(b-c)^2$

বা, $(a+d)^2-(a-d)^2=(b+c)^2-(b-c)^2$

বা, $4ad=4bc$ বা, $ad=bc$

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, অর্থাৎ $a:b::c:d$ $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

12. যদি $\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}$ হয়,

এবং $a+b+c\neq 0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a=b=c$,

যেহেতু, $\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$,

$\therefore\ \frac{a}{b+c-a}=1$, বা, $a=b+c-a$, বা, $2a=b+c$.

অনুরূপভাবে $2b=c+a$, $2c=a+b$. $\therefore\ 2a-2b=b-a$.

বা, $3a=3b$ $\therefore\ a=b$. অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় $b=c$.

অতএব, $a=b=c$ $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

13. $a:b::c:d::e:f$ হইলে, প্রমাণ কর যে, প্রত্যেক অনুপাত $=\sqrt[3]{(a^3+c^3+e^3)}:\sqrt[3]{(b^3+d^3+f^3)}$ [C. U.]

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, $\therefore\ \frac{a^3}{b^3}=\frac{c^3}{d^3}=\frac{e^3}{f^3}=\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}$.

অতএব, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{\sqrt[3]{(a^3+c^3+e^3)}}{\sqrt[3]{(b^3+d^3+f^3)}}$. $\therefore$ প্রমাণিত হইল।

14. $a:b::b:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$. [W. B. S. F. 1962]

15. $a:b::b:c::c:d$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a+b:b+c::b+c:c+d$. [W. B. S. F. 1960]

16. $x : a :: y : b :: z : c$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$x^3+y^3+z^3 : a^3+b^3+c^3 :: xyz : abc.$

17. $b+c : c+a : a+b :: a : b : c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
হয় $a+b+c=0$ নতুবা $a=b+c.$ [W. B. S. F. '58]

18. $a : b :: c : d$ হইলে প্রমাণ কর যে.
$a^2+b^2 : a^2-b^2 :: ac+bd : ac-bd.$

19. $a+b : a-b :: c : d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$a^2+ab : ab-b^2 :: c^2+cd : cd-d^2.$ [W. B. S. F. '56]

20. যদি $(x^2+y^2)(a^2+b^2)-(ax+by)^2=0$ হয়, তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে, $x : y :: a : b.$ [W. B. S. F. '54]

21. $a : b :: c : d$ হইলে প্রমাণ কর যে $a^2+c^2 : b^2+d^2 ::$ $c(a+c) : d(b+d).$ [C. U. '37]

22. $p : q :: r : s$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $pq : p^2+q^2 :: rs : r^2+s^2.$
[C. U. '40]

23. $a, b, c\ d$ ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে,
(a) $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(b^2-c^2)^2.$
(b) $(b-c)^2-(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2.$
[C U. '43, G. U. '51, P. U. '46]

24. $a : b :: c : d :: e : f$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2.$
[W. B. S. F. '52]

25. $\dfrac{bz+cy}{b-c}=\dfrac{cx+az}{c-a}=\dfrac{ay+bx}{a-b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, [P. U. 1893]
$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz.$

26. $\dfrac{a+b-c}{a+b}=\dfrac{b+c-a}{b+c}=\dfrac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c\neq 0$ হইলে,
প্রমাণ কর যে, $a=b=c.$ [C. U. '35]

27. $x : ax+by+cz :: y : bx+cy+az :: z : cx+ay+bz$ এবং $x+y+z\neq 0$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$\text{প্রত্যেক অনুপাত} = \frac{1}{a+b+c}.$$

28. যদি $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$(a^3+b^3+c^3) : (b^3+c^3+d^3)=a : d$ [S. F. '68]

29. $a : b :: p : q$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(a+b)(a^2+b^2)q^3$
$=(p+q)(p^2+q^2)b^3$. [C. U. '35]

30. $a : b :: b : c :: c : d$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$(a-b)^3 : (b-c)^3 :: a : d$. [C. U. '38, G. U. '48]

31. $x=\frac{4ab}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$.

32. যদি $(a+b+c)x=(b+c-a)y=(c+a-b)z=(a+b-c)\omega$ হয়,
তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{x}$ হইবে। [C. U. 1905]

33. $a : b :: c : d :: e : f$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\frac{2a+3c+5e}{2b+3d+5f}=\frac{ace}{bdf}$ [C. U. 1921]

34. $a^2+c^2+e^2 : b^2+d^2+f^2 :: ce : df$. [C. U. 1941]

35. $a : b :: \sqrt{a^2+c^2+e^2} : \sqrt{b^2+d^2+f^2}$. C. U. 1930]

36. $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$. [C U. 1959]

37. $x : y :: a+2 : a-2$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{4a}{a^2+4}$. [D. B. 1897]

38. $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c+a}{b}=1$, এবং $a-b+c\neq0$ হইলে,
প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. C. U. 1920]

39. $a+b : b+c :: c+d : d+a$ হইলে, প্রমাণ কর যে, হয় $a=c$,
নতুবা $a+b+c+d=0$ হইবে। [C. U. 1891]

40. $a : b :: b : c :: c : d$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$(d-a)^2=(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. [W. B. S. F. 1954]

5

পুনরালোচনা

বিবিধ প্রশ্নমালা 5

[এই প্রশ্নমালার সব অঙ্ক বাড়ীতে কর]

[A] সময় 20 মিনিট

1. যোগ কর : $(x-1)(x+2)$, $(x-2)(x+3)$ এবং $(x-3)(x+1)$.

2. $x=b-c$, $y=c-a$, $z=a-b$ হইলে, $x^2-y^2+z^2+2zx$ এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1922]

3. সরল কর : $(x-y)(x+y)-[xy-x\{y-x(y+1-y)\}]$.

4. উৎপাদক নির্ণয় কর : (a) $49a^2-16b^2$. (b) $x^2+15x+26$.

5. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $6x^3-11x^2y+18xy^2-7y^3$ এবং $14x^2-15xy-4y^2$.

6. শূন্যস্থান পূর্ণ কর : $(\cdots)-(5x^2-3xy-2y^2)=2xy-3x^2-4y^2$.

7. সমাধান কর : $[2x-\{3x-4(x-3)\}]^2-[3(x+10)-4\{(x+3)-(x-4)\}]^2=56$.

8. একটি খুঁটির $\frac{1}{3}$ জলে, $\frac{1}{4}$ কাদায় এবং 10 ফুট জলের উপরে আছে। খুঁটির দৈর্ঘ্য কত?

[B] সময় 25 মিনিট

1. যদি $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a=b=c$. [W. B. S. F. 1966]

2. $p-\frac{1}{p}=n$ হইলে দেখাও যে, $p^4+\left(\frac{1}{p}\right)^4=n^4+4n^2+2$.

3. সরল কর : $3a-[a+b-2\{a+b+c-(a-b+c-d)\}+a]$.

4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (a) $ax^2+(a+b)xy+by^2$.
   (b) $a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2$.

5. সমাধান কর : $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4}=0$.

6. $(a-b)^2-2(b-c)(c-a)$কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

7. $1+a+ab+b$, $1+b+bc+c$ এবং $1+c+ca+a$ ইহাদের ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

8. যদি x ও y দুইটি বাস্তব সংখ্যা হয় এবং $x+y=8$ হয়, তবে xy-এর বৃহত্তম মান কত হইবে ?

[C] সময় 35 মিনিট

1. লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর : $\dfrac{x^2-xy-42y^2}{5x^2-35xy}-\dfrac{1}{5}$. [W. B. S. F. 1954]

2. যদি $x-\dfrac{1}{x}=a-\dfrac{1}{a}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$x^3-\frac{1}{x^3}=a^3-\frac{1}{a^3}.$$ [W. B. S. F. 1954]

3. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $2x^3+x^2-x+3$ এবং x^3-6x^2+6x-5.

4. $x=\dfrac{a}{a+b}$, $y=\dfrac{b}{a-b}$ হইলে $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x-1}{y+1}$ এর মান কত ?

5. সমাধান কর : $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x-6}{x+3}=2$. [W.B.S.F. 1963]

6. শূন্যস্থান পূর্ণ কর : $(2x^2+3xy+5y^2)-(\cdots)=x^2-2y^2-3xy$.

7. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a^3+b^3+c^3=3abc$. [W. B. S. F. 1954]

8 কোন বালকের বর্তমান বয়সের চারিগুণ হইতে তাহার 6 বৎসর পূর্বের বয়সের তিনগুণ বিয়োগ করিলে 27 বৎসর অবশিষ্ট থাকে। বালকটির বর্তমান বয়স কত ?

[D] সময় 35 মিনিট

1. যোগ কর : $x^2-(x-y+z)(x+y+z)$, $y^2-(y-x+z)(y+x-z)$ এবং $z^2-(z-x+y)(z+x-y)$.

2. উৎপাদক নির্ণয় কর : (i) x^2-y^2+2x+1. (ii) $2x^2-x-10$. [W. B. S. F. 1954]

3. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $3x^3+11x^2+13x+5$. এবং $3x^3+12x^2+16x+7$. [W. B. S. F. 1954]

4. সরল কর: $\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}+\frac{(b-c)^2-a^2}{b^2-(c+a^2)}+\frac{(c-a)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2}$.

[W. B. S. F. 1954]

5. সমাধান কর: $5x-3y=9, 4x+y=14$. [W. B. S. F. 1954]

6. $a:b::b:c::c:d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(d-a)^2=(d-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. [W. B S. F. 1954]

7. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+34$ কে দুইটি পূর্ণবর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর। [W. B. S. F. 1956]

8. 1924 সনে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 3 গুণ ছিল, আর 1952 সনে $1\frac{2}{3}$ গুণ ছিল। কোন্ সনে পুত্রের জন্ম হইয়াছিল?

[E] সময় 40 মিনিট।

1. এক ব্যক্তি a টাকা ডজন দরে x-টি, প্রত্যেকটি b-আনা দরে y-টি এবং c-টাকা কুড়ি হিসাবে z-টি ডিম ক্রয় করিলে তাহার মোট কত খরচ হইল?

[W. B. S. F. 1959]

2. উৎপাদক নির্ণয় কর: (i) $5-4x-x^2$. (ii) $a^2-b^2+4bc-4c^2$.

3. গ. সা. গু. নির্ণয় কর: $x^2+3x-10$ and $x^3-x^2-14x+24$.

[W. B. S. F. 1955]

4. সমাধান কর: (i) $\frac{a-x}{a}+\frac{2a-x}{2a}=\frac{3a-x}{3a}$.

(ii) $2x-y=5, 3x+2y=11$. [W. B. S. F. 1955]

5. যদি $bc+ca+ab=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0$. [W. B. S. F. 1955]

6. $x:a::y:b::z:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$x^3+y^3+z^3:a^3+b^3+c^3::xyz:abc$. [W. B. S. F. 1955]

7. একটি কাজ A x-দিনে করে এবং B y-দিনে করে; উভয়ে একত্রে ঐ কাজ কত দিনে করিবে?

8. একই অক্ষদ্বয় ও একক লইয়া $4x+9y=36$ এবং $\frac{x}{9}-\frac{y}{4}=1$ এর লেখ অঙ্কিত কর। দেখাও যে y-অক্ষ এবং ঐ লেখদ্বয় একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিয়াছে। [W. B. S. F. 1956]

[F] সময় 45 মিনিট।

1. $x = \frac{ab}{a+b}$ হইলে, $\left(\frac{2x-a}{2x-b}\right)^2 - \left(\frac{a-x}{b-x}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

2. উৎপাদক নির্ণয় কর : (i) $xy(1+z^2)+z(x^2+y^2)$. [W. B. S. F. 1956]

(ii) $2a^3-a^2b-b^3$.

3. $a^2+b^2=1=c^2+d^2$ হইলে প্রমাণ কর যে,
$(ab-bc)(ad+bc)=(a-c)(a+c)$. [W. B. S. F. 1956]

4. $a+b : a-b :: c : d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\frac{a^2+ab}{ab-b^2}=\frac{c^2+cd}{cd-d^2}$ [W. B. S. F. 1956]

5. সরল কর : $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}$. [W. B. S. F. 1956]

6. সমাধান কর : (i) $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}$. [W. B. S. F. 1956]

(ii) $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1, \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$. [W. B. S. F. 1956]

7. লেখ সাহায্যে সমাধান কর : $3x+2y=7, 8x-y=6$. [W. B. S. F. 1956]

8. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যা উহার অঙ্ক সমষ্টির চারিগুণ হইলে, দেখাও যে অঙ্ক দুইটির স্থান পরিবর্তন করিয়া যে সংখ্যাটি হইবে উহা সংখ্যা সমষ্টির সাতগুণ। [W. B. S. F. 1956]

[G] সময় 50 মিনিট।

1. (i) আমার a-টাকা ছিল; আমি যদি কোন দোকানে আমার টাকার অর্ধেক ও অন্য এক দোকানে 5 টাকা খরচ করিয়া থাকি, তবে আমার নিকট কত অবশিষ্ট ছিল?

(ii) aটি ঘোড়ার প্রতিটির মূল্য x টাকা, bটি ঘোড়ার প্রতিটির মূল্য y টাকা এবং cটি ঘোড়ার প্রতিটির মূল্য z টাকা। গড়ে প্রতি ঘোড়ার মূল্য কত? [W. B. S. F. 1956]

2. উৎপাদক নির্ণয় কর। (i) $17x-7x^2-6$.

(ii) $4x^2-4xy-2yz-z^2$.

[W.B.S.F. 1959]

3. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$6x^3-2x^2-13x-6$ এবং $12x^3-x^2-30x-16$. [W.B.S.F. '58]

4. সমাধান কর : (i) $x^2-x+\frac{72}{x^2-x}=18$, (ii) $x^2+11=7x$.

(iii) $x+y-3=0$, $4x-5y+6=0$. [W.B.S.F. 1959]

5. যদি $x+y=1+xy$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3=1+x^3y^3$.

6. যদি $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$ হয়, প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc$ হইবে। [W.B.S.F. 1954]

7. দুই অঙ্কের কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 2 ; সংখ্যাটি হইতে উহার অঙ্ক সমষ্টির $\frac{3}{2}$ অংশ বিয়োগ করিলে অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি কত ?

8. লেখ চিত্র দ্বারা সমাধান কর : $y-x=2$, $3x-2y=5$.

[W B S.F. 1962 Comp.]

[H] সময় 1 ঘণ্টা 10 মিনিট।

1. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$ এবং $2x^3+3x^2-2x$. [W.B.S.F. 1962. Comp.]

2. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : x^3-3x-2 এবং x^3-4x^2+6x-4.

[W.B.S.F. 1962. Comp.]

3. উৎপাদক নির্ণয় কর : (i) x^3+2x^2-4x-8.

[W.B.S.F. 1962. Comp]

(ii) $12+x-20x^2$.

[W.B.S.F. 1962. Comp.]

4. সমাধান কর : (i) $\frac{6x-7}{4x-5}=\frac{3x-4}{2x-3}$. [W. B. S. F. 1962]

(ii) $x+2y=3=7y-4x$.

5. এক ব্যক্তি মোটর গাড়ীতে করিয়া 6 ঘণ্টায় 80 মাইল পথ অতিক্রম করিল। তন্মধ্যে প্রথম দিকে সে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে এবং অবশিষ্ট পথ ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে চলিয়াছিল। সে কত পথ কোন্ গতিবেগে গিয়াছিল?

[W. B. S. F. 1962]

6. একই অক্ষরেখা এবং একই একক লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ, কোটি নির্ণয় কর:

$$3x-y=5,\ 4x+3y=11.$$ [W. B. S. F. 1962]

7. সরল কর: $\dfrac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\dfrac{a-b}{c^2-(a-b)^2}$.

8. প্রমাণ কর যে, $$\frac{1}{(4x^3-3x)^2}-\left[\frac{\dfrac{3\sqrt{1-x^2}}{x}-\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}}{1-3\left(\dfrac{1-x^2}{x^2}\right)}\right]^2=1.$$

[C.U.]

উত্তরমালা

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1 (পৃষ্ঠা 6—7)

1. (a) পূর্বদিকে 20 কিলোমিটার দূরে। (b) 150 টাকা লাভ। (c) 100 টাকা। (d) -10° সে. 2. (i) $+11$. (ii) $+3$. (iii) -11. (iv) -3. (v) -15. (vi) $+4$. (vii) -7. (viii) -7. 3. (i) $+15$. (ii) $+42$. (iii) $+42$. (iv) 63. 4. (i) -3. (ii) -40. (iii) 0. (iv) -4. (v) $+21$. (vi) $+17$. 5. 50C. 6. পশ্চিমে 10 কিলোমিটার। 7. 300 টাকা লাভ। 8. -10. 9. 14 কিলোমিটার উত্তরে। 10. 24° সেন্টিগ্রেড। 11. $\frac{1}{10}x$. 12. $2\frac{h}{a}$.

প্রশ্নমালা 2A (পৃষ্ঠা 10—11)

1. (2) $-x^2y^2+8ab^2$. (3) $330xyz$. (3) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$.
2. (2) 0.
3. (2) $2ac+2bd$. (3) $\frac{1}{6}a-\frac{3}{2}b+\frac{1}{6}c$. (4) $-3a^2-4b^2+6c^2$.
4. (1) $3x^2y+xy^2$ (2) $35a^3+19b^3+25c^3+30a^2b+20ab^2$. (3) $-10x^2-4xy-y^2-x+y$ (4) $\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{3}xy+\frac{1}{2}y^2$.
5. (1) $5a-5b+5c$. (2) $2yz-2zx+2xy+xyz$. (3) $-4a^2-5a-3$ এবং $-3a^2-7a-5$. (4) $\frac{4}{3}x-\frac{13}{3}z$.
6. (1) $7a-b-c$. (2) $12a^2+b^2-17c^2$.
7. 10.
8. $a+b+c$.
9. (1) $-2x^3+3x^2y-3y^3-4$. (2) $-a^4-6a^2b^2-6b^4$.
10. $3x$.

প্রশ্নমালা 2B (পৃষ্ঠা 15)

1. $a^2+b^2-c^2+2ab$.
2. $x^4+x^2y^2+y^4$.
3. $x^4+2x^3+5x^2+4x-12$.
4. $a^6+a^3b^3$.
5. $a^4+4a^2x^2+16x^4$.
6. x^6-a^6.
7. $a^3+b^3+c^3-3abc$.
8. $27a^3+8b^3+c^3-18abc$.
9. $ab^2-a^2b+a^2c-ac^2+bc^2-b^2c$.
10. $a^4-5a^2b^2+4b^4$.

11. $x^5-(2a^2+2b^2+ab)x^3+(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)x-a^2b^2(a+b)$.

12. $x^{-4}-y^{-4}$.

13. $8a-11a^2+4a^3+19a^4-9a^5-6a^6-5$.

14. $a^{12}+4a^6-1$.

15. $a^3+b^3-1+3ab$.

16. $8x^3-27y^3+z^3+18xyz$.

17. $\frac{1}{4}a^3+\frac{1}{72}a-\frac{1}{12}$.

18. $\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^2+\frac{9}{16}$.

19. a^2+ab+b^2.

20. $a+b$.

21. $x^3+6x^2+11x+6$.

22. x^6-y^6.

23. $x^8-2x^4a^4+a^8$.

24. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

25. (3).

প্রশ্নমালা 2C (পৃষ্ঠা 19—21)

1. $x+y$.

2. a^2+ab+b^2.

3. $x^4+2x^3+3x^2+4x+5$.

5. a^3+2a^2+4a+2.

6. $a^4+a^3b-ab^3-b^4$.

7. $x^2+y^2+1-xy+x+y$.

9. $a^2b-a^2c-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$.

10. $1-2x+3x^2$.

11. $a^4-a^3b+\frac{2}{3}a^2b^2-\frac{1}{3}ab^3+\frac{1}{9}b^4$.

12. $3x^3-4x^2+6x-12$.

13. $x^2+y^2+a^2$.

14. $3-11x+6x^2$.

15. a^4-a^2+a.

16. $a^2+b^2+c^2+ab+bc-ca$.

17. $a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca$.

18. $4a^2+4b^2+9c^2+4ab-6bc+6ac$.

19. $2x^2-2x+1$.

20. $2x^2+5x-3$.

21. $3x^2-x-4$.

22. x^2+x+1.

23. x^2-x+1.

24. $4x^2+3x+1$.

25. $1+2x-8x^3-16x^4-32x^5$.

26. $1-2a$.

27. $\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}x+6$.

28. $125x^3-50x^2+20x-8$.

29. $a^2+b^2-ab-2a+b+1$.

30. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$.

31. (i) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-2}$ (ii) a-র মান 7.

33. (a) $\frac{1}{2}b$. (b) $-ab+c$.

প্রশ্নমালা 2D (পৃষ্ঠা 22—24)

8. $-2b$.

9. $a+b-c$.

10. $-a+b-c$.

11. $2a-2b$.

12. $2x-2z$.

13. 0.

14. $-2c$.

15. $3x$.

16. $2a$.

17. $2p+r$.

18. $3(a+b)$. 19. b. 20. x.
21. $12x-15y$. 22. $2x-13z$. 23. $-a+b+5c$.
24. $-11a-2b-4c$. 25. $-10a$. 26. $-x-y-m-n$.
29. x^2. 30. $a^2+b^2+c^2$.

প্রশ্নমালা 3A (পৃষ্ঠা 26—28)

2. 5. 3. 6. 4. 4 5. 2. 7. 7.
8. $2\frac{1}{2}$. 9. $1\frac{1}{2}$. 10. -11. 11. (a) $\frac{c-b}{a}$. (b) $\frac{b-d}{a-c}$.
12. 5. 14. -1. 15. -2. 16. 1. 18. 3.
19. 104. 20. 23. 21. 1. 22. 1. 23. 1.
24. 3. 25. 2. 26. 1. 27. 1. 28. 1.
29. 4. 30. $\frac{m^2+n^2}{2m}$. 31. 6. 32. ab. 33. 3.
34. $-\frac{1}{7}$. 35. $\frac{1}{3}$. 36. $3\frac{12}{31}$ 37. $\frac{7}{33}$. 38. 2.
39. 7. 40. 20. 41. 106. 42. $3\frac{2}{21}$ 43. $\frac{1}{3}(a+b+c)$.
44. 5. 45. (a) 5. (b) $8\sqrt{10}$. (c) -6.

প্রশ্নমালা 3B (পৃষ্ঠা 29—32)

2. 49. 3. 1550. 5. 10. 6. 1125 8. 69, 70, 71.
9. 98, 99, 100, 101. 10. 106, 107, 108, 109, 110.
12. $45\frac{1}{2}$, $34\frac{1}{2}$. 13. $166\frac{1}{2}$, $159\frac{1}{2}$. 14. $26\frac{2}{15}$, $73\frac{13}{15}$. 15. A = $48\frac{2}{3}$. B = $43\frac{2}{3}$, C = $33\frac{2}{3}$. 16. A = 100, B = 130, C = 150.
17. বালক 80, বালিকা 100. 18. বালক 150, বালিকা 600.
20. 60. 21. 24. 22. 50, 51, 52. 23. 27.
25. 48, 12. 26. 10. 27. 65, 40. 28. 60, 10
29. A = 12, B = 30, C = 6. 30. 18, 10. 31. 15, 12. 32. 18, 12.

প্রশ্নমালা 3C (পৃষ্ঠা 32—34)

2. 6 মি. 3. 4800 টা. 4. 16200 টা. 5. 5 মি. 6. 660 টা.
7. 12 ফু. 9. 40, 20. 10. 48, 49, 50.

11.	100 টা., 320 আধুলি।	12.	বালক 160, বালিকা 320.	13.	70
14.	34, 20.	15.	68, 32 বৎসর।	16.	960 টা.
17.	1830 টা.	18.	80, 40.	19.	25 বৎসর।
20.	চেয়ার 14, টেবিল 10.	21.	15 দিন।	22.	8 দিন।

প্রশ্নমালা 4A (পৃষ্ঠা 35—37)

3. $49x^2+168xy+144y^2$. 4. $9p^2+48pq+64q^2$.

5. $a^4b^2+6a^2b^3c+9b^4c^2$. 6 $\frac{16}{9}x^2+\frac{20}{3}xy+\frac{25}{4}y^2$.

7. $\frac{1}{121}x^2+xy+\frac{121}{4}y^2$. 8. $81a^4+144a^2b^2+64b^4$.

10. $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xy^2z+2x^2yz+2xyz^2$.

11. $49a^2+64b^2+81c^2+112ab+126ac+144bc$.

12. $4a^2+9b^2+16c^2+25d^2+12ab+24bc+40cd+20ad+16ac+30bd$.

13. $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+\frac{9}{16}c^2+\frac{25}{36}d^2+\frac{1}{3}ab+\frac{3}{4}ac+\frac{1}{2}bc+\frac{5}{6}ad+\frac{5}{9}bd+\frac{5}{4}cd$.

15. 302500. 16. 1102500. 17. 4410000. 18. $49m^2+196mn+196n^2$.

19. $x^2+2+\frac{1}{x^2}$. 20. $16x^2+10+\frac{25}{16x^2}$.

21. $a^2+4b^2+c^2+4ab+2ac+4bc$.

22. $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{16}z^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}xz+\frac{1}{6}yz$.

23. $a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2c^2a^2+2b^2c^2+2a^2d^2+2b^2d^2+2c^2d^2$.

24. (i) 36,236. (ii) 672400. (iii) 1020100. (iv) 2250000.

(v) 4020025. 26. $(4a+4x+7y)^2$. 27. $36x^2$. 29. 121.

30. 10000. 31. 100. 32. 10000. 33. 1.

34. 9. 35. 2500. 36. 0.

37. $(x+\frac{2}{3}y)^2$. 38. $(11a+12b)^2$. 39. $\{5(a+b)\}^2$.

40. $(x+y)^2$.

প্রশ্নমালা 4B (পৃষ্ঠা 38—39)

3. $64a^2-2+\frac{1}{64a^2}$. 4. $\frac{49}{169}x^2-2xy+\frac{169}{49}y^2$. 5. $a^2+b^2+c^2$
$-2ab+2ac-2bc$. 6. $a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$
$-2a^2d^2-2b^2d^2+2c^2d^2$. 7. (ii) 996004. (iii) 3960100.

9. $(6m-7n)^2$. 10. $(b-a)^2$. 11. 1. 12. 64. 13. ·0004.

14. 1. **15.** 1. **16.** $(9a+5b-4c)^2$.
17. $\frac{1}{64}a^2+\frac{1}{16}b^2+\frac{1}{24}ab$. **18.** $49p^2-42pq+9q^2$.
19. $x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4$. **20.** $\frac{1}{169}l^2-lm+\frac{169}{4}m^2$.
21. $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2+2c^2d^2-2a^2d^2+2b^2d^2$.
22. (i) 990025. (ii) 99960004. (iii) 9960·04.

প্রশ্নমালা 4C (পৃষ্ঠা 40—42)

2. 13. **3.** 202. **5.** 11. **6.** 7. **7.** (ii) 5^2-3^2.
(ii) 4^2-1^2. (v) 11^2-5^2. (v) 36^2-34^2. **11.** 404, 402.
12. 0. **15.** 527. **17.** 1. **18.** 40. **19.** 1. **20.** 16.
21. (i) 5^2-2^2. (ii) $(\frac{21}{2})^2-(\frac{9}{2})^2$. (iii) 9^2-5^2. (iv) 61^2-60^2.
22. $\left(\frac{2x-a-b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$. **23** $\left(\frac{x^2+4x+5}{2}\right)^2-\left(\frac{x^2+2x-1}{2}\right)^2$.
24. $(3c^2+2d^2)^2-(3c^2-2d^2)^2$. **26.** (i) 3^2+1^2. (ii) 5^2+1^2.
(iii) 6^2+2^2. (iv) 19^2+1^2. (v) 22^2+2^2. **27.** (*a*) $(8x+6y)^2+(8x-6y)^2$;
(*b*) $(6p+4q)^2+(6p-4q)^2$; (*c*) $(13m+10n)^2+(13m-10n)^2$.
28. 74. **29.** 25. **30.** 69. **31.** $7y^2$.
32. $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$. **33.** 70.

প্রশ্নমালা 4D (পৃষ্ঠা 42—43)

3. $36x^2-25y^2$. **4.** $49a^2-144b^2$. **5.** $-x^2+2x+1$.
6. $p^2-\frac{q^6}{4}$. **7.** $\frac{p^2}{4}-\frac{q^2}{4}-q-1$. **8.** 1584.
9. 9975, **10.** a^2-2b^2. **11.** -139. **12.** $x^2+4xy+4y^2-9z^2$.
13. $a^4+a^2b^2+b^4$. **14.** $p^4-2p^2q^2+2pq+q^2$.
15. (i) $a^2-2ab+b^2-c^2-2cd-d^2$. (ii) $a^2+2ac+c^2-b^2-2bd-d^2$.
16. (i) 9900 (ii) 9600, (iii) 39900. **17.** (*a*) x^8-y^8.
(*b*) $x^{16}-y^{16}$. **18.** x^8+x^4+1. **19.** $x^{16}-y^{16}$.
20. $a^{24}-b^{24}$. **21.** $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.
22. 0. **23.** $(x+y)^2-(y+z)^2$. **24.** 0.

প্রশ্নমালা 4E (পৃষ্ঠা 44—46)

2. (i) $a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3$. (ii) $1+9a+27a^2+27a^3$. (iii) $8a^3b^3c^3+24a^3b^2c^2+24a^3bc+8a^3$. **4.** (i) 10648. (ii) 1331000. (iii) 10648000. **9.** 9. **10.** 152. **11.** $8a^3-6a$. **12.** 0.
13. (a) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$. (b) $27a^6+108a^4b^2+144a^2b^4+64b^6$. (c) $a^3x^6+3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4+b^3y^6$. (d) $x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$. (e) $8a^3+\frac{36a^2}{b}+\frac{54a}{b^2}+\frac{27}{b^3}$. (f) $27p^3+9p+\frac{1}{p}+\frac{1}{27p^3}$.

14. (i) $8a^3+b^3+8c^3+12a^2b+24a^2c+6ab^2+6b^2c+24ac^2+12bc^2+24abc$. (ii) $8a^3+27b^3+64c^3+36a^2b+48a^2c+54ab^2+108b^2c+96ac^2+144bc^2+144abc$. (iii) $a^6+b^6+c^6+3a^4b^2+3a^2b^4+3c^2a^4+3c^2b^4+3c^4a^2+3c^4b^2+6a^2b^2c^2$. **15.** (i) 35937. (ii) 1157625. (iii) 8120601. (iv) 753571000. **16.** $8a^3$. **17.** $(2x+a+b)^3$. **18.** $8a^3$. **19.** $125(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)$. **20.** $64a^2$.
21. (i) 1000000000. (ii) 8000. **22.** 343. **23.** 46656. **24.** 1. **25.** c^3. **26.** -2. **27.** 8. **28.** p^3-3p. **31.** $(5x+5y)^3$. **32.** (i) 35. (ii) 152. (iii) 468. (iv) -2800.

প্রশ্নমালা 4F (পৃষ্ঠা 47—49)

3. $64m^3-240m^2n+300mn^2-125n^3$. **4.** $125x^6-15x^2+\frac{3}{5x^2}-\frac{1}{125x^6}$. **5.** $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6+3c^2a^4-6a^2b^2c^2+3b^4c^2+3c^4a^2-3c^4b^2+c^6$. **7.** (i) 4913. (ii) 912673. (iii) 7077888.
14. $8y^3+24y^2z+24yz^2+8z^3$. **15.** 999. **17.** (i) $125a^3-525a^2b+735ab^2-343b^3$. (ii) $1-24x^2+192x^4-512x^6$. (iii) $8a^3+b^3-c^3+12a^2b-12a^2c+6ab^2+6ac^2-3b^2c+3bc^2-12abc$. (iv) $a^6-3a^4b^2+3a^2b^4-b^6-3c^2a^4-3b^4c^2+3c^4a^2-3c^4b^2-c^6+6a^2b^2c^2$.

18. (i) $a^3-3a+\frac{3}{a}-\frac{1}{a^3}$. (ii) $8p^3-6p+\frac{3}{2p}-\frac{1}{8p^3}$. **19.** (i) 4913. (ii) 110592. (iii) 857375. (iv) 6967871. (v) 124251499.

20. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$. 21. $27a^6$. 22. $64a^6$.

23. $-m^3-3m^2n-3mn^2-n^3$. 24. $\frac{8}{x^3}$ 25. $8a^6$.

26. $8s^3$. 27. ·125. 28. 1·331. 29. 64. 30. $64c^6$.

31. 8. 32. 37. 35. 44.

প্রশ্নমালা 4G (পৃষ্ঠা 50—51)

2. $27x^3+64$. 3. $64x^3+1$. 4. $8x^3+27y^3$.

5. $a^3b^3+8a^3$. 6. $a^3x^3+b^3y^3$. 7. $27a^6+64b^6$.

9. 7. 10. $2(a^3+b^3+c^3)$. 11. $7m^3+63$.

12. $125m^3+343n^3$ 13. $343x^3+512y^3$ 14. $125a^3+216$.

15. $x^3y^3z^3+1$. 16. $8x^6+27y^6$. 17. r^9+s^9.

18. $2x^3+351$. 19. $53a^3+64b^3$ 20. (i) x^9+y^9. (ii) x^6-a^6.

প্রশ্নমালা 4H (পৃষ্ঠা 51—52)

2. $8a^3-27$. 3. x^3-1. 4. $64a^3-1$. 5. $8m^3-125n^3$.

6. $125x^6-64y^6$. 8. -559. 9. $19p^3+72$

10. 0. 11. x^6-a^6. 12. $a^3+b^3-c^3-d^3+3a^2b+3ab^2$ $3c^2d-3cd^2$. 13. a^3-8b^3. 14. $1-8x^6$.

15. x^6-1. 16. $\frac{1}{8}a^6-\frac{1}{27}y^6$. 17. $a^3-\frac{8}{a^3}$.

18. $2x^3-737$. 19. $19a^3-63$. 20. x^9-y^9.

প্রশ্নমালা 4I (পৃষ্ঠা 52—53)

2. $l^2+7l+10$ 3. $a^2+10a+24$. 4. $p^2+13p+42$.

5. $k^2+4k-12$. 6. $x^2+10x-24$. 7. $a^2-8a-48$.

8. $a^2-15a-100$. 9. $m^2-15m+50$. 10. $x^3+6x^2+11x+6$.

11. x^3-7x-6. 12. $x^2+12x+35$. 13. $x^2+20x+91$.

14. $x^2-5x-36$. 15. $x^2+10x-200$. 16. x^2+4x-5.

17. $m^2-22m+117$. 18. $m^2-m-600$. 19. $k^2-15k+56$.

20. x^2-4x+3. 21. $16x^2+44x+30$. 22. $x^3+11x^2+38x+40$.

23. $x^3+2x^2-19x-20$. 24. x^3-7x-6. 25. $x^3-10x^2+29x-20$.

প্রশ্নমালা 4J (পৃষ্ঠা 55—56)

3. $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$. **4.** $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$. **5.** $a^6+12a^5b+60a^4b^2+160a^3b^3+240a^2b^4+192ab^5+64b^6$. **6.** $a^4-8a^3+24a^2-32a+16$.

7. $64x^6+192x^5+240x^4+160x^3+60x^2+12x+1$. **8.** $729a^6-1458a^5b+1215a^4b^2-540a^3b^3+135a^2b^4-18ab^5+b^6$. **9.** $m^7+35m^6+525m^5+4375m^4+21875m^3+65625m^2+109375m+78125$.

10. $x^8-8x^7y+28x^6y^2-56x^5y^3+70x^4y^4-56x^3y^5+28x^2y^6-8xy^7+y^8$. **11.** $256a^8-1024a^7+1792a^6-1792a^5+1120a^4-448a^3+112a^2-16a+1$. **12.** $x^9+9x^8y+36x^7y^2+84a^6y^3+126x^5y^4+126x^4y^5+84x^3y^6+36x^2y^7+9xy^8+y^9$.

13. $a^9-9a^8+36a^7-84a^6+126a^5-126a^4+84a^3-36a^2+9a-1$.

14. $a^5+\frac{5}{2}a^4+\frac{5}{2}a^3+\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{16}a+\frac{1}{32}$. **15.** $32x^5+240x^4y+720x^3y^2+1080x^2y^3+810xy^4+243y^5$. **16.** $2(a^4+6a^2b^2+b^4)$.

17. $2y(5x^4+10x^2y^2+y^4)$. **18.** 30. **19.** 16. **20.** 625.

প্রশ্নমালা 5A (পৃষ্ঠা 57—58)

4. $16x(1+4xy)$.	**5.** $3x^2(1+2x^2)$.	**6.** $2x^2(3+x+2x^2)$.
7. $5x^2(x^2+2a^2-3a^3x^3)$	**8.** $x^2(y+z+x)$.	**9.** $ab(a+b+c)$.
10. 0.	**11.** $(x-y)(a-c)$.	**12.** $x^2(a+b+c)$.
13. $(a+b+c)(x-y+z)$.	**14.** $x(a+b+c)$.	**15.** $p^2(m+n+q+r)$.
16. $x(x^2-xy+y^2)$.	**17.** $15a^2(1-15a^2)$.	**18.** $x(3x^2-x+1)$.
19. $3a^2(a^2-ab+2b^2)$.	**20.** $2xy^2(xy-3x+y)$.	**21.** $7a(1-a^2+2a^3)$.
22. $a^2(a+b+c)$.	**23.** $x(4x+3y+5z)$.	**24.** $a^2(a+b+c)$.
25. 0.	**26.** 0.	**27.** $(x+y)(a-1)$.
28. $(x-y)(a-c)$.	**29.** $2a(x+2y+3z)$.	**30.** $2px(ax+by)$.

প্রশ্নমালা 5B (পৃষ্ঠা 58—59)

3. $(x+y)(p-r-q)$.	**4.** $(x-y)(a+b)$.	**5.** $(x+y)(x+z)$.
6. $(x^2+y^2)(x+y)$.	**7.** $(a^2+1)(a-1)$.	**8.** $(1+c)(1+b)$.
9. $(x+b)(x-a)$.	**10.** $(3p+2b)(zp-3a)$.	
11. $(2a+3b)(x+y+z)$.	**12.** $(m-n)(x-2y)$.	

13. $(3a+2b)(2x+3y+4z)$. 14. $(x^3+2)(2x-1)$.

15. $(y+z)(2y+x-3x^2)$. 16. $(y^2+1)(y-1)$. 17. $(x^2-a)(f^2+g^2)$.

18. $(x-y)(a-b-c)$. 19. $(y+10)(z+10)$. 20. $(y+1)(x-z)$.

21. $(x+y-z)(x^4+y^4)$. 22. $(x^3+2)(x+1)$.

23. $(a-c)(bq+p)$. 24. $(a-c)(b+1)$.

প্রশ্নমালা 5C (পৃষ্ঠা 59—60)

4. $(a+1)^2$. 5. $(a-1)^2$. 6. $(2a-1)^2$. 7. $(3x-2)^2$. 8. $(2a-5)^2$.

9. $(4x+3)^2$. 10. $(8a+9)^2$. 11. $(ax^2-bx^2-4ay^2-4by^2)^2$.

12. $4x^2$. 13. $(x+2y)^2$. 14. $(8x-7y)^2$. 15. $(5a+6d)^2$.

16. $(11a+10b)^2$. 17. $(12p-10q)^2$. 18. $3(5x-6y)^2$.

19. $(a^2m+an+pbm-pn)^2$. 20. $(x+y+z-3)^2$. 22. $(2x-5y)^2$.

প্রশ্নমালা 5D (পৃষ্ঠা 60—61)

5. $(2a+3)(2a-3)$. 6. $(5+4x)(5-4x)$. 7. $(3ab+c)(3ab-c)$.

8. $ab(a+b)(a-b)$. 9. $(7a^3+4x^3)(7a^3-4x^3)$.

10. $ab(4a^2+b^2)(2a+b)(2a-b)$. 11. $(9+a^2)(3+a)(3-a)$.

12. $(5ax-2y)(5ax+2y)$. 13. $(x+1-y)(x+1+y)$.

14. $(x^2-6y^2-2xy)(x^2-6y^2+2xy)$. 15. $(a+b-2c)(a-b+2c)$.

16. $(a-b-c)(a+b+c+1)$. 17. $(a-d-b+c)(a-d+b-c)$.

18. $(ax+by-ay+bx)(ax+by+ay-bx)$.

19. $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$. 20. $(x^4+4a^4)(x^2+2a^2)(x^2-2a^2)$.

21. $(x^8+a^8)(x^4+a^4)(x^2+a^2)(x+a)(x-a)$.

22. $(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$.

23. (i) $(a-b+c)(a-b-c)$. (ii) $(a-b+c)(b-a+c)$.

24. $(a+2b+c+3d)(a-2b-c+3d)$. 25. $(a+b-3c)(a+b-3c-1)$.

26. $2(a-c)(1+a)(1+c)$.

প্রশ্নমালা 5E (পৃষ্ঠা 62—63)

3. $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$. 4. $(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$.

5. $(a^2+a+2)(a^2-a+2)$. 6. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

7. $(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$. 8. $(a^2-2ab+2b^2)(a^2+2ab+2b^2)$.

9. $9(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$. 10. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

11. $(m^2+3mn+n^2)(m^2-3mn+n^2)$. 12. $(2x^2+6x+9)(2x^2-6x+9)$.

13. $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

14. $(9a^2+12ab+8b^2)(9a^2-12ab+8b^2)$.

15. $(2a^2+10ab+25b^2)(2a^2-10ab+25b^2)$.

16. $(a^4-a^2x^2+x^4)(a^2-ax+x^2)(a^2+ax+x^2)$.

17. $(a-c)(a+2b+c)$. 18. $(2x+z)(2x-2y-z)$.

19. $(4x+z)(4x-4y-z)$. 20. $(5a+4c)(5a+2b-4c)$.

21. $(5a-4b+3c)(5a+4b-3c)$.

22. $(9x^4-5x^2y^2+y^4)(9x^4+5x^2y^2+y^4)$. 23. $(x-3z)(x+4y+3z)$.

24. $(x^2+6x+2)(x^2-6x+2)$. 25. $(a^2+a-2b-3)(a^2-a+2b-3)$.

26. $(x+a+3)(x-a+1)$. 27. $(x+y-3)(x-y-7)$.

28. $(a+2b)(a-2b-3)$ 29. $3(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$.

30. $4(2x^2+3x+1)(2x^2-3x+1)$. 31. $(3x^2+2xy+2y^2)(3x^2-2xy+2y^2)$

32. $(2x+z)(2x-2y-z)$. 33. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

34. $(x^4+4x^2y^2+8y^4)(x^4-4x^2y^2+8y^4)$.

প্রশ্নমালা 5F (পৃষ্ঠা 63—64)

2. $(x+4)^3$ 3. $(x+6)^3$. 5. $(1-8a)^3$. 6. $(2xy-c)^3$.

8. $27(a-b)^3$. 9. $(1+3a)^3$. 10. $(4a-3)^3$. 11. $(2x+3y)^3$.

12. $(3a+$[illegible]$b)^3$ 13. $(3a+b)^3$ 14. $8(a+e)^3$. 15. $(4x+4y+5z)^3$.

প্রশ্নমালা 5G (পৃষ্ঠা 64—65)

2. $(x+1)(x^2-x+1)$. 3. $(x+4y)(x^2-4xy+16y^2)$.

4. $(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$. 5. $(ax+by)(a^2x^2-abxy+b^2y^2)$.

7. $(a+3)(a-3)(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)$.

8. $(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$.

9. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$.

10. $(7x+8y)(49x^2-56xy+64y^2)$.

11 $(x-3)(x^2+3x+9)$. 12. $(a^2-3)(a^4+3a^2+9)$.

13. $a^2b^2(5a-3b)(25a^2+15ab+9b^2)$.

14. $(4x^2+b^2)(16x^4-4x^2b^2+b^4)$.

15. $\left(a+\frac{1}{3}\right)\left(a^2-\frac{a}{3}+\frac{1}{9}\right)$ 16. $\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{3}\right)$.

17. $(x-y+z)(x^2+y^2+z^2-xz+xy-2yz)$.

18. $(a+1)(7a^2+23a+19)$ 19. $a^2(5a+3b)(13a^2+30ab+21b^2)$.

20. $2x(x^2+3y^2+3z^2-6yz)$. 21. $(3x+2)(21x^2-12x+4)$.

22. $(a+3)(a^2+3a+3)$. 23. $(2a-1)(a^2-a+1)$.

24. $(ab-xy)(a^2b^2+x^2y^2+abxy+x)$. 25. $(7x-4y)(49x^2+28xy+16y^2)$

27. $(x+y)(x+y+y^2)$. 28. $2b(3a^2+b^2)$.

29. $(3a+2b)(9a^2-8ab+4b^2)$. 30. $(a-b)(a^2+ab+b^2-m)$.

প্রশ্নমালা 5H (পৃষ্ঠা 66—68)

4. $(x+2)(x+3)$ 5. $(x+1)(x+5)$. 6. $(x-5)(x-9)$.

7. $(a-7)(a-12)$. 8. $(p-5)(p+6)$. 9. $(x+5)(x-9)$.

10. $(a-7)(a-8)$. 11. $(x-10)(x+16)$. 12. $(x+7)(x-13)$.

13. $(1-2x)(2x-3)$. 14. $(x-11)(x+13)$. 15. $(x-\frac{1}{3})(x+\frac{3}{4})$.

16. $(x-10)(x-2)$. 17. $(x+7)(x-6)$. 18. $(x+5)(x-4)$.

19. $(x+3)(x-3)(x^2+20)$. 20. $(a+3)(a-3)(a^2+2)$.

21. $(3+4x)(4-5x)$. 22. $(x-4)(x+3)$ 23. $(3-x)(3+4x)$.

24. $(7x-3)(2-x)$. 25. $(1-x)(5+x)$.

প্রশ্নমালা 5I (পৃষ্ঠা 68—69)

3. $(m-5n)(m-8n)$. 4. $(x+6a)(x-11a)$

5. $(x-7y)(x-15y)$. 6. $(x+24y)(x+25y)$. 7. $(x^2+81)(x^2+81)$.

8. $(a-5bx)(a-15bx)$. 9. $(a+14bx)(a-2bx)$ 10. $(x^2+6)(x^2-2)$.

11. $(a-b-4x+4y)(a-b-3x+3y)$. 12. $2(x+y)(x-y)$

13. $(5a-3b)(15b-13a)$. 14. $(p-2q)(p-20q)$. 15. $(x+8y)(x-10y)$.

16. $(a+7b)(a-21b)$. 17. $(a-11b)(a-12b)$. 18. $(x-17a)(x+23a)$.

19. $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

20. $-10(x-y)(4x+3y)$ 21. $(x+m+2n)(x-m-3n)$.

23. $(x-a-1)(x+a+3)$. 24. $(b+c-a)(b+c-5a)$.

25. $(x+a-b)(x+a+b)$. 26. $(2x-3)(3x+1)$.

27. $(a+b-3)(a+b-2)$. 28. $(x+a+2)(x-a-3)$.

প্রশ্নমালা 5J (পৃষ্ঠা 70—72)

3. $(3x+2)(x-4)$. **4.** $(x+3)(2x-5)$. **5.** $(2x-3)(3x+5)$.
6. $(4x-3)(x-8)$. **7.** $(5x+1)(2x-5)$. **8.** $(7x+4)(5x-3)$.
9. $(2x+1)(2x-3)$. **10.** $(3x-2)(4x+7)$. **11.** $(13x-11)(3x+2)$.
12. $(3x+11)(4x+7)$. **13.** $(3-a)(2-a)$. **14.** $(3+4a)(2-3a)$.
15. $(2x-5y)(3x-4y)$. **16.** $(2x+y)(2x-y)(3x^2+y^2)$.
17. $(3-2a)(2-a)$. **18.** $(3t-4)(5t+1)$.
19. $(5a+5b+2)(a+b+4)$. **20.** $(a+b-1)(2a+2b-1)$.
21. $(x+1)(x-2)(2x^2-2x-1)$. **22.** $\{x+(a+1)y\}\{(a-1)x+y\}$.
23. $(x+b)(ax+1)$. **24.** $(a-1)(2a+1)(4a^2-2a+1)(a^2+a+1)$
25 $(x+5)(5x+1)(5x^2+14x+20)$. **26.** $(2a+1)(2a-1)(a+2)(a-2)$.
27. (i) $(a+1)(a-1)(a^2+1)(2a^2+1)(2a^2-1)$.
(ii) $(a+b)(a-b)(a^2+b^2)(2a^2+2ab+b^2)(2a^2-2ab+b^2)$.
28. $(x^2-5x+5)^2$. **30.** $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.
31. $(x^2-3x-6)(x^2-3x-16)$. **32.** $(x+1)(x+8)(x^2+9x+30)$.
33. $(x+1)(x-2)^2(x-5)$. **34.** $(x+2)(x-5)(x^2-3x+12)$.
35. $(k-1)(k-6)(k^2-7k+16)$.

প্রশ্নমালা 6A (পৃষ্ঠা 74—76)

2. $6p^2qr^2$. **3.** xy. **4.** $2a^2b^3$. **5.** $5x^2y^2a^2b^3$.
6. $4a^2bd^2$. **7.** $100x^{10}y^8z^8$. **9.** x^2-y^2. **10.** $x-y$.
11. x^3-x^2+x-1. **12.** $2x+1$. **13.** $x-3$.
14. $x+1$. **15.** $x+3$. **16** $a+b$. **17.** $(a+b)(c+d)$.
18. $x+1$. **19.** x^2+1. **20.** $2b-a$. **21.** $3x+5y$.
22. $x-2$. **23.** x^2+1. **24.** $x+\frac{1}{2}$. **25.** $x-2$.

প্রশ্নমালা 6B (পৃষ্ঠা 78—81)

2. $x-3$. **6.** $x^2+ax-2a^2$. **8.** x^2+8x-2. **9.** $x-3$.
10. $3x+1$. **11.** $2x+3$. **12.** $x-2$. **13.** $x-1$.
14. $x-$[illegible]. **15.** $x+2$ **16.** x^2-3x-4. **17.** $a-1$.
18. x^2+3x+2. **19.** $x+1$. **20.** $a-1$.

প্রশ্নমালা 6C (পৃষ্ঠা 82)

2. $3x^2+3xy-y^2$. 3. x^2+7x+1.
4. $3x-5$. 5. x^2+x-2. 6. $x-1$. 7. x^2+2x+3.
8. $3x-7$. 9. $x+1$. 10. x^2+x+1.
11. $2x(x^2-3x+2)$. 12. (x^2+1)

প্রশ্নমালা 7A (পৃষ্ঠা 84—86)

3. $48a^3b^3x^3y^3$. 4. $16abcxyz$. 7. x^3-x. 8. $ab(a+b)$.
9. x^3-2x^2-x+2. 10. $x^3+7x^2+16x+12$. 11. $(x+2)(x-2)(3x-7)$.
12. $(a+b)^2(a^4+a^2b^2+b^4)$. 13. x^3-2x^2-5x+6.
14. $6x^3-17x^2+6x+8$. 15. $(a^4-b^4)(a^2+ab+b^2)$.
16. $(x^4-1)(x^2-1)$. 17 $(x-a)(x+c)(x-c)$. 18. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$.
19. $(a+1)(a-1)^2(a-2)(a^2+1)$. 20. $(x-1)(x-2)(x-3)$.
21. $x^2(x+2)(x-2)(x+4)$. 22. $x^2(x+2)(x-3)(x+5)$
23. $(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)^2$. 24. $(x^4-1)(x^2-1)$.
25. $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$.
26. $(a^2-1)(a^2+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.
27. $x(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$. 28. $(3x-1)(3x+1)(x+2)$.
29. $12(x-2)(x-3)(x+4)(x+5)$. 30. $(x+4)(x-3)(x-2)(x+2)(x+1)$.

প্রশ্নমালা 7B (পৃষ্ঠা 87—88)

3. $2a^4-3a^3-2a^2-9a+18$. 4. $12x^4+4x^3-21x^2-16x-3$.
5. $(x-1)(x^3+2x^2-1)$. 6. $2x^5-x^4-34x^3+64x^2+8x-48$.
7. $a^5+3a^4+2a^3+2a^2-8$. 8. $3x^4+4x^3-7x^2-4x+4$.

প্রশ্নমালা 7C (পৃষ্ঠা 88—90)

3. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$ বা, $6x^3+11x^2-3x-2$.
4. $(x+1)(x-1)(x^2+x+4)(x^2-x+4)$, বা, $x^6+6x^4+9x^2-16$.
5. $(a+2)(a+3)(a+4)(a^2+a+1)$. 6. $192x^7+128x^6-2187x-1458$.
7. $x^3+3x^2-10x-24$. 8. $36(x^2-1)(x^2+4)(x^2-9)$
9. $6x^4-36x^3+30x^2+72x$. 9. (a) $(x-5)(x-2)(2x+3)$.
10. $x^3+3x^2y-xy^2-3y^3$.

প্রশ্নমালা 8A [পৃষ্ঠা 90—92]

5. $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
6. $(x+y+2z)(x^2+y^2+4z^2-2yz-2zx-xy)$
7. $(p-2q-r)(p^2+4q^2+r^2-2qr+rp+2pq)$
8. $(x+2b-1)(x^2+4b^2+1-2xy-x-2y)$
9. $(2a+b-3c)(4a^2+b^2+3c^2-2d+3bc+6ca)$
10. $(3p-2q-4)(9p^2+4q^2+16+6pq-8q+12p)$
11. $(a^2-a+2)(a^4+a^3-a^2+2a+4)$
12. $(x^2+3x+5)(x^4-3x^3+4x^2-15x+25)$
13. $(a^2+a-1)(a^4-a^3+2a^2+a+1)$
14. $(x^2+3x-2)(x^4-3x^3+11x^2+6x+4)$
15. $(x^2+3x+1)(x^4-3x^3+8x^2-3x+1)$
16. $(2m^2+m+3)(4m^4-2m^3-5m^2-3m+9)$
18. $3x(x-1)(1-2x)$ 19. $3xyz(y-z)(z-x)(x-y)$
20. $3(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)$
22. $x=-1\frac{1}{8}$, 23. $x=3\frac{1}{9}$, 24. $x=\frac{1}{9}(a+b+c)$
25. $(a^3+2a+1)(a^6-2a^4-a^3+4a^2-2a+1)$

প্রশ্নমালা 8B [পৃষ্ঠা 93—95]

2. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 3. $(b-c)(c-a)(a-b)$ 6. $-(b-c)(c-a)(a-b)$
7. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 8. $-(b-c)(c-a)(a-b)$ 9. $(b-c)(c-a)(a-b)$
10. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$
11. $2x(b-c)(c-a)(a-b)$ 12. $-(b-c)(c-a)(a-b)$
13. $q(b-c)(c-a)(a-b)$
14. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)(a^2+ab+b^2)$
15. $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)$
16. $(q-r)(r-p)(p-q)(q+r)(r+p)(p+q)$

প্রশ্নমালা 8C [পৃষ্ঠা 95—98]

2. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ 3. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$
5. $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$
6. $(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$
8. $(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
9. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$
10. (a) $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2)$
(b) $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2)$
(c) $(m-n)(n-l)(l-m)(m+n)(n+l)(l+m)(l^2+m^2+n^2)$
(d) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+1)$

(e) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+3)$. (f) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$. (g) $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

11. (a) $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$
(b) $(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$
(c) $-(y-z)(z-x)(x-y)(y+z)(z+x)(x+y)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)$
(d) $-m(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)$.
(e) $-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.
(f) $(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab)$.
(g) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c+ab+bc+ca)$.

12. (a) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.
(b) $-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.
(c) $(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.
(d) $-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc\}$
(e) $-(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc\}$
(f) $(b-c)(c-a)(a-b)\{a^3+b^3+c^3+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+abc\}$

প্রশ্নমালা 8D [পৃষ্ঠা 98—100]

2. $(b+c)(c+a)(a+b)$
3. $(b+c)(c+a)(a+b)$
5. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$
6. $(a+b+c)(ab+bc+ca)$.
10. $(b+c)(c+a)(a+b)$
11. $(b+c)(c+a)(a+b)$
12. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$
13. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$
14. $(a+b+c)(bc+ca+ab)$
15. $2(b+c)(c+a)(a+b)$
16. $2(a+b+c)(bc+ca+ab)$
17. (a) 240 (b) 780
18. 0.

প্রশ্নমালা 8E [পৃষ্ঠা 101—102]

4. $(x+1)(x^2+3x+1)$
5. $(x-1)(x^2-4x+1)$
6. $(x+1)(x^2-8x+1)$
7. $(x+1)(2x^2+x+2)$
8. $(x-1)(2x^2-3x+2)$
9. $(x^2+x+1)^2$
10. $(x+1)^2(x^2+3x+1)$
11. $(x+1)^2(x^2-6x+1)$
12. $(x^2+6x+1)(x^2-3x+1)$
13. $(x+1)(x-1)(x^2-3x+1)$
14. $(2x^2-7xy-2y^2)(x^2+xy-y^2)$
15. $(x-1)(x^2+3x+1)(x^2-6x+1)$
16. $(a-b)(2a+b)(a+2b)(a^2+ab+b^2)$.

প্রশ্নমালা 8F [পৃষ্ঠা 103—104]

4. $(3x+7y-5)(x-2y+3)$
5. $(2x+3y+4)(x+2y+1)$
6. $(x-2y+3)(3x+y+2)$
7. $(a+3b+4)(a-2b-1)$
8. $(x-2y+3z)(2x+3y-5z)$
9. $(3x-y-3z)(2x+2y-z)$
10. $(4a-5b+6c)(3a+b-2c)$
11. $(x-y+2z+1)(x+3y-z-2)$
12. $(2a-3b-4c+5)(a-2b+3c+4)$.

প্রশ্নমালা 8G [পৃষ্ঠা 105—107]

6. $(x-1)(2x^2+5x+5)$
7. $(x+1)(x+2)(x+3)$
8. $(x-1)(x^2-x+2)$
9. $(a-3)(a^2+2a+7)$
10. $(x-3)(x-4)(x+5)$
11. $(x-1)(x-2)(x-3)$
12. $(x-2)(x^2-4x+5)$
13. $(x+1)(x^2+4x-6)$
14. $(a+3b)(a^2+ab-3b^2)$
15. $(x+xy)(x^2-2xy-5y^2)$
16. $(2x-1)(4x^2+2x+3)$
17. $(3x-2)(9x^2+6x+7)$
18. $(x-1)^2(x^2+2x+3)$
19. $(x-1)^3(x-2)$
20. $(x+1)(x-1)(x-2)(x-4)$
21. $(a+1)^3(2a-5)$
22. $(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$
23. $(a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$
24. $(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^4)$
25. $(x+1)(x-1)(x-2)(x^2-3x+1)$.

প্রশ্নমালা 8H [পৃষ্ঠা 107—109]

3. $(a-2)(a^2+2a+12)$
4. $(3a-1)(9a^2+8a+1)$
5. $(x^2+ab)(3a-4b)$
6. $(a+c)(a-c)(a^2+b^2+c^2)$

12. (i) $(2m-3n)(m^2+2n^2)$ (ii) $(3x-2y)(2x^2+6xy-4y^2)$
(iii) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ (iv) $(x^2+2)(x+1)(x+3)$

13. (i) $(a-c)(1+b)$. (ii) $(xr+ybq)(a-c)$
(iii) $(3x^2-x-6)(x^2-5x-2)$. (iv) $(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-1)$

14. (i) $(a-c)(b-c)(c^2+ab)$ (ii) $(a-q)\{(p+q)a+q(q-4p)\}$
(iii) $2(1+a)(1+c)(a-c)$ (iv) $2(x-a)(x+y+z+a)$

15. (i) $(x^2+3x-5)(x^2-3x+5)$ (ii) $(a^2+1)(a-1)^2$
(iii) $(a+b+c)(a+3b-c)$ (iv) $(2x^2-6x+3)(2x^2-4x-3)$

6. (i) $(x-y+10)(2x-y-3)$ (ii) $(x+2)(x-2)(x-4)(x-8)$
(iii) $(x+3y+10)(x+5y+16)$ (iv) $(a+b)(a-b)(a+2b)(2a-b)(a^2+b^2)$

17. (i) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

(ii) $(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)$

(iii) $(x-y)(x-y-1)$

(iv) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

18. (i) $2(x-y)(1-xy)$

(ii) $(a-1)(b-1)(c-1)$

(iii) $(1+x)(1+y)(1+z)$

(iv) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

(v) $5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

19. 5

20. ভাগফল $\left(a^2+\frac{b^2}{3}\right)\left(a^2-ab+\frac{b^2}{3}\right)$.

প্রশ্নমালা 9A (পৃষ্ঠা 111—112)

2. $\frac{x^2z^2}{5y^2}$. 4. $\frac{2a}{3b}$. 5. $\frac{2l}{3m}$. 6. $\frac{2x^3y}{3z}$. 7. $\frac{2xz}{3y}$.

8. $\frac{1}{x-y}$. 9. $\frac{a-9b}{2x-6a}$. 10. $\frac{x(x+y)}{x-y}$. 12. $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$.

13. $4(x-y)$. 14. $\frac{x}{x+1}$. 15. $\frac{x+2y}{x^2+xy+y^2}$. 16. $\frac{2x+3}{3x+5}$.

17. $\frac{x+7}{x+13}$. 18. $\frac{x-1}{x+1}$. 19. $\frac{2a+b-c}{b+c-2a}$. 20. $\frac{xy}{x-2}$.

21. $\frac{3(a+b)}{a-b}$. 22. $\frac{2x-y}{x^2-1}$. 23. $\frac{a^2+b^2}{a}$. 24. $\frac{2x^2+3x-5}{7x-5}$

25. $\frac{x^2-y^2}{x^2+xy+y^2}$.

প্রশ্নমালা 9B (পৃষ্ঠা 113—114)

3. $\frac{a(a+b)}{a^2-b^2}, \frac{b(a-b)}{a^2-b^2}, \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

5. $\frac{-a^3(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{-b^3(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \frac{-c^3(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

6. $\dfrac{a^3-b^3}{a^4+a^2b^2+b^4}, \dfrac{a^3+b^3}{a^4+a^2b^2+b^4}$. 7. $\dfrac{z(a+b)}{xyz}, \dfrac{x(b+c)}{xyz}, \dfrac{y(c+a)}{xyz}$.

8. $\dfrac{x(x+y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}, \dfrac{y(x-y)(x^2+y^2)}{x^4-y^4}, \dfrac{xy(x^2+y^2)}{x^4-y^4}, \dfrac{y^2(x^2-y^2)}{x^4-y^4}$.

9. $\dfrac{(x+4)^2}{(x+2)(x+3)(x+4)}, \dfrac{(x+3)^2}{(x+2)(x+3)(x+4)}, \dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)}$.

10. $\dfrac{-a^2(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}, \dfrac{-b^2(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}, \dfrac{-c^2(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$.

11. $-\dfrac{(b+c)(x-a)}{(a-b)(x-a)(x-b)}, \dfrac{(a+c)(x-b)}{(a-b)(x-a)(x-b)}$.

12. $\dfrac{x+4}{(x+1)(x-3)(x+4)}, \dfrac{2x(x+1)}{(x+1)(x-3)(x+4)}, \dfrac{3x^2(x-3)}{(x+1)(x-3)(x+4)}$.

প্রশ্নমালা 9C (পৃষ্ঠা 115—117)

4. $\dfrac{4}{(x-1)(x-3)}$. 5. $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$. 6. $\dfrac{2x^3}{x^2-y^2}$. 7. $\dfrac{2bx}{4x^2-1}$.

9. $\dfrac{4xy}{x^2-y^2}$. 10. 0. 11. $\dfrac{3x^2-14}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 12. 0. 13. 0.

14. 1. 15. 0. 16. 1. 17. $\dfrac{64ax^3}{16x^4-a^4}$. 18. $\dfrac{1}{6}$.

প্রশ্নমালা 9D (পৃষ্ঠা 117—118)

2. $\dfrac{c(yz+n)}{xyz+xn+mz}$. 3. $1-x$. 4. $\dfrac{2x+1}{3x+2}$. 5. $\dfrac{x^3}{x^4-x^2+1}$.

6. $\dfrac{x-1}{x}$. 7. x^2+y^2. 8. $\dfrac{2}{x^3}$. 9. $(1-2x)$

প্রশ্নমালা 9E (পৃষ্ঠা 119—120)

2. 0. 3. −1. 4. 0. 5. 0. 6. 0. 7. 0.

8. 0. 9. 0. 10. 0. 11. 1. 12. $\dfrac{1}{abc}$. 13. 1. 14. 0.

প্রশ্নমালা 9F (পৃষ্ঠা 121—122)

3. $a^2+2a^2b+2ab^2+b^3$. 5. 1. 6. 1 7. $\dfrac{x(xz-y^2)}{z(x-y)}$.

8. $\dfrac{a^2-ab}{b}$. 9. $\dfrac{b(a+b)}{a}$. 10. 1. 11. $\dfrac{a+1}{a-1}$. 12. $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$.

13. $\dfrac{a+4}{a+5}$. 14. 1. 15. $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$. 16. $\dfrac{1}{x^2+y^2}$. 17. $\dfrac{1}{x+y}$.

18. $\dfrac{a^2+b^2}{a}$. 19. $\dfrac{c}{a}$. 20. $\dfrac{x^3}{x^3+a^3}$.

প্রশ্নমালা 9G (পৃষ্ঠা 122—125)

4. $\dfrac{1}{x}$. 5. x. 6. $a-b$. 7. x. 8. 1.

9. $\dfrac{a^3}{(a-x)(a^3+x^3)}$. 10. 1. 11. $-x^2y^2z^2$. 12. 6.

13. $2(a+b+c)$. 14. $\dfrac{16x^{15}}{x^{16}-1}$. 15. $\dfrac{1}{a-x}$. 16. 1.

17. $\dfrac{2a^2}{a^2+b^2}$. 18. $\dfrac{(a+b+c)^2}{2bc}$. 19. $\dfrac{2(x^2+y^2)}{y^2}$.

20. 1. 21. $\dfrac{b}{a}$. 22. 2. 23. $a+b+c$. 24. $\dfrac{ab}{a+b}$.

প্রশ্নমালা 11A (পৃষ্ঠা 133—135)

4. $\dfrac{ab}{a+b-c}$ 6. 20. 7. 8. 8. 4. 9. −2·821 10. 12·25 11. 0.

12. $\frac{6}{7}a$. 13. $\frac{8a}{25}$. 14. $a+b$. 15. 1. 16. 6.

17. 1. 18. $\frac{1}{ab}$. 19. b.

20. $-(a+b+c)$. 21. q.

প্রশ্নমালা 11B (পৃষ্ঠা 136—140)

3. 3. 6. $bc+ca+ab$. 9. b. 10. $2a$. 11. 7.

12. $a+b+c$. 13. $2\frac{1}{2}$. 14. $3\frac{1}{3}$. 15. 13. 16. 6.

17. 4. 18. $\frac{7}{8}$. 19. −2. 20. $1\frac{1}{2}$. 21. $-1\frac{1}{7}$. 22. 16.

23. 3. 24. 9. 25. 5. 26. $\frac{1}{2}(a+b)$. 27. $\frac{ab}{a-2b}$.

28. $-2\frac{1}{2}$. 29. $a(a+b+c)$. 30. $-(a+b+c+abc)$.

31. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. 32. $(a^3+b^3+c^3)$. 33. $-(a^3+b^3+c^3)$.

34. $(a+b+c)^2$. 35. $-(a+b+c)$. 36. $-5\frac{1}{2}$.

37. (a) $5\frac{1}{2}$. (b) 9. (c) $-\frac{1}{2}(a+b)$. (d) $\frac{a}{3}$. 38. 5.

39. $\frac{b(a+c)}{a-c}$. 40. $-b$.

প্রশ্নমালা 12A (পৃষ্ঠা 143)

1. 2, 3. 2 1, 2. 3. 3, 2. 4. 2, 1. 5. 2, 3.
6. 1, 2. 7. 12, 15. 8. 2, −1. 9. 5, 3. 10. 1, 1.
11. 1, −1. 12. 1, 1. 13. 4, 2. 14. 21, 24. 15. 8, 12.
16. 1, 2. 17. 2, −3. 18. 6, 14. 19. 3, 1. 20. 3, 2.
21. 2, 3. 22. 1, 2.

প্রশ্নমালা 12B (পৃষ্ঠা 146—147)

3. 13, 6. 4. 3, 2. 5. 5, $\frac{4}{5}$. 6. 5, 3.
7. 3, 4. 8. 0, $\frac{c}{b}$. 9. 5, 2. 10 1, 2. 11. 7, 4.
12. $b+a$, $b-a$. 13. 16, 4. 14. $\frac{bc_1-cb_1}{ab_1-ba_1}$, $\frac{ca_1-ac_1}{ab_1-ba_1}$. 15. 1, 2.
16. 2, 3. 17. $\frac{a^3+b^3}{2a}$, $\frac{a^3-b^3}{2b}$.

প্রশ্নমালা 12C (পৃষ্ঠা 147—149)

5. 2, 3. 6. $\frac{ab}{a+b}$, $\frac{ab}{a+b}$. 7. 2, 3. 8. 3, 2. 9. 4, 3. 10. 3, 1.

11. $\frac{ab}{a+b}$, $-\frac{ab}{a+b}$. 12. $\frac{c(b-c)}{a(b-a)}$, $\frac{c(a-c)}{b(a-b)}$. 13. $\frac{mp-nq}{ap}$, $\frac{mp-nq}{aq}$.

14. 4, 10. 15. 3, 1. 16. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. 17. 8, 5. 18. $2\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.

প্রশ্নমালা 13A (পৃষ্ঠা 150—12)

2. 45. 3. 42. 5. 14, 6. 6. 13, 7. 8. 9 বৎ। 9. 30 বৎ। 10. পিতা 40 বৎ, পুত্র 15 বৎ। 11. 45 বৎ। 12. 38, 14. 13. 42. 14. 56. 15. 54. 16. 456. 17. 123. 18. 19, 42. 19. 24. 20. 1910.

প্রশ্নমালা 13B (পৃষ্ঠা 153—157)

2. 8 দিন। 3. $28\frac{1}{8}$ দিন। 5. 3 ঘ. 45 মি. 6. 4 টা. 12 মিনিট। 8. 33 পা. 15 শি. 10. 7 টা. $38\frac{2}{11}$ মি. 11. 7 জন। 12. 2448. 13. 150 গজ। 14. দৈর্ঘ্য 17 ফুট, প্রস্থ 13 ফুট. 15. 150 টা. 16. $\frac{4}{7}$. 17. প্রথম বেগে 35 মাইল, দ্বিতীয় বেগে 45 মাইল। 18. 960 টা. 19. $2\frac{1}{8}$ মাইল। 20. 4 টা. $5\frac{5}{11}$ মি., 4 টা $38\frac{2}{11}$ মি. 21. 88 ফুট, 24 মাইল। 22. 4 টা $26\frac{122}{143}$ মি.

প্রশ্নমালা 13C (পৃষ্ঠা 157—160)

7. পিতা 40 বৎ. জ্যেষ্ঠ পুত্র 10 বৎ, কনিষ্ঠ পুত্র 8 বৎ। 8. 2 মাইল ও 4 মাইল প্রতি ঘণ্টায়। 9. 72. 10. 9 দিনে। 11. নৌকা ঘণ্টায় 8 মাইল, স্রোত ঘণ্টায় 3 মাইল। 12. $\frac{15}{28}$. 13. $\frac{1}{4}$. 14. 78 টা. 12 প. 15. 550 টা., 5%. 16. 5. 17. ঘণ্টায় 3 মাইল। 18. 14. 19. 60. 20. 10 মা. প্রতি ঘণ্টায়। 21. 8 দিন। 22. 1215, 15. 23. 5 টা $32\frac{44}{143}$ মি. 24. 15 মাইল। 25. 68 বৎ., 32 বৎ। 26. 3 কি. মি. 27. 40, 8.

প্রশ্নমালা 1A (পৃষ্ঠা 168—170)

9. $\pm a$. 10. ± 6. 11. ± 9. 12. $1, -\frac{4}{7}$. 13. $\pm\sqrt{\frac{-b}{a}}$. 14. ± 5. 15. $\pm\sqrt{21}$. 16. $\pm 2\frac{1}{2}$. 17. ± 2. 18. $\pm\sqrt{a^2-2a}$. 19. ± 3. 20. ± 2. 21. ± 3. 22. $\pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$.

প্রশ্নমালা 1B (পৃষ্ঠা 171—175)

11. $-13, 6\frac{3}{4}$. 12. $37, -11$. 13. $\frac{69\pm\sqrt{2961}}{20}$. 14. $\frac{11\pm\sqrt{13}}{6}$. 15. $7, -4\frac{9}{17}$. 16. 23, 3. 17. $-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}$. 18. $3\pm\sqrt{7}$.

19. $-\frac{5}{14}, \frac{4}{3}$. 20. $5\frac{2}{3}, 9\frac{1}{2}$. 21. 292, −281. 22. $12, \frac{3}{4}$.
23. 2, −3. 24. $\sqrt{13} \pm 3$. 25. 3, −4. 26. $-2a, -3a$.
27. 2, −4. 28. $-\frac{68}{5}$, 3. 29. $-2\frac{1}{4}$, 4. 30. $\frac{b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$.

প্রশ্নমালা IC (পৃষ্ঠা 155)

1. $1, \frac{7}{2}$. 2. $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}$. 3. 13, −12. 4. 23, −1. 5. 8, 15
6. ±8. 7. $6, -\frac{16}{3}$. 8. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}$. 9. $2, \frac{1}{3}$. 10. $13, \frac{2}{3}$
11. 7, 2. 12. 12, −2 13. $0, \frac{b-2}{a}$. 14. $\frac{2a+b}{3}$, 0.
15. $\pm 4, \pm\frac{1}{4}$. 16. ±2, ±1. 17. 5, 25. 18 20, 30.
19. $2, -\frac{1}{2}$. 20. 6, 8, অথবা −8, −6.

প্রশ্নমালা 2 (পৃষ্ঠা 176—180)

5. $x=1, y=5$. 6. $x=3, y=12$. 7. $x=4, y=2$.
8. $x=6, y=8$. 9. $x=-3, y=0$. 10. $x=-2, y=4$.
11. $x=3, y=2$. 12. $x=2, y=3$. 13. $x=1, y=1$.
14. $x=-\frac{2}{3}, y=-1$. 15. $x=y=1$. 16. $x=3, y=4$.
17. $x=2, y=-1$. 18. $x=2, y=0$. 19. $x=2, y=3$.
20. $x=10, y=4$. 21. $x=2, y=1$. 22. $x=1, y=1$; 1 সমকোণ।
23. $x=5, y=1$. 24. $x=y=1$. 25. $x=0, y=5$.
26. $x=2, y=6$. 27. (*i*) $x=9, y=11$. (*ii*) $x=2, y=1$.
(*iii*) $x=8, y=6$, (*iv*) $x=3, y=2$. 28. 4, 0 ; 0, 5.

প্রশ্নমালা 3 (পৃষ্ঠা 184—187)

11. 23 : 24 বড়। 12. 11 : 15 ; 7 : 11 ; 3 : 7. 13. $x+y : x-y$.
14. $x+3y : x+4y$ 15. 5 : 8. 16 1 : 2. 17. 1 : 1. 18. 9 : 10.
19. $x = \pm\sqrt{ab}$. 20. $\frac{ab}{a+b}$ 21. 12, 16. 23. $\frac{5}{8}$. 24. $\frac{ab}{a+b}$.
25. 4. 26. 10 : 13. 27. 40 বৎ, 65 বৎ। 28. $6\frac{1}{2}$ বৎসর।

প্রশ্নমালা 4 (পৃষ্ঠা 192—193)

7. $7\frac{1}{2}$. 8. 18. 9. $\frac{21bc}{2a}$. 10. $\frac{1}{6}$. 11. ca. 12. x^3-y^3.

13. $7\frac{1}{5}$. 14. $\frac{bc^2}{a}$. 15. c. 16. $\frac{2}{9}$. 17. $\frac{x^2+xy+y^2}{x-y}$. 18. 20.

19. $\frac{ab}{c}$. 20. $2\sqrt{3}$. 21. 1. 22. 1. 23. $\frac{ac-b^2}{a+c-2b}$.

24. $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$.

বিবিধ প্রশ্নমালা 5 (পৃষ্ঠা 203—208)

A. 1. $3x^2-11$. 2. 0. 3. $-y^2$. 4. (a) $(7a+4b)(7a-4b)$.
(b) $(x+2)(x+13)$. 5. $2x-y$. 6. $2x^2-xy-6y^2$.
7. 1, 8, 40 ফুট।

B. 3. $a+3b+2d$. 4. (a) $(x+y)(ax+by)$.
(b) $(a+d)(b+c)(a-d)(b-c)$. 5. $x=11$. 6. $(b-c)^2+(c-a)^2$.
7. $(1+a)(1+b)(1+c)$. 8. 16.

C. 1. $\frac{6v}{5x}$. 3. x^2-x+1. 4. $\frac{(a-b)^2}{ab}$.
5. $x=6$. 6. $x^2+6xy+7y^2$. 8. 9 বৎসর।

D. (1) $2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.
2. (i) $(x+y+1)(x-y+1)$. (ii) $(x+2)(2x-5)$. 3. $x+1$.
4. 1. 5. $x=3, y=2$. 7. $(x^2-7x+9)^2+(5)^2$. 8. 1910 সনে।

E. 1. $\frac{ax}{12}+\frac{by}{16}+\frac{cz}{20}$ (i) $(5+x)(1-x)$. (ii) $(a+b-2c)(a-b+2c)$.
3. $x-2$. 4. (i) $\frac{6}{7}a$. (ii) $x=3, y=1$. 7. $\frac{xy}{x+y}$ দিন।

F. 1. 0. 2. (i) $(x+yz)(y+zx)$. (ii) $(a-b)(2a^2+ab+b^2)$.
5. $\frac{4x^2}{1-x^4}$. 6. (i) $x=3$. (ii) $x=4, y=10$. 7. $x=1, y=2$.

G. 1. (*i*) $\left\{a-\left(\frac{a}{2}+5\right)\right\}$. (*ii*) $\frac{ax+by+cz}{a+b+c}$. 2. (*i*) $(x-2)(3-7x)$.
(*ii*) $(2x+z)(2x-2y-z)$.

3. $3x+2$. 4. (*i*) $\pm 3, 4, -2$. (*ii*) $\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}$. (*iii*) $x=1, y=2$.

7. 75. 8. $x=9, y=11$.

H. 1. $x(x+2)(2x-1)(3x+1)$. 2. $x-2$. 3. (*i*) $(x-2)(x+2)^2$.
(*ii*) $(3+4x)(4-5x)$.

4. (*i*) $x=1$. (*ii*) $x=y=1$.

5. 35 মাইল ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে এবং 45 মাইল ঘণ্টায় 18 মাইল বেগে।

6. $x=2, y=1$. 7. 0.

পাটীগণিত

(নবম শ্রেণী)

1

A. পূর্বপাঠের পুনরালোচনা

Revision of Previous Work

1·1. বিবিধ সংজ্ঞা : (*a*) কার্যের সুবিধার জন্য এক, দুই, তিন প্রভৃতি পাটীক সংখ্যাগুলিকে কথায় না লিখিয়া চিহ্নের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। যথা, এক (1), দুই (2), তিন (3), চার (4), পাঁচ (5), ছয় (6), সাত (7), আট (8), নয় (9), শূন্য (0)। এই 1, 2, 3, 4 প্রভৃতি চিহ্নগুলিকে **অঙ্ক (Digit)** বলে।

(*b*) যাহার পরিমাণ করা যায় তাহার নাম **রাশি (Quantity)**। কোন রাশির পরিমাণ নির্ণয় করিবার জন্য সেই জাতীয় যে ক্ষুদ্রতম রাশির সহিত সমজাতীয় ঐ বৃহত্তম রাশির তুলনা করা হয়, সেই ক্ষুদ্রতম রাশিকে উহার **একক (Unit)** বা **একক রাশি** বলা হয়। কোন একটি রাশি, উহার একক রাশির যত গুণ তাহা যে সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তাহাকে রাশিটির **সাংখ্যমান** বা **পরিমাণ** (**Measure**) বলে। যথা, 10 টাকা বলিলে 10 সাংখ্যমান, 1 টাকা একক এবং দশ টাকা রাশি।

(*c*) যে সংখ্যার সহিত একক যুক্ত থাকে, তাহাকে **বদ্ধ সংখ্যা** (**Concrete number**) এবং যাহার সহিত একক যুক্ত থাকে না, তাহাকে **শুদ্ধ সংখ্যা** (**Abstract number**) বলা হয়। যথা, 10 টাকা বদ্ধ সংখ্যা এবং 10 শুদ্ধ সংখ্যা।

(*d*) যে রাশিতে একাধিক একক যুক্ত থাকে, তাহার নাম **মিশ্র রাশি** (**Compound Quantity**) ; যে রাশিতে একটি মাত্র একক থাকে বা কোন একক যুক্ত থাকে না, তাহাকে **অমিশ্র রাশি (Simple Quantity)** বলে। যথা, 10 টাকা 5 পয়সা মিশ্ররাশি, কিন্তু 10 টাকা অথবা 5 পয়সা অমিশ্র রাশি।

1·2. দশমিক বা দশগুণোত্তর প্রণালী (Decimal System of Notation) :

(*a*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 এই নয়টি অঙ্ক সাহায্যে 1 হইতে যথাক্রমে 9 পর্যন্ত সংখ্যা প্রকাশিত হইতে পারে। এইজন্য এই প্রথম নয়টি অঙ্ককে **সংখ্যা-জ্ঞাপক** বা **সার্থক অঙ্ক (Significant Digit)** বলা হয়। 0 দ্বারা কোন সংখ্যা সূচিত

হয় না। সংখ্যার মধ্যে কোন স্থানে অঙ্কের অভাব আছে তাহাই বুঝাইবার জন্য **0 শূন্য (Zero, Cipher বা Nought)** অঙ্কটি ব্যবহার করা হয়। পাটীগণিতের যে কোন সংখ্যা এই দশটি অঙ্কের মধ্যে একাধিক অঙ্ককে পাশাপাশিভাবে বিভিন্ন প্রণালীতে লেখা যায়। এইজন্য সংখ্যা লিখিবার এই প্রণালীকে **দশমিক বা দশগুণোত্তর প্রণালী (Decimal System of Notation)** বলে।

(*b*) সার্থক বা সংখ্যাজ্ঞাপক অঙ্কগুলি যখন নিজেরাই কোন সংখ্যা প্রকাশ করে, তখন উহাদের দ্বারা যে সংখ্যা প্রকাশিত হয়, সেইটির মানকে **স্বকীয় মান বা প্রকৃত মান (Intrinsic value)** বলে। আর একাধিক অঙ্ক পাশাপাশি ভাবে লিখিলে স্থানভেদে উহারা যে বিভিন্ন মান প্রকাশ করে, তাহাকে ঐ অঙ্কের **স্থানীয় মান (Local value)** বলে।

(*c*) ভাষায় লিখিত কোন সংখ্যাকে অঙ্কে লিখিয়া প্রকাশ করার নাম **সংখ্যা লিখন (Notation)** এবং অঙ্কে লিখিত কোন সংখ্যাকে ভাষায় প্রকাশ করাকে **সংখ্যা পঠন (Numeration)** বলে।

1·3. যোগঃ দুই বা তাহার অধিক সংখ্যাগুলি বা একজাতীয় রাশিসমূহ একত্র করিলে, ঐ একত্রীকৃত ফল নির্ণয় করিবার প্রণালীকে **যোগ, সংকলন বা জেরিজ (Addition)** বলে। যে সকল সংখ্যা যোগ করা হয় তাহাদিগকে **যোজ্য রাশি (Summand)** বলে এবং যোগ করিয়া যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে **যোগফল বা সমষ্টি (Sum)** বলে।

1·4. বিয়োগঃ দুইটি অসমান, অখণ্ড শুদ্ধ রাশি বা সংখ্যার মধ্যে একটি আর একটি অপেক্ষা কত বড় তাহা নির্ণয় করিবার প্রণালীকে **অমিশ্র বিয়োগ বা ব্যবকলন (Subtraction)** বলে। যাহা হইতে বিয়োগ করিতে হয় তাহাকে **বিয়োজন বা জমা (Minuend)** এবং যাহা বিয়োগ করা হয় তাহাকে **বিয়োজ্য বা খরচ (Subtrahend)** বলে। বিয়োগ করিয়া যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে **বিয়োগফল, অন্তর, অবশিষ্ট বা বাকী (Remainder বা Difference)** বলে। বিয়োগকে যোগের **অনুপূরক বা বিপরীত প্রক্রিয়া** বলে। এই প্রণালীর সাহায্যেই বিয়োগের অঙ্ক কষা হয় ও নিম্নলিখিত সিদ্ধান্তগুলি পাওয়া যায়:

(i) বিয়োজন − বিয়োজ্য = বিয়োগফল।

(ii) বিয়োজ্য + বিয়োগফল = বিয়োজন।

(iii) বিয়োজন − বিয়োগফল = বিয়োজ্য।

1·5. বন্ধনী : ( ), { }, [ ], "—" সাধারণতঃ বন্ধনী এই চারি প্রকার। ইহাদের মধ্যে ( ) কে প্রথম বন্ধনী, { } কে দ্বিতীয় বন্ধনী, [ ] কে তৃতীয় বন্ধনী এবং "—" কে রেখা বন্ধনী বলে। বন্ধনীযুক্ত রাশিমালাকে একটি রাশি বলিয়া বিবেচনা করিতে হয় এবং একাধিক বন্ধনী থাকিলে, সর্বপ্রথমে সকলের ভিতরের বন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমশঃ বাহিরের বন্ধনীর কাজ করিতে হয়। কোন বন্ধনীর পূর্বে "+" চিহ্ন থাকিলে কেবলমাত্র বন্ধনী উঠাইয়া দিতে হয়, ভিতরের চিহ্নের কোন পরিবর্তন করিতে হয় না। কিন্তু বন্ধনীর পূবে '−' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর অন্তর্গত '+' চিহ্নকে '−' চিহ্ন এবং '−' চিহ্নকে '+' চিহ্নে পরিবর্তিত করিয়া বন্ধনী উঠাইতে হয়।

1·6. গুণন : (*a*) যে কোন রাশি বা সংখ্যাকে একাধিকবার লইয়া যোগ করিলে যোগফল যাহা হয় তাহা নির্ণয় করিবার সংক্ষিপ্ত প্রণালীকে **গুণন** বা **পূরণ** (**Multiplication**) বলে। যে সংখ্যাকে গুণ করিতে হয় তাহার নাম **গুণ্য** (**Multiplicand**), যে সংখ্যা দ্বারা গুণ করিতে হয় তাহার নাম **গুণক** (**Multiplier**) এবং গুণ করিয়া যে ফল পাওয়া যায় তাহাকে **গুণফল** (**Product**) বলে।

(*b*) তিন বা ততোধিক সংখ্যা পর পর গুণ করিলে যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে সংখ্যাগুলির **ধারাবাহিক গুণফল** (**Continued Product**) বলে ; এবং সংখ্যাগুলির প্রত্যেকটিকে গুণফলের **উৎপাদক** বা **গুণনীয়ক** (**Factor**) বলা হয়।

***1·7. ভাগ :** (*a*) একটি ক্ষুদ্রতর সংখ্যা তদপেক্ষা বৃহত্তর অপর একটি সংখ্যা হইতে কতবার বিয়োগ করা যাইতে পারে, অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি বৃহত্তর সংখ্যার মধ্যে কতবার আছে, তাহা নির্ণয় করিবার সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়াকে **ভাগ, ভাগহার** বা **হরণ** (**Division**) বলে। যে সংখ্যাটি দ্বারা ভাগ করা যায় তাহার নাম **ভাজক** (**Divisor**) ; যে সংখ্যাটিকে ভাগ করা যায় তাহার নাম **ভাজ্য** (**Dividend**) ; ভাজক, ভাজ্যের মধ্যে কতবার আছে অর্থাৎ ভাগ করিয়া যে উত্তর হয় তাহাকে **ভাগফল** (**Quotient**) এবং ভাগ করিবার পরও যদি ভাজ্যের কিছু বাকী থাকিয়া যায় তাহাকে **ভাগশেষ** বা **অবশিষ্ট** (**Remainder**) বলে।

সুতরাং (i) ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ।

(ii) ভাজক = (ভাজ্য − ভাগশেষ) ÷ ভাগফল।

(iii) ভাগফল = (ভাজ্য − ভাগশেষ) ÷ ভাজক।

(iv) ভাগশেষ = ভাজ্য − (ভাগফল × ভাজক)।

প্রশ্নমালা 1A

[1 হইতে 10, 15 হইতে 20 ক্লাসের, এবং 11 হইতে 14, 21 হইতে 31 বাড়ীর কাজ ।]

1. তিনটি সংখ্যার সমষ্টি 1688 ; দুইটি সংখ্যা 585 এবং 768 ; অপর সংখ্যাটি কত ?

2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 2459, এবং তাহাদের বিয়োগফল 687 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [C. U. 1928]

নিয়ম : দুইটি সংখ্যার যোগফল ও বিয়োগফল দেওয়া থাকিলে যোগফল ও বিয়োগফল যোগ করিয়া এই যোগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে বৃহত্তর সংখ্যা পাওয়া যায় এবং যোগফল হইতে বিয়োগফল বিয়োগ করিয়া এই বিয়োগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি পাওয়া যায়।

∴ নির্ণেয় বৃহত্তর সংখ্যা $=\frac{2459+687}{2}=\frac{3146}{2}=1573.$

এবং নির্ণেয় ক্ষুদ্রতর সংখ্যা $=\frac{2459-687}{2}=\frac{1772}{2}=886.$

3. দুইটি সংখ্যার যোগফল 166302 এবং বিয়োগফল 6616 ; উহাদের গুণফল কত ? [D B. 1925]

4. 15 হইতে 35 পর্যন্ত এবং 75 হইতে 150 পর্যন্ত ক্রমিক সংখ্যাগুলির যোগফল কত ?

স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল নির্ণয় :

নিয়ম : শেষ সংখ্যাকে ঠিক পরবর্তী সংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলের অর্ধেক লইলে যোগফল পাওয়া যায়।

এখানে, 1 হইতে 35 পর্যন্ত সংখ্যার যোগফল $=\frac{35\times 36}{2}=630.$

এবং 1 হইতে 14 " " " $=\frac{14\times 15}{2}=105.$

∴ বিয়োগ করিয়া 15 হইতে 35 পর্যন্ত সংখ্যার যোগফল $=525.$

অনুরূপে 1 হইতে 150 পর্যন্ত সংখ্যার যোগফল $=\frac{150\times 151}{2}=11325.$

এবং 1 " 74 " " " $=\frac{74\times 75}{2}=\quad 2775.$

∴ বিয়োগ করিয়া 75 হইতে 150 পর্যন্ত সংখ্যার যোগফল $=8550.$

∴ 15 হইতে 35 এবং 75 হইতে 150 পর্যন্ত সংখ্যার যোগফল

$=525+8550=9075.$

5. A ও B এর একত্রে 134 টাকা, B ও C এর একত্রে 100 টাকা, এবং C অপেক্ষা B এর 58 টাকা অধিক আছে। প্রত্যেকের কত টাকা আছে?
[E. B. S. E. 1948]

6. 9264 কে কোন্ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 17 এবং ভাগশেষ 373 হইবে? [C. U. 1929]

7. একটি ভাগে ভাজক ভাগফলের 25 গুণ এবং ভাগশেষের 15 গুণ। ভাগশেষ যদি 375 হয়, তবে ভাজ্য কত? [পা প্র. 1929]

8. কোন ভাগের অঙ্কের ভাগশেষ 119, ভাগফল 792 এবং ভাজক এই উভয়ের অন্তর অপেক্ষা 151 বেশী। ভাজ্য কত? [Civil Service]

9. ভাগফল ভাগশেষের 7 গুণ এবং ভাজক ভাগফলের 7 গুণ দেওয়া আছে এবং উহাদের সমষ্টি যদি 798 হয়, তবে ভাজ্য কত?

10. 5 অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা 223 দ্বারা বিভাজ্য?

11. 250 কে এরূপ দুইভাগে ভাগ কর যেন প্রথম অংশের তিন গুণ এবং দ্বিতীয় অংশের 5 গুণের সমষ্টি 950 হয়। [C. U. 1941]

12. পাচ অঙ্ক বিশিষ্ট কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা 324 দ্বারা বিভাজ্য?
[S. F. 1962]

13. একটি গুণে কতকগুলি অঙ্ক মুছিয়া গিয়াছে। গুণ্যটি 999 এবং গুণফলের শেষ তিনটি অঙ্ক 193, অন্য কিছু পড়া যায় না। সমগ্র গুণটি লিখিয়া দাও।
[এ. প. 1894]

14. ক ও খ কে 35 টাকা 5 পয়সা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন ক এর টাকার 2 গুণ, খ এর টাকার 3 গুণের সমান হয়।

15. কোন্ সংখ্যার সহিত 12 যোগ করিয়া, যোগফলের 5 গুণ হইতে 10 বিয়োগ করিয়া, অবশিষ্টকে 25 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল 3 হইবে?

নিয়ম: এইরূপ প্রশ্নে শেষের দিক হইতে আরম্ভ করিতে হয় এবং যোগ করিতে বলিলে বিয়োগ, বিয়োগ করিতে বলিলে যোগ, গুণ করিতে বলিলে ভাগ এবং ভাগ করিতে বলিলে গুণ করিতে হয়।

নির্ণেয় সংখ্যা $= [\{(3 \times 25) + 10\} \div 5 - 12] = [\{75 + 10\} \div 5 - 12] =$
$[85 \div 5 - 12] = 17 - 12 = 5.$

16. কোন্ সংখ্যাকে 15 দিয়া গুণ করিয়া গুণফলের সহিত 25 যোগ দিলে, যোগফল 4594 এবং 3054 এর বিয়োগফলের সমান হইবে?

17. 5টি 25 পয়সার মুদ্রার বদলে আমি এক পয়সার ও দুই পয়সায় মোট 85টি মুদ্রা পাইলাম। প্রত্যেক রকম মুদ্রা কয়টি পাইলাম ?

18. কোন সংখ্যাকে 105 এর উৎপাদক 3, 5 এবং 7 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 2, 4 এবং 6 ভাগশেষ থাকে। ঐ সংখ্যাকে 105 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ কত থাকিবে ?

উৎপাদকের সাহায্যে ভাগ অঙ্কে প্রকৃত ভাগশেষ বাহির করিবার নিয়ম :

প্রকৃত ভাগশেষ = ১ম ভাগশেষ + ২য় ভাগশেষ × ১ম ভাজক + তৃতীয় ভাগশেষ × ১ম ভাজক × ২য় ভাজক + ইত্যাদি।

আলোচ্য প্রশ্নে 2, 4, 6 যথাক্রমে ক্রমিক ভাগশেষ এবং 3, 5, 7 ক্রমিক ভাজক।

∴ নির্ণেয় প্রকৃত ভাগশেষ $= 2 + 4 \times 3 + 6 \times 5 \times 3 = 2 + 12 + 90 = 104$.

19. কোন সংখ্যাকে ক্রমান্বয়ে 5, 6 ও 7 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 2, 3 এবং 4 অবশিষ্ট থাকে। উহাকে 210 দ্বারা ভাগ করিলে অবশিষ্ট কত থাকিবে ?

20. কোন সংখ্যাকে 56 দিয়া ভাগ করিলে 29 ভাগশেষ থাকে। সেই সংখ্যাকে 8 দিয়া ভাগ করিলে কত ভাগশেষ থাকিবে ? [C. U. 1927]

*21. কোন ভাগের অঙ্কে ভাজ্য 37693, ভাগফল 52 এবং ভাগশেষ 52 অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 104 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। ভাজক কত ?

22. প্রত্যেক বালককে 25 পয়সা এবং প্রত্যেক বালিকাকে 50 পয়সা দিলে 150 জন বালক বালিকাকে দিতে 47 টাকা লাগিল। বালক ও বালিকার সংখ্যা নির্ণয় কর।

23. দুইটি সংখ্যাকে একই ভাজক দ্বারা ভাগ করায় যথাক্রমে 4375 এবং 2896 ভাগশেষ রহিল। কিন্তু সংখ্যাদ্বয়ের সমষ্টিকে ঐ একই ভাজক দ্বারা ভাগ করায় 2361 ভাগশেষ রহিল। ভাজক কত ?

24. এক ব্যক্তি বৎসরে টা. 400 হিসাবে 3 বৎসর খরচ করিয়া দেখিল যে তাহার কিছু ঋণ হইয়াছে। সে তখন খরচ কমাইয়া বৎসরে টা. 275 হিসাবে খরচ করিয়া 12 বৎসরে তাহার ঋণ পরিশোধ করিল। তাহার বৎসরে আয় কত ?

25. 1000 এর নিকটতম কোন্ সংখ্যা 1, 2, 3 অঙ্ক দ্বারা গঠিত বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য ?

26. এক ব্যক্তি ও তাহার পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বৎসর। 15 বৎসর পূর্বে তাঁহার বয়স পুত্রের বয়সের 4 গুণ ছিল। 10 বৎসর পরে তাহার বয়স কত হইবে ?

27. 8321 এর সহিত 5 অঙ্ক বিশিষ্ট কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল 4320 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ?

28. প্রতি কিলোগ্রাম 5 টাকা দরে আমি কিছু তৈল কিনিলাম। তৈলের দর প্রতি কিলোগ্রাম 3·50 পয়সা হইলে, ঐ টাকায় আরও 3 কিলোগ্রাম তৈল অধিক পাইতাম। কত টাকার তৈল আমি কিনিয়াছিলাম ?

29. কোন ডিম পরিবেশনকারীকে প্রতিটি ভাল ডিমের জন্য 25 পয়সা দাম দেওয়া হয়, কিন্তু প্রতিটি পচা ডিমের জন্য তাহাকে 5 পয়সা জরিমানা দিতে হয়। 100টি ডিম পরিবেশন করিয়া ডিমওয়ালা টা. 22·60 পয়সা পাইলে সে কয়টি পচা ডিম পরিবেশন করিয়াছিল ?

30. এক কারিকরকে 1968 সালের ফেব্রুয়ারী মাসে এই চুক্তিতে নিযুক্ত করা হইল যে সে যতদিন কাজ করিবে ততদিন 6·50 পয়সা করিয়া মজুরী পাইবে এবং যতদিন অনুপস্থিত থাকিবে ততদিন 1·25 পয়সা করিয়া জরিমানা দিবে। মাসান্তে সে সর্বশুদ্ধ 118·75 পয়সা পাইল। কতদিন সে কাজে অনুপস্থিত ছিল ?

31. q9 কে 4q দ্বারা গুণ করিলে গুণফল 1q18 হয় ; q = কত ? [B. C. S.]

B. গড় নির্ণয় (Average) পুনরালোচনা

1·1 এক জাতীয় কতিপয় রাশির সমষ্টিকে রাশিগুলির সংখ্যাদ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাহাকে রাশিগুলির গড় বলে।

আবার কতিপয় একজাতীয় রাশির গড়কে রাশিগুলির সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে রাশিগুলির সমষ্টি পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 1B

[1 হইতে 4 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. 4 পুত্র ও পিতার বয়স যথাক্রমে 8, 12, 16, 20 এবং 64 বৎসর হইলে উহাদের বয়সের গড় কত ?

4 পুত্র ও পিতা মোট 5 জনের বয়স $= 8 + 12 + 16 + 20 + 64 = 120$ বৎসর

$\therefore$ গড়ে প্রত্যেকের বয়স $= \frac{120}{5} = 24$ বৎসর।

2. একটি বালক বাৎসরিক পরীক্ষায় ইংরাজীতে 200 নম্বরের মধ্যে 120, গণিতে 100 নম্বরের মধ্যে 70 এবং সংস্কৃতে 100 নম্বরের মধ্যে 35 নম্বর পাইয়াছে। ইতিহাসে 100 নম্বরের মধ্যে কত নম্বর পাইলে তাহার সকল বিষয়ে শতকরা গড়ে 60 নম্বর পাওয়া হইবে ?

3. A ও Bএর প্রত্যেকের মাসিক আয়ের গড় 64 টাকা, B ও Cএর প্রত্যেকের মাসিক আয়ের গড় 50 টাকা এবং A ও C এর প্রত্যেকের মাসিক আয়ের গড় 70 টাকা হইলে প্রত্যেকের আয় কত ? [C. U. 1944]

4. এক ব্যক্তি প্রথম 4 দিন গড়ে 45 টাকা করিয়া এবং পরের 2 দিন গড়ে 35 টাকা করিয়া খরচ করিল। যদি তাহার প্রথম 7 দিনের খরচের গড় 42 টাকা হইয়া থাকে তবে সপ্তম দিন সে কত টাকা খরচ করিয়াছিল ?

5. 5 জন বালকের বয়সের গড় 9 বৎসর। ঐ 5 জন বালক ও তাহাদের পিতার বয়সের গড় 16 বৎসর। পিতার বয়স কত ?

6. কোন শ্রেণীতে 15 জন বালক আছে। তাহাদের বয়সের গড় 10 বৎসর। যদি 14, 15 এবং 19 বৎসর বয়স্ক 3 জন বালক ঐ শ্রেণীতে ভর্তি হয় তবে তাহাদের বয়সের গড় কত হইবে ?

7. কোন বিদ্যালয়ে 84 জন ছাত্রের মধ্যে 17 বৎসর বয়স্ক একজন ছাত্র চলিয়া যাওয়ায় এবং একজন নূতন ছাত্র আসিয়া তাহার স্থান পূরণ করায় তাহাদের বয়সের গড় 1 মাস করিয়া কমিয়া গেল। নূতন ছাত্রটির বয়স কত ? [C. U. 1943]

8. 10 টি সংখ্যার গড় 1·015102, প্রথম 6টি সংখ্যার গড় 1·01267 এবং শেষ পাঁচটি সংখ্যার গড় 1·01688 হইলে ষষ্ঠ সংখ্যাটি কত ? [U. P. 1927]

9. কোন শ্রেণীতে 40 জন ছাত্র আছে, তাহাদের বয়সের গড় 16 বৎসর। 17 বৎসরের একজন বালক চলিয়া যাওয়ায় এবং একজন নূতন ছাত্র ভর্তি হওয়ায় তাহাদের বয়সের গড় 15·875 বৎসর হইল। নূতন ছাত্রটির বয়স কত ?

10. কোন সপ্তাহে দৈনিক বৃষ্টিপাতের গড় ·25 সেমি.। রবিবার কোন বৃষ্টিপাত হয় নাই। সোমবার ·4 সেমি., মঙ্গলবারে ·02 সেমি., বুধবারে ·45 সেমি., বৃহস্পতিবারে ·28 সেমি., শুক্রবারে ·58 সেমি.। শনিবারের বৃষ্টিপাত কত ?

[W. B. S. F. 1959]

11. মাতা ও তিন পুত্রের বয়সের গড় অপেক্ষা পিতা ও তিন পুত্রের বয়সের গড় $1\frac{1}{2}$ বৎসর বেশি। পিতার বয়স 54 বৎসর হইলে মাতার বয়স কত ?

C. মৌলিক সংখ্যা, গ. সা. গু., ল. সা. গু. (পুনরালোচনা)
(Prime Number, Greatest Common Measure, Least Common Multiple.)

1·1. মৌলিক সংখ্যা ও কৃত্রিম সংখ্যা ঃ যে সমস্ত সংখ্যা 1 এবং সেই সংখ্যা ব্যতীত অন্য কোন সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য নহে তাহাদিগকে **মৌলিক সংখ্যা** (**Prime number**) বলে। যেমন 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 প্রভৃতি। বর্তমান কাল পর্যন্ত যে সমস্ত মৌলিক স'খ্যা নির্ণয় করা হইয়াছে তাহাদেব মধ্যে বৃহত্তমটি—

170, 141183, 460469, 231731, 687303, 715884, 105727.

যে সমস্ত সংখ্যা 1 ও সেই সংখ্যা ব্যতীত অন্য সংখ্যা দ্বারাও বিভাজ্য তাহাদিগকে **কৃত্রিম সংখ্যা** (**Composite number**) বলে। যেমন 4, 6, 8, 12 ইত্যাদি।

আবার, এমন কতকগুলি সংখ্যা আছে যেমন 15, 25, 49 ইত্যাদি যাহারা নিজেরা মৌলিক নয বটে কিন্তু পরস্পর মৌলিক, কারণ 15 ও 25 বা 49 উহাদের কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই। এইরূপ—যে সমস্ত সংখ্যার 1 ব্যতীত কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকে না, তাহাদিগকে **পরস্পর মৌলিক সংখ্যা** (Prime to one another) বলে।

1·2. মৌলিক সংখ্যা যদি কোন সংখ্যার গুণনীয়ক হয়, তবে ঐ গুণনীয়ককে **মৌলিক গুণনীয়ক** বা **মৌলিক উৎপাদক** (**Prime Factor**) বলে। যেমন $42 = 2 \times 3 \times 7$, এখানে 2, 3 ও 7 প্রত্যেকে 42-এর মৌলিক উৎপাদক।

1·3. বিভাজ্যতা নির্ণয়ের নিয়ম ঃ

1. যে সমস্ত সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক 0 অথবা যুগ্ম সংখ্যা, তাহারা 2 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 518, 9780 ইত্যাদি।

2. যে সমস্ত সংখ্যার অঙ্কগুলির সমষ্টি 3 দ্বারা বিভাজ্য, তাহারা 3 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 519, 17289 ইত্যাদি।

3. যে সমস্ত সংখ্যার শেষ দুইটি অঙ্ক 0 অথবা শেষ দুইটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যা 4 দ্বারা বিভাজ্য, তাহারা 4 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 71900, 51328 ইত্যাদি।

4. যে সমস্ত সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক 5 অথবা 0, তাহারা 5 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 1375, 2970 ইত্যাদি।

5. যে সমস্ত সংখ্যা 3 ও 2 দ্বারা বিভাজ্য তাহারা 6 দ্বারা বিভাজ্য।

6. যে সমস্ত সংখ্যার শেষ তিনটি অঙ্ক 0 অথবা শেষ তিনটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যা 8 দ্বারা বিভাজ্য, তাহারা 8 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 7000, 25128 ইত্যাদি।

7. যে সমস্ত সংখ্যার অঙ্ক সমষ্টি 9 দ্বারা বিভাজ্য, তাহারা 9 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 1548, 7083 ইত্যাদি।

8. যে সমস্ত সংখ্যার শেষ অঙ্ক 0, তাহারা 10 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 570 3410 ইত্যাদি।

9. যে সমস্ত সংখ্যার যুগ্মস্থানীয় অঙ্কসমষ্টি হইতে অযুগ্মস্থানীয় অঙ্কসমষ্টি বিয়োগ করিলে 0 হয় অথবা 11 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহারা 11 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 1887061, 29368086 ইত্যাদি।

10. যে সমস্ত সংখ্যা 3 ও 4 এই উভয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য, তাহারা 12 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 12936, 25260 ইত্যাদি।

11. যে সমস্ত সংখ্যা 3 ও 5 এই উভয় সংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য তাহারা 15 দ্বারা বিভাজ্য। যেমন, 23505, 60525 ইত্যাদি।

12. কোন সংখ্যার দক্ষিণ দিক হইতে আরম্ভ করিয়া প্রতি তিনটি অঙ্কের পর একটি করিয়া দাগ দাও। এইরূপে সংখ্যাটি কয়েকটি অংশে বিভক্ত হইবে। এখন দক্ষিণ দিক হইতে আরম্ভ করিয়া অযুগ্মস্থানীয় অংশগুলির যোগফল এবং যুগ্মস্থানীয় অংশগুলির যোগফলের অন্তর যদি 0 হয় অথবা যদি ঐ অন্তর 7, 11 অথবা 13 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তবে সমগ্র সংখ্যাটি 7, 11 কিম্বা 13 দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

13. যদি কোন সংখ্যার শেষ দুইটি অঙ্ক 0 থাকে অথবা ঐ শেষ দুইটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যাটি 25 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে ঐ সমগ্র সংখ্যা 25 দ্বারা বিভাজ্য।

14. যে সংখ্যার শেষ দুইটি অঙ্ক 0, তাহা 100 দ্বারা বিভাজ্য।

15. যে সংখ্যার শেষ তিনটি অঙ্ক 0, তাহা 1000 দ্বারা বিভাজ্য।

16. যদি কোন সংখ্যার শেষ তিনটি অঙ্ক 0 হয় অথবা ঐ শেষ তিনটি অঙ্ক দ্বারা গঠিত সংখ্যা 125 দ্বারা বিভাজ্য হয়, তাহা হইলে সেই সমগ্র সংখ্যা 125 দ্বারা বিভাজ্য।

1·4. **মৌলিক সংখ্যা নির্ণয় করিবার নিয়ম :** প্রদত্ত সংখ্যা 2, 3, 5, 7, 11, 13 ইত্যাদি মৌলিক সংখ্যাগুলি দ্বারা ধারাবাহিকভাবে ভাগ কর। এইরূপ ভাগ করিতে করিতে যদি ভাগফল ভাজক অপেক্ষা ছোট হয়, অথচ প্রত্যেক বারেই কিছু-না-কিছু অবশিষ্ট থাকিয়া যায়, তবে সংখ্যাটি মৌলিক।

1·5. গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গ. সা. গু.ঃ (Greatest Common Measure, G. C. M.)

যে সংখ্যা দুই বা ততোধিক সংখ্যার গুণনীয়ক তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির **সাধারণ গুণনীয়ক** (**Common Measure** বা **Common Factor**) বলে। দুই বা ততোধিক সংখ্যার সাধারণ গুণনীয়কগুলির মধ্যে যেটি সর্বাপেক্ষা বড় (গরিষ্ঠ) তাহাকে সংখ্যাগুলির **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** বা সংক্ষেপে গ. সা. গু. বলে।

1·6. গ. সা. গু. নির্ণয় দুই প্রকারে করিতে পারা যায়ঃ

(a) উৎপাদকের সাহায্যে, (b) ভাগের সাহায্যে।

(a) উৎপাদকের সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিয়ম :

সংখ্যাগুলির মৌলিক গুণনীয়কগুলি নির্ণয় করিয়া যতগুলি সাধারণ গুণনীয়ক পাওয়া যাইবে তাহাদের ধারাবাহিক গুণফলই সংখ্যাগুলির গ. সা. গু. হইবে।

(b) ভাগের সাহায্যে গ. সা. গু.ঃ

(i) দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিয়ম :

ছোট সংখ্যার দ্বারা বড় সংখ্যাকে ভাগ কর। যে ভাগশেষ থাকিবে তাহা দ্বারা ভাজককে ভাগ কর, যাহা অবশিষ্ট থাকিবে সেই ভাগশেষ দ্বারা প্রথম ভাগশেষকে ভাগ কর। এইরূপে যে পর্যন্ত ভাগ মিলিয়া না যাইবে ততক্ষণ ভাগ করিতে থাকিবে। যেখানে ভাগ মিলিয়া যাইবে সেই সর্বশেষ ভাজকই নির্ণেয় গ. সা. গু. হইবে।

(ii) তিন বা ততোধিক সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিয়ম :

প্রথমে সর্বাপেক্ষা ছোট সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু. বাহির কর; পরে সেই গ. সা. গু. ও তৃতীয় সংখ্যার গ. সা. গু. বাহির কর। এইরূপে সর্বশেষ যে গ. সা. গু. পাওয়া যাইবে তাহাই নির্ণেয় গ. সা. গু.।

1·7. মিশ্র রাশির গ. সা. গু. নির্ণয়ের নিয়ম :

মিশ্র রাশিগুলিকে সর্বনিম্ন শ্রেণীর এককে পরিবর্তিত করিয়া তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়।

1·8. লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা ল. সা. গু. বা (Lowest Common Multiple, L. C. M.)

যে সংখ্যা দুই বা ততোধিক সংখ্যার গুণিতক তাহাকে ঐ সংখ্যাগুলির **সাধারণ**

গুণিতক (Common Multiple) বলে। দুই বা ততোধিক সংখ্যার সাধারণ গুণিতকগুলির মধ্যে যেটি সর্বাপেক্ষা ছোট (লঘিষ্ঠ) তাহাকে সংখ্যাগুলির লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক, সংক্ষেপে ল. সা. গু. বলে।

1·9. ল. সা গু. নির্ণয়ের বিভিন্ন উপায় ঃ

(a) উৎপাদকের সাহায্যে ঃ

নিয়ম ঃ প্রথমে রাশিগুলির মৌলিক উৎপাদক বাহির কর; পরে রাশিগুলির সাধারণ মৌলিক উৎপাদকগুলি ও প্রত্যেক রাশি হইতে সাধারণ উৎপাদকগুলি বাছিয়া লইবার পর প্রত্যেক রাশিতে যে মৌলিক উৎপাদকগুলি থাকিয়া যায় তাহাদের ধারাবাহিক গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

রাশিগুলি পরস্পর মৌলিক হইলে তাহাদের ধারাবাহিক গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

(b) দুইটি সংখ্যা ও তাহাদের গ. সা গু. দেওয়া থাকিলে ল. সা গু. নির্ণয় ঃ

∵ দুইটি সংখ্যার গুণফল = উহাদের গ. সা. গু. × উহাদের ল. সা. গু.

∴ সুতরাং ল. সা. গু. = $\dfrac{\text{দুইটি সংখ্যার গুণফল}}{\text{উহাদের গ সা গু}}$

(c) ল. সা গু. নির্ণয় করিবার সাধারণ নিয়ম ঃ

(i) যে সংখ্যাগুলির ল সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে তাহাদের প্রত্যেকটির পর একটি করিয়া কমা দিয়া সংখ্যাগুলিকে এক সারিতে লিখ।

(ii) সংখ্যাগুলির অন্ততঃ দুইটিরও যদি কোনও সাধারণ মৌলিক উৎপাদক থাকে, তবে (উৎপাদকের সাহায্যে ভাগের নিয়মানুসারে) সংখ্যাগুলিকে সেই উৎপাদক দ্বারা ভাগ কর এবং ভাগফল ও অবিভাজিত সংখ্যাগুলি ঠিক নীচে নীচে বসাও।

(iii) যতক্ষণ না নীচের লাইনের সংখ্যাগুলি পরস্পর মৌলিক হইবে ততক্ষণ ভাগ করিয়া যাও।

(iv) যখন সর্বনিম্নের লাইনের সংখ্যাগুলি পরস্পর মৌলিক হইবে তখন ঐ সমস্ত সংখ্যাগুলির ও ভাজক সংখ্যাগুলির ধারাবাহিক গুণফলই নির্ণেয় ল. সা. গু. হইবে।

প্রশ্নমালা 1C

[1 হইতে 10 এবং 20 হইতে 31 ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. এমন একটি গরিষ্ঠ সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার দ্বারা 40 ও 146 কে ভাগ করিলে যথাক্রমে 5 ও 6 অবশিষ্ট থাকিবে।

$40-5=35$, এবং $146-6=140$.

সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু.ই নির্ণেয় সংখ্যা ∴ নির্ণেয় সংখ্যা $=35$.

2. এমন একটি লঘিষ্ঠ সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে 12, 14, 18 ও 21 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতিবারে 4 ভাগশেষ থাকিবে।

12, 14, 18, 21 দ্বারা বিভাজ্য লঘিষ্ঠ সংখ্যা উহাদের ল. সা. গু. $=252$.

কিন্তু ∵ 4 ভাগশেষ থাকিবে ∴ নির্ণেয় সংখ্যা $=252+4=256$.

3. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 1637 এবং 1320 কে ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 17 আর 15 হইবে? [C. U. 1951]

4. একটি ঝুড়িতে 1600 হইতে 1700 এর মধ্যে আম আছে। যদি ঐ ঝুড়ি হইতে 5টি আম তুলিয়া লওয়া যায় তাহা হইলে অবশিষ্ট আম 4, 5, 6, 7, কিংবা 8 জন বালকের মধ্যে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া যায়। আমের সংখ্যা কত?

5. পাঁচ অঙ্কের কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 4, 6, 10 এবং 15 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেকবারই 3 ভাগশেষ থাকিবে? [C. U 1944]

6. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 84 এবং ল. সা. গু. 244188, একটি সংখ্যা 1428 হইলে অপরটি কত? [A. U. 1915].

সঙ্কেত ঃ সংখ্যা দুইটির গুণফল $=$ সংখ্যা দুইটির গ. সা. গু. $\times$ সংখ্যা দুইটির ল. সা. গু.

7. কোন্ গরিষ্ঠ সংখ্যা দ্বারা 1625, 2281 এবং 4218 কে ভাগ করিলে যথাক্রমে 8, 4 এবং 5 অবশিষ্ট থাকিবে? [C. U. 1930]

8. এমন একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাকে 7, 9, 14, 21 ও 35 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেক স্থলে 2 অবশিষ্ট থাকিবে কিন্তু সংখ্যাটি 11 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। [C. U. 1942]

7, 9, 14, 21, 35 দ্বারা ভাগ করিলে বিভাজ্য হইবে সংখ্যাটি উহাদের ল. সা. গু. $=630$. 630কে 11 দ্বারা ভাগ করিলে 3 ভাগশেষ থাকে, আর নির্ণেয় সংখ্যাকে 7, 9 ইত্যাদি দ্বারা ভাগ করিলে প্রতিবারে 2 ভাগশেষ থাকিবে, কিন্তু 11 দ্বারা ভাগ করিলে মিলিয়া যাইবে।

∴ 3 এর যে গুণিতকের সহিত 2 যোগ করিলে 11 হয়, 630 এর সেই গুণিতকের সহিত 2 যোগ করিয়া নির্ণেয় সংখ্যা পাওয়া যায়।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যা} = 630 \times \frac{11-2}{3} + 2 = 630 \times 3 + 2 = 1892$$

9. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 1212 এবং তাহাদের গ সা গু. 101, কয় জোড়া সংখ্যা গঠন করা যায়? সংখ্যাগুলি বাহির কর। [C. U. 1945]

সংখ্যা দুইটির গ সা. গু. 101 বলিয়া উহারা 101 দ্বারা বিভাজ্য, সুতরাং উহাদের যোগফলও 101 দ্বারা বিভাজ্য, 1212 ÷ 101 = 12 অতএব এখানে বুঝিতে হইবে যে সংখ্যা দুইটিকে পৃথকভাবে 101 দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগফল হইবে তাহাদের সমষ্টি 12.

কিন্তু $12 = 1+11 = 2+10 = 3+9 = 4+8 = 5+7 = 6+6$.

এই জোড়াগুলির মধ্যে যে জোড়াগুলির সংখ্যাদ্বয় পরস্পর মৌলিক কেবল সেইগুলিই নির্ণেয় জোড়া সংখ্যা হইতে পারে। এখানে 1, 11 এবং 5, 7 পরস্পর মৌলিক। সুতরাং দুই জোড়া সংখ্যা হইতে পারে।

$$\text{এক জোড়া সংখ্যা} = \left.\begin{matrix} 101 \times 1 = 101 \\ 101 \times 11 = 1111 \end{matrix}\right\}$$

$$\text{অপর জোড়া ,,} = \left.\begin{matrix} 101 \times 5 = 505 \\ 101 \times 7 = 707 \end{matrix}\right\}$$

10. 1904কে এইরূপ দুই অংশে ভাগ কর যেন উহাদের গ সা গু. এবং ল. সা. গু. যথাক্রমে 28 এবং 32340 হয়। [Oxford]

গ সা. গু. × ল সা. গু. = সংখ্যা দুইটির গুণফল। সংখ্যা দুইটির মধ্যে 28 × 32340 বা 2×2×7×2×2×3×5×7×7×11 আছে। কিন্তু ইহাদের সমষ্টি 1904 বা 2×2×2×2×7×17। সমষ্টিকে গ. সা গু. দ্বারা ভাগ করিলে 68 হয়। ল সা গু.কে গ সা গু. দ্বারা ভাগ করিলে 3×5×7×11 থাকে এবং ইহাদের সমষ্টি অবশ্যই 68 হইতে হইবে। ∵ $3\times11+5\times7 = 68$.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যা} = \left.\begin{matrix} 28 \times 33 = 924 \\ 28 \times 35 = 980 \end{matrix}\right\}$$

11. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 140 এবং উহাদের ল সা. গু. 4095 সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

12. চার অঙ্কের এরূপ একটি বৃহত্তম সংখ্যা এবং পাঁচ অঙ্কের এরূপ একটী ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বাহির কর যাহাদের গ. সা. গু. 248 হইবে। [C. U. 1944]

13. 8321 এর সহিত পাঁচ অঙ্কের কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল 15, 20, 24, 27 এবং 32 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [C. U. 1906]

14. 23759143 হইতে ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম কোন্ সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 24, 35, 91, 130 এবং 150 দ্বারা বিভাজ্য হইবে ? [C. U. 1896]

15. গরিষ্ঠ কোন্ সংখ্যা দ্বারা 35, 127, 175কে ভাগ করিলে প্রত্যেক স্থলে একই অবশিষ্ট থাকিবে ? [P. U. 1929]

16. সাতটি ঘণ্টা প্রথমে একসঙ্গে বাজিয়া পরে প্রত্যেকে যথাক্রমে 2, 3, 5, 15, 21, 65 এবং 77 সেকেণ্ড অন্তর বাজিতে লাগিল। কতক্ষণ পরে ঘণ্টাগুলি পুনরায় একত্রে বাজিবে এবং একত্র বাজিবার পূর্বে কোন্ ঘণ্টা কতবার বাজিবে ?

17. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 2, 3, 4, 5, 6 ও 7 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতি-বারেই 1 ভাগশেষ থাকে, কিন্তু 11 দ্বারা ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না ? [D. B. 1953]

18. 12000 ও 15000 এর মধ্যবর্তী কোন্ সংখ্যাকে 15, 25, 36 এবং 48 দ্বারা ভাগ করিলে প্রতিবারই 3 ভাগশেষ থাকিবে ? [G. U. 1955]

19. দুইটি রাশির গ. সা. গু. দীর্ঘ ভাগের সাহায্যে নির্ণয় করিতে যাইয়া দেখা গেল যে, শেষ ভাজকটি 21 এবং ভাগফলগুলি প্রথম ধাপ হইতে যথাক্রমে 5, 3 এবং 2. রাশি দুইটি নির্ণয় কর। [G. U. 1955]

20. একটি দীর্ঘ ভাগের ভাজ্য 64329 এবং ক্রমিক ভাগশেষ যথাক্রমে 175, 114 এবং 213 ; ভাগফল কত ? [S. F. 1954]

21. চারি অঙ্ক বিশিষ্ট দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 187 এবং ল. সা. গু. 21879 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [S. F. 1954]

22. তিনটি সংখ্যার ল. সা. গু. 945 এবং প্রত্যেক জোড়ার গ. সা গু. 9. সংখ্যা তিনটি নির্ণয় কর।

23. চারিটি সংখ্যার মধ্যে একটি 343, এবং অপর তিনটির ল. সা. গু. 4032 ; সংখ্যা চারিটির ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

24. একটি বালককে 12, 15 এবং অপর একটি তৃতীয় সংখ্যার ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে বলা হইল, কিন্তু সে ভুল করিয়া 12-এর পরিবর্তে 21 লিখিল ; তথাপি উত্তর নির্ভুল হইল। তৃতীয় সংখ্যাটি 40 এর অধিক কিন্তু 60 এর অনধিক হইলে, সেই সংখ্যাটি কত ?

25. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 57, 171, 209 এবং 900 দ্বারা ভাগ করিলে প্রত্যেকবার 21 ভাগশেষ থাকে ? [C. U. 1947]

26. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 48, 64, 90 এবং 120 দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে 38, 54, 80 এবং 110 থাকিবে ? [C. U. 1939]

$48-38=10$, $64-54=10$, $90-80=10$, $120-110=10$. ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে প্রত্যেক ভাগশেষ ভাজক অপেক্ষা 10 কম। ∴ নির্ণেয় রাশির সহিত 10 যোগ করিলে যোগফল 48, 64, 90 এবং 120 দ্বারা বিভাজ্য হইবে। 48, 64, 90, 120 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম সংখ্যাটি উহাদের ল. সা. গু.= 2880. ∴ নির্ণেয় সংখ্যা $=2880-10=2870$.

27. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 24, 30 এবং 36 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 21, 27 এবং 33 ভাগশেষ থাকে ?

28. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 35, 45 এবং 55 দ্বারা ভাগ করিলে যথাক্রমে 25, 35 এবং 45 ভাগশেষ থাকে ?

29. 30-কে এরূপ দুইভাগে ভাগ কর যেন অংশদ্বয়ের গ. সা. গু. 2 এবং ল. সা. গু. 112 হয়।

30. তিন অঙ্কবিশিষ্ট কোন্ সংখ্যা দ্বারা 7653 এবং 11282 কে ভাগ করিলে একই ভাগশেষ থাকিবে ?

7653 এবং 11282 উভয়ের মধ্যে একই ভাগশেষ থাকায় উহাদের বিয়োগফল $11282-7653=3629$ নির্ণেয় সংখ্যা হইতে পারে।—

কিন্তু এখানে নির্ণেয় সংখ্যাটি তিন অঙ্ক বিশিষ্ট হইতে হইবে।

∵ $3629=19\times191$. ∴ 191 নির্ণেয় সংখ্যা।

31. কোন গাড়ীর সম্মুখ ও পশ্চাতের চাকার পরিধি 119 সেমি, এবং 153 সেমি.; গাড়ীখানি কমপক্ষে কতদূর গেলে চাকা দুইখানির প্রত্যেকে সম্পূর্ণবার ঘুরিবে ? [C. U. 1917]

32. কোন একটি রেল ইঞ্জিনে 3 মিটার 6 ডেসিমিটার, 5 মি. 1 ডেসিমি., এবং 2 মি. 7 ডেসিমি. পরিধি বিশিষ্ট তিন প্রকার চাকা আছে। কমপক্ষে ইঞ্জিনখানি কত পথ চলিলে ঐ তিন প্রকার চাকাই পূর্ণ সংখ্যকবার ঘুরিবে ?

33. সমান দরে টা. 1·54 পয়সা ও টা. 3·22 পয়সা দিয়া কয়েকটি কলম কেনা হইল। প্রত্যেকটি কলমের মূল্য অধিকপক্ষে কত হইতে পারে ?

টা. 1·54 পয়সায় কয়েকটি অখণ্ড সংখ্যক এবং টা. 3·22 পয়সায় কয়েকটি অখণ্ড সংখ্যক কলম পাওয়া যায়। ∴ অধিকপক্ষে প্রত্যেক কলমের দাম উহাদের গ. সা. গু.=14 পয়সা। ∴ প্রত্যেক কলমের দাম=14 পয়সা।

34. এক বণিক তিন প্রকার মদ্য আমদানি করিয়াছে। প্রথম প্রকারের 403 গ্যালন, দ্বিতীয় প্রকারের 434 গ্যালন এবং তৃতীয় প্রকারের 465 গ্যালন। কমপক্ষে একই আকারের কতগুলি পাত্র থাকিলে মিশ্রণ না করিয়া সমুদয় মদ্য রাখা যায়? [A. U. 1906]

35. সর্বাপেক্ষা অধিক কতসংখ্যক বালকের মধ্যে 903 লিচু, 111-টি আঙুর, 363টি আম সমান সংখ্যায় ভাগ করিয়া দিতে প্রত্যেক প্রকারের অন্ততঃ 6টা ফলের অভাব হয়?

36. এক ব্যক্তি টা. 3·72 পয়সা দিয়া কতকগুলি আম ক্রয় করিল এবং কোনরূপ লাভ না রাখিয়া টা. 2·52 পয়সা দিয়া তাহা হইতে কতকগুলি আম বিক্রয় করিল।

প্রমাণ কর যে, তাহার নিকট তখনও অন্ততঃ আর 10টি আম রহিয়াছে।

37. টা. 10·80 পয়সা এবং টা. 14·04 পয়সা এই উভয় মূল্য দ্বারাই পূর্ণসংখ্যক সের লবণ ক্রয় করা যায়। প্রতি সের লবণের মূল্য 10 পয়সা ও 15 পয়সার মধ্যে হইলে একসের লবণের মূল্য কত?

38. একব্যক্তি টা. 8·16 পয়সা মূল্যে কতকগুলি আম কিনিয়া তাহা হইতে টা. 6·42 পয়সা মূল্যে কতকগুলি আম বিক্রয় করিল। ইহাতে যদি তাহার লাভ বা লোকসান কিছুই না হইয়া থাকে, তাহা হইলে কমপক্ষে এখনও তাহার কাছে কয়টি আম আছে এবং একটি আমের অধিকপক্ষে কত দাম হইতে পারে?

39. একব্যক্তি দৈনিক মজুরিতে কয়েকদিন কাজ করিবার জন্য মোট টা. 19·80 পয়সার চুক্তিতে নিযুক্ত হইল, কিন্তু সে কিছুদিন অনুপস্থিত থাকায় মোট টা. 17·16 পয়সা পাইল। প্রমাণ কর যে তাহার দৈনিক মজুরী টা. 1·32 পয়সার অধিক হইতে পারে না।

নির্দিষ্ট সংখ্যক দিনের মজুরী টা. 19·80 পয়সা এবং টা. 17·16 পয়সা।

∴ উভয়ের মধ্যে গরিষ্ঠ সংখ্যাই উহার মজুরী। ∴ টা. 19·80 পয়সা এবং টা. 17·16 পয়সার গ. সা. গু.ই নির্ণেয় মজুরী = টা 1·32 পয়সা।

40. এক ব্যক্তি দৈনিক মজুরীতে মোট টা. 29·25 পয়সায় কিছু দিনের জন্য নিযুক্ত হইল, কিন্তু কয়েকদিন অনুপস্থিত থাকায় সে মোট টা. 22·50 পয়সা পাইল। অধিক পক্ষে তাহার দৈনিক মজুরী কত হইতে পারে?

41. একই দরে এক ব্যক্তি টা. 21·78 পয়সা ও টা. 41·58 পয়সার মূল্যে কতকগুলি করিয়া আম কিনিল। প্রত্যেক আমের মূল্য 24 পয়সার কম নহে এবং 36 পয়সার বেশী নহে। প্রতি আমের মূল্য কত? এবং সে দুই দফায় মোট কতগুলি আম কিনিয়াছিল?

42. 50 এবং 100-র মধ্যে কোন্ কোন্ দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 16, তাহা নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 1965]

43. এমন একটি বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহা দ্বারা 1740 এবং 58520কে ভাগ করিলে যথাক্রমে 11 এবং 7 ভাগশেষ থাকিবে। [W. B. S. F. Comp. 1966]

2

সরল ভগ্নাংশ, জটিল ভগ্নাংশ, দশমিক:ভগ্নাংশ ও আবৃত্ত দশমিক

(Simple fractions, Vulgar fractions, Decimal fractions including Recurring Decimals)

2·1. পূর্ণ সংখ্যা বা অখণ্ড সংখ্যা (Integer or Whole number) : যে কোন এককে এক বা ততোধিক বার লইয়া যোগ করিলে যে সকল সংখ্যা উৎপন্ন হয়, তাহাদিগকে **পূর্ণ সংখ্যা** বা **অখণ্ড সংখ্যা** বলে। যেমন, 2, 8, 12 ইত্যাদি।

2·2. ভগ্নাংশ (Fraction) : যদি কোন একককে কতিপয় সমান অংশে ভাগ করিয়া ঐ অংশ সমূহের এক বা একাধিক অংশকে একটি রাশির দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহাকে ভগ্নাংশ বলে। যেমন, $\frac{9}{13}$, $\frac{16}{43}$ ইত্যাদি। ভগ্নাংশের **রেখার নীচের সংখ্যাটিকে হর** (Denominator) এবং **উপরের সংখ্যাটিকে লব** (Numerator) বলে। যেমন, $\frac{9}{13}$ ভগ্নাংশের হর 13 এবং লব 9।

2·3. যে ভগ্নাংশের হর অপেক্ষা লব ছোট তাহাকে **প্রকৃত ভগ্নাংশ** (**Proper Fraction**) বলে। যেমন $\frac{4}{15}$, $\frac{8}{27}$ ইত্যাদি। যে ভগ্নাংশের লব অপেক্ষা হর ছোট তাহাকে **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ** (**Improper Fraction**) বলে। যেমন, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$ ইত্যাদি।

যে ভগ্নাংশের পূর্ণ সংখ্যা ও ভগ্নাংশ একক মিশ্রিত থাকে তাহাকে **মিশ্র ভগ্নাংশ** (**Mixed fraction**) বলে। যেমন, $3\frac{5}{13}$, $4\frac{7}{29}$ ইত্যাদি।

2·4. কোন ভগ্নাংশের লব ও হর উভয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না। যেমন, $\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{12}{16}$ অথবা $\frac{12}{16}=\frac{12\div4}{16\div4}=\frac{3}{4}$।

ভগ্নাংশের লব ও হরের সাধারণ গুণনীয়ক দ্বারা লব ও হরকে ভাগ করিলে ভগ্নাংশটি লঘিষ্ঠ আকারে পরিবর্তিত হয়। যেমন, $\frac{60}{80}=\frac{\not2\times\not2\times3\times\not5}{\not2\times\not2\times2\times2\times\not5}=\frac{3}{4}$.

ভগ্নাংশের লব ও হর খুব বড় হইলে প্রথমে উভয়ের গ. সা. গু. বাহির করিয়া ঐ গ. সা. গু. দ্বারা উভয়কে ভাগ করিলে ভগ্নাংশটি লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত হয়।

2·5. (a) অপ্রকৃত ভগ্নাংশকে মিশ্র ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ

নিয়ম ঃ লবকে হর দিয়া ভাগ কর ; ভাগফলকে পূর্ণ সংখ্যা, ভাগশেষকে লব এবং প্রদত্ত হরকে হর ধর।

যেমন, $\frac{31}{4}$ একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

$$4)\,31\,(7 \quad \underline{28} \quad 3 \qquad \therefore \quad \frac{31}{4}=7\frac{3}{4}.$$

(b) মিশ্র ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ

নিয়ম ঃ পূর্ণ সংখ্যাকে হর দ্বারা গুণ করিয়া গুণফলের সহিত প্রদত্ত লব যোগ কর। সেই যোগফলকে লব এবং প্রদত্ত হরকে হর ধর, অর্থাৎ

$$\frac{(\text{পূর্ণসংখ্যা} \times \text{হর})+\text{লব}}{\text{হর}},$$

যেমন, $5\frac{1}{3}=\frac{(5\times3)+1}{3}=\frac{16}{3}.$

(c) ভগ্নাংশকে নির্দিষ্ট হর বা লববিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ

নিয়ম ঃ ভগ্নাংশের হর অথবা লবকে যে নির্দিষ্ট সংখ্যায় পরিণত করিতে হইবে, সেই সংখ্যাকে প্রদত্ত হর অথবা লব দ্বারা ভাগ কর। পরে সেই ভাগফল দ্বারা লব ও হর উভয়কে গুণ কর।

যেমন, $\frac{5}{7}$ ভগ্নাংশের হর 7-কে 63 তে পরিণত করিতে হইলে $(63\div7)$ বা 9 দ্বারা 5 ও 7 উভয়কে গুণ কর।

$$\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\times\frac{9}{9}=\frac{45}{63}.$$

(d) ভিন্ন ভিন্ন হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর অথবা লববিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ

নিয়ম ঃ কতকগুলি ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হইলে প্রথমে হরগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া উহাকে যথাক্রমে প্রত্যেকটির হর দ্বারা ভাগ কর। যে হর দ্বারা ভাগ করিবে সেই ভগ্নাংশের লব ও হরকে ভাগফল দ্বারা গুণ কর।

যেমন, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$-কে সাধারণ হরবিশিষ্ট করিতে হইলে প্রথমে 3 ও 4-এর ল. সা. গু. 12 হইল। 12-কে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল 4 হইল, 4 দ্বারা $\frac{2}{3}$

ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করিয়া $\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12}$ পাইবে। সেইরূপ ল. সা. গু. 12-কে দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $\frac{3}{4}$-এর হর 4 দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফল $(12\div4)=3$ দ্বারা $\frac{3}{4}$ ভগ্নাংশের লব ও হরকে গুণ করিয়া $\frac{3}{4}=\frac{3\times3}{4\times3}=\frac{9}{12}$ পাইবে। এইরূপে ভগ্নাংশ দুইটি সাধারণ হরবিশিষ্ট হইল। সাধারণ লববিশিষ্ট করিতে হইলে হরের স্থলে লবগুলির ল. সা. গু. বাহির করিয়া সাধারণ হরবিশিষ্ট করিবার নিয়ম অনুযায়ী সমাধান কর।

(e) বিভিন্ন ভগ্নাংশের মানের তুলনা ঃ

বিভিন্ন হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশসমূহের মধ্যে কোন্‌টি বড়, কোন্‌টি ছোট নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হইবে ; এই সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশগুলির মধ্যে যেটির লব বৃহত্তম সেইটি সর্বাপেক্ষা বড় এবং যেটির লব ক্ষুদ্রতম সেইটি সর্বাপেক্ষা ছোট।

যেমন, $\frac{4}{5}$ ও $\frac{5}{8}$ ভগ্নাংশদ্বয়কে সাধারণ হরবিবিশিষ্ট করিলে উহারা যথাক্রমে $\frac{32}{40}$ ও $\frac{25}{40}$ হয়।

$\therefore$ $\frac{32}{40}$ অর্থাৎ ভগ্নাংশ $\frac{4}{5}$ বড় এবং $\frac{25}{40}$ অর্থাৎ $\frac{5}{8}$ ভগ্নাংশ ছোট।

2·6. (a) সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশসমূহের যোগ ঃ

ভগ্নাংশগুলি সাধারণ হরবিশিষ্ট হইলে লবগুলি যোগ করিয়া যোগফলকে লব ধর এবং প্রদত্ত হরটিকে হর ধর।

যেমন, $\frac{3}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=\frac{3+5+6}{7}=\frac{14}{7}=2.$

(b) বিভিন্ন হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশসমূহের যোগ ঃ

প্রথমে ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিবার নিয়মানুসারে উহাদিগকে সাধারণ হরবিশিষ্ট কর। পরে লবগুলি যোগ করিয়া সেই যোগফলকে লব এবং সাধারণ হরকে হর ধর।

যেমন, $\frac{5}{12}+\frac{7}{16}+\frac{11}{24}=\frac{20}{48}+\frac{21}{48}+\frac{22}{48}=\frac{20+21+22}{48}$

$$=\frac{63}{48}=\frac{21}{16}=1\frac{5}{16}.$$

2·7. ভগ্নাংশের বিয়োগ :

ভগ্নাংশের বিয়োগ প্রণালী ঠিক যোগ প্রণালীর ন্যায়। এখানে ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট করিয়া লব দুইটির বিয়োগ করিতে হয়।

যেমন, $\frac{7}{12}-\frac{5}{16}=\frac{28}{48}-\frac{15}{48}=\frac{28-15}{48}=\frac{13}{48}$.

2·8. ভগ্নাংশের গুণন :

(a) পূর্ণসংখ্যা দ্বারা :

কোন ভগ্নাংশকে পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা গুণ করিতে হইলে ভগ্নাংশটির লবকে গুণক সংখ্যা দ্বারা গুণ করিতে হয় এবং হরকে পূর্বের ন্যায় হর রাখিতে হয়।

যেমন $7\frac{9}{13}\times 11=\frac{100}{13}\times 11=\frac{1100}{13}=84\frac{8}{13}$.

[ভগ্নাংশটি মিশ্র থাকিলে প্রথমে তাহাকে অপ্রকৃত করিয়া পরে গুণ করিতে হয়।]

(b) ভগ্নাংশকে ভগ্নাংশ দ্বারা গুণন :

একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা গুণ করিতে হইলে লবকে লব দ্বারা এবং হরকে হর দ্বারা গুণ করিতে হয় এবং লবের গুণফলকে লব এবং হরের গুণফলকে হর ধরিতে হয়।

যেমন, $\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}=\frac{3\times 5}{4\times 8}=\frac{15}{32}$.

2·9. $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$ লেখা থাকিলে $\frac{3}{4}$ কে $\frac{4}{5}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়। আবার $\frac{3}{4}$ এর $\frac{4}{5}$ লেখা থাকিলেও $\frac{3}{4}$ কে $\frac{4}{5}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়। তবে "$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$" এবং "$\frac{3}{4}$ এর $\frac{4}{5}$" এই দুইটির মধ্যে পার্থক্য এই যে, $\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}$ লেখা থাকিলে $\frac{3}{4}$ ও $\frac{4}{5}$ কে দুইটি পৃথক পৃথক ভগ্নাংশ মনে করা হয়, কিন্তু "$\frac{3}{4}$ এর $\frac{4}{5}$" লেখা থাকিলে উহাকে একটি ভগ্নাংশ মনে করিতে হয় এবং 'এর' এর অর্থাৎ গুণের কাজ সর্বপ্রথমে করিয়া পরে অন্যান্য কাজ করিতে হয়। এইজন্য "$\frac{3}{4}$ এর $\frac{4}{5}$" এইরূপ ভগ্নাংশকে গর্ভিত ভগ্নাংশ (Compound Fraction) বলা হয়।

2·10. ভগ্নাংশের ভাগ :

কোন ভগ্নাংশের লবকে হর এবং হরকে লব করিলে যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হয়, তাহাদের উভয়কে পরস্পরের অন্যোন্যক (Reciprocal) বলে। যেমন, $\frac{5}{4}$ ও $\frac{4}{5}$ পরস্পর অন্যোন্যক।

(a) ভগ্নাংশকে পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা ভাগ ঃ

কোন ভগ্নাংশকে কোন পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিতে হইলে ভাজক সংখ্যার অন্যোন্যক দ্বারা ভাজ্য ভগ্নাংশটিকে গুণ করিতে হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ ভাজক ও ভাজ্যের লবের মধ্যে সাধারণ উৎপাদক থাকিলে সেইগুলি পরিত্যাগ করিবে।

যেমন, $\frac{33}{48} \div 77 = \frac{33}{48} \times \frac{1}{77} = \frac{1}{112}$.

(b) ভগ্নাংশকে ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ ঃ

নিয়ম ঃ ভাজ্যকে ভাজকের অন্যোন্যক দ্বারা গুণ করিলে নির্ণেয় ভাগফল পাওয়া যাইবে।

যেমন, $5\frac{7}{16} \div 4\frac{5}{6} = \frac{87}{16} \div \frac{29}{6} = \frac{87}{16} \times \frac{6}{29} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$.

2·11. ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন ঃ

ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন করিতে হইলে BODMAS কথাটি মনে রাখিবে। 'B' অর্থাৎ Bracket (বন্ধনী), 'O' অর্থাৎ Of (এর), 'D' অর্থাৎ Division (ভাগ), 'M' অর্থাৎ Multiplication (গুণ), 'A' অর্থাৎ Addition (যোগ) এবং 'S' অর্থাৎ Subtraction এই অক্ষরগুলির ক্রমানুসারে সরলকরণের কার্য করিতে হয়।

2·12. ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. ঃ

নিয়ম ঃ ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. করিবার পূর্বে প্রথমে ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর। পরে লবগুলির গ. সা. গু.কে লব ও হরগুলির ল. সা. গু. কে হর ধরিলে যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হয় তাহাই প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু.। আবার লবগুলির ল. সা. গু. কে লব ও হরগুলির গ. সা. গু. কে হর ধরিলে যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হয় তাহাই প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলির ল. সা. গু.।

যেমন, $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ এর গ. সা. গু. $= \dfrac{3, 4, 5 \text{ এর গ. সা. গু.}}{4, 5, 6 \text{ এর ল. সা. গু.}} = \dfrac{1}{60}$.

আবার, $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ এর ল. সা. গু. $= \dfrac{3, 4, 5 \text{ এর ল. সা. গু.}}{4, 5, 6 \text{ এর গ. সা. গু.}} = \dfrac{60}{1} = 60.$

2·13. একটি রাশিকে সমজাতীয় আর একটি রাশির ভগ্নাংশে প্রকাশ : নিয়ম : প্রথমে সমজাতীয় রাশিকে সমএককে পরিণত কর। পরে যে রাশিকে প্রকাশ করিতে হইবে তাহাকে লব এবং 'যাহার ভগ্নাংশ' হইবে তাহাকে হর ধরিয়া যে ভগ্নাংশ উৎপন্ন হয় তাহাই নির্ণেয় ভগ্নাংশ।

যেমন, 25 পঃ কে 1 টা. 20 পঃ-এর ভগ্নাংশে প্রকাশ করিলে,

$$\text{নির্ণেয় ভগ্নাংশ} = \frac{25 \text{ পঃ}}{1 \text{ টা. } 20 \text{ পঃ}} = \frac{25 \text{ পঃ}}{120 \text{ পঃ}} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{24}{\cancel{120}}} = \frac{5}{24}.$$

প্রশ্নমালা 2A

[1, 2, 3, 4, 7—11 ক্লাসে এবং অবশিষ্ট অঙ্কগুলি বাড়ীতে কর।]

1. (a) নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর :

(i) $\frac{56}{154}$. (ii) $\frac{240}{384}$. (iii) $\frac{18 \times 28 \times 27}{24 \times 42 \times 47}$. (iv) $\frac{142583}{514199}$. [C. U. 1912]

$$\text{(i)} \quad \frac{\overset{\overset{4}{\cancel{28}}}{\cancel{56}}}{\underset{\underset{11}{\cancel{77}}}{\cancel{154}}} = \frac{4}{11}.$$

(b) নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট কর :

(i) $\frac{1}{4}, \frac{7}{10}, \frac{13}{15}$. (ii) $\frac{7}{8}, \frac{11}{16}, \frac{29}{24}$. (iii) $2, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$.

(i) 4, 10, 15 এর ল. সা. গু. $= 60$. $60 \div 4 = 15$; $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1 \times 15}{4 \times 15} = \dfrac{15}{60}$.

$60 \div 10 = 6$; $\dfrac{7}{10} = \dfrac{7 \times 6}{10 \times 6} = \dfrac{42}{60}$. $60 \div 15 = 4$; $\dfrac{13}{15} = \dfrac{13 \times 4}{15 \times 4} = \dfrac{52}{60}$.

(c) নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে মানের ক্রমানুসারে লিখ :

(i) $\frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{19}{30}$. (ii) $\frac{17}{20}, \frac{19}{25}, \frac{23}{35}$. (iii) $\frac{3}{5}, \frac{5}{7}, \frac{7}{9}, \frac{2}{3}$.

(i) হর 9, 12 ও 30 এর ল. সা. গু. $=180$.

$180 \div 9 = 20$; $180 \div 12 = 15$; $180 \div 30 = 6$.

$\therefore \frac{4}{9} = \frac{4 \times 20}{9 \times 20} = \frac{80}{180}$; $\frac{7}{12} = \frac{7 \times 15}{12 \times 15} = \frac{105}{180}$; $\frac{19}{30} = \frac{19 \times 6}{30 \times 6} = \frac{114}{180}$.

এবং 80, 105, 114 এই লবগুলির মধ্যে 114 বৃহত্তম, 105 তদপেক্ষা ছোট এবং 80 ক্ষুদ্রতম ;

অতএব (1) বৃহত্তম হইতে আরম্ভ করিয়া লিখিলে $\frac{19}{30}$, $\frac{7}{12}$ ও $\frac{4}{9}$.

(2) ক্ষুদ্রতম হইতে আরম্ভ করিয়া লিখিলে $\frac{4}{9}$, $\frac{7}{12}$ ও $\frac{19}{30}$.

(d) সরল কর :

(i) $\left(8\frac{1}{2} - 2\frac{3}{7}\right) \div \left(3\frac{1}{2} + 2\frac{4}{7}\right)$ এর $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$= \left(\frac{17}{2} - \frac{17}{7}\right) \div \left(\frac{7}{2} + \frac{18}{7}\right)$ এর $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$

$= \left(\frac{119 - 34}{14}\right) \div \left(\frac{49 + 36}{14}\right)$ এর $\left(\frac{2+1}{4}\right)$

$= \frac{85}{14} \div \frac{85}{14}$ এর $\frac{3}{4}$ [বন্ধনীর ভিতরের কাজ করিয়া]

$= \frac{85}{14} \div \frac{85 \times 3}{14 \times 4}$ [এর চিহ্নের কাজ করিয়া]

$= \frac{85}{14} \times \frac{14 \times 4}{85 \times 3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

(ii) $5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ এর $\frac{1}{3} \div \frac{1}{5} \times \frac{1}{6}$. [A. U. 1898]

(iii) $\frac{2}{3} \div 7\frac{1}{2}$ এর $\frac{4}{9} + 999\frac{494}{495} \times 99$. [C. U. 1942]

সংকেত : $999\frac{494}{495} \times 99 = (999 + \frac{494}{495}) \times 99$

$= (1000 - 1 + \frac{494}{495}) \times 99 = \{1000 - (1 - \frac{494}{495})\} \times 99$

$= (1000 - \frac{1}{495}) \times 99 = 99000 - \frac{1}{5}$ ইত্যাদি।

2. গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $3\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 5\frac{1}{4}$ (ii) $6, \frac{9}{10}, \frac{4}{15}$. (iii) $\frac{5}{9}, \frac{10}{27}, \frac{5}{18}, \frac{15}{63}$.

(i) $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$, $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$, $5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$.

ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু. $= \dfrac{7, 14, 21 \text{ এর গ. সা. গু.}}{2, 3, 4 \text{ এর ল. সা. গু.}} = \dfrac{7}{12}$.

ভগ্নাংশগুলির ল. সা. গু. $= \dfrac{7, 14, 21 \text{ এর ল. সা. গু.}}{2, 3, 4 \text{ এর গ. সা. গু.}} = \dfrac{42}{1} = 42.$

3. লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর :

(i) $\dfrac{22 \times 26 \times 42}{70 \times 77 \times 91}$. (ii) $\dfrac{571428}{999999}$.

(iii) $\dfrac{44352}{78848}$ [P. U '28] (iv) $\dfrac{123456}{2098752}$. [P. U. '41]

4. মানের ক্রমানুসারে লিখ :

(i) $\frac{1}{7}, \frac{5}{28}, \frac{6}{49}, \frac{27}{196}$. (ii) $\frac{4}{5}, \frac{11}{15}, \frac{21}{25}, \frac{29}{35}$. [C. U. 1873]

5. সরল কর :

(i) $(1+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{11}{12}) \div (\frac{9}{4}-\frac{5}{8})$. (ii) $1 \div [1+1 \div \{1+1 \div (1+1 \div 2)\}]$.

6. গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

(i) $2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{6}, 4\frac{3}{8}$. (ii) $5\frac{1}{7}, 6, 1\frac{1}{35}$.

7. আমার নিকট যত টাকা ছিল প্রথম বারে তাহার $\frac{1}{3}$, দ্বিতীয় বারে $\frac{1}{5}$ এবং তৃতীয় বারে $\frac{1}{7}$ অংশ খরচ করিয়াও আমার নিকট 340 টাকা রহিল। খরচ করিবার পূর্বে আমার নিকট কত টাকা ছিল ?

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7} = \dfrac{35+21+15}{105} = \dfrac{71}{105}$.

$1 - \dfrac{71}{105} = \dfrac{105-71}{105} = \dfrac{34}{105}$

∴ সম্পূর্ণ টাকার $\frac{34}{105}$ অংশ $= 340$ টাকা।

∴ সম্পূর্ণ টাকা $= 340$ টা. $\div \frac{34}{105} = 340$ টা. $\times \dfrac{105}{34} =$ টা. 1050.

8. একখানি বাঁশের $\frac{1}{8}$ লাল, $\frac{1}{16}$ কালো, $\frac{1}{32}$ সবুজ ও অবশিষ্ট অংশ নীল ; বাঁশটির কত অংশ নীল ?

9. এক ঝুড়িতে যতগুলি আম ছিল তাহার $\frac{1}{2}$ পাকা, বাকীর $\frac{2}{3}$ বড ও অবশিষ্ট ছোট ; ছোট আমের সংখ্যা 15 হইলে, ঝুড়িতে কয়টি পাকা ও কয়টি বড় আম ছিল ?

10. এমন একটি গরিষ্ঠ সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার দ্বারা $3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$ ও $5\frac{1}{4}$ কে পৃথক পৃথক্ ভাবে ভাগ করিলে প্রতিবার ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হইবে।

সংকেত : নির্ণেয় গরিষ্ঠ সংখ্যা $=3\frac{1}{2}$, $4\frac{2}{3}$ ও $5\frac{1}{4}$ এর গ. সা. গু.।

11. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যাকে 6, $\frac{9}{10}$, $\frac{4}{15}$ দ্বারা পৃথক পৃথক ভাবে ভাগ করিলে প্রতিবারে ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা হইবে ?

সংকেত : নির্ণেয় সংখ্যা $=6$, $\frac{9}{10}$, $\frac{4}{15}$ এর ল. সা গু.।

12. বৃহত্তম কোন্ রাশির দ্বারা $17\frac{1}{7}$ ও $5\frac{5}{14}$ বিভাজ্য ?

13. কোন্ ক্ষুদ্রতম পূর্ণসংখ্যা $5\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$ ও 9 দ্বারা বিভাজ্য ? [M. U. 1882]

14. 5 শি. 4 পে. কে 1 পাউণ্ডের ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

5 শি. 4 পে $=64$ পে এবং 1 পা $=240$ পে.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় ভগ্নাংশ} = \frac{\text{5 শি. 4 পে.}}{\text{1 পা.}} = \frac{\overset{4}{\cancel{64}}}{\underset{15}{\cancel{240}}} = \frac{4}{15}$$

15. 1 মি. 1 ডেসিমি কে 1 কিমি. 1 হেমি. এর ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

16. 3 গ্রা 2 ডেসিগ্রা. কে 6 ডেকাগ্রা. 2 গ্রামের ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

17. 108 টাকাকে এমন করিয়া তিন অংশে ভাগ কর যেন প্রথম ভাগের অর্ধেক, দ্বিতীয় ভাগের এক তৃতীয়াংশ ও তৃতীয় ভাগের এক চতুর্থাংশ পরস্পর সমান হয়।

18. জলে পরিপূর্ণ একটি বালতির ওজন $9\frac{3}{4}$ কিগ্রা. ; বালতি যখন জলে অর্ধপূর্ণ থাকে, তখন উহার ওজন হয় $6\frac{1}{4}$ কিগ্রা. ; জলশূন্য বালতির ওজন কত ?

19. গৃহসামগ্রীর সহিত একখানি বাড়ী ও তাহার নিম্নস্থ ভূমির মূল্য 4100 টাকা স্থির হইল। ভূমির মূল্য যত, বাড়ীর মূল্য তাহার $2\frac{1}{3}$ গুণ এবং গৃহসামগ্রীর মূল্য $3\frac{1}{3}$ গুণ। গৃহসামগ্রীর মূল্য বাড়ীর মূল্য অপেক্ষা কত অধিক ?

20. এক ব্যক্তি স্থির করিল যে তাহার আয়ের অর্ধেক ব্যয় করিবে, এক তৃতীয়াংশ সঞ্চয় করিবে এবং এক চতুর্থাংশ কারবারে খাটাইবে। তাহার আয় 780 পাউণ্ড। উক্তরূপ ভাগ করিয়া দেখিল তাহার কয়েক পাউণ্ডের অকুলান হয়। এরূপ অকুলান হইবার কারণ কি ? এবং কত পাউণ্ড অকুলান হইয়াছিল ?

21. কোন ব্যক্তি স্বীয় সম্পত্তির অর্ধেক স্ত্রীকে, এক তৃতীয়াংশ পুত্রকে ও অবশিষ্ট চারি ভগিনীকে সমান ভাগ করিয়া দেন। পুত্রের অংশ এক ভগিনীর অংশ হইতে 140 টাকা বেশী হইলে, ঐ ব্যক্তির সম্পত্তি কত টাকার ছিল ?

*22. পাঁচ ভ্রাতা একত্রে একটি ঋণ পরিশোধ করিল। জ্যেষ্ঠ ভ্রাতা মোট ঋণের $\frac{1}{3}$ অংশ এবং অন্যান্য ভ্রাতারা বাকী ঋণ সমান অংশে পরিশোধ করিল। ইহাতে অপর ভ্রাতাদের প্রত্যেককে জ্যেষ্ঠ ভ্রাতা অপেক্ষা 840 টাকা কম দিতে হইলে, মোট ঋণের পরিমাণ কত? [W. B. S. F. 1956]

*23. এক ব্যক্তির নিকট যে টাকা আছে সে প্রথম তাহার $\frac{3}{7}$, পরে অবশিষ্টের $\frac{5}{12}$ অংশ খরচ করিয়া দেখিল যে, তাহার নিকট মোট টাকার $\frac{2}{15}$ অংশ অপেক্ষা 10 টাকা অধিক অবশিষ্ট আছে। তাহার নিকট প্রথমে কত টাকা ছিল?

24. 10 পাউণ্ডের কত ভগ্নাংশ 16 পা. 10 শি. 3 পেনির সহিত যোগ করিলে যোগফল 20 পাউণ্ড হইবে? [C. U. 1886]

25. টা. 10·50 এর কত ভগ্নাংশ টা. 2·25 এর সহিত যোগ করিলে যোগফল 7 টা. 50 প: হইবে? [M. F. 1938]

26. 7 পা. 18 শি. 8 পে. এর $\frac{3 \text{ হ. } 3 \text{ কো. } 14 \text{ পা.}}{2 \text{ হ. } 1 \text{ কো. } 20 \text{ পা.}}$ = কত? [C. U. 1912]

*27. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় নির্দিষ্ট ও দৈনিক ব্যয়ও নির্দিষ্ট। 365 দিনে বৎসর হইলে, সেই বৎসর সে তাহার আয়ের $\frac{1}{27}$ অংশ সঞ্চয় করে। লিপ্ ইয়ারে সে 4 পা. 4 শি. 9 পে. সঞ্চয় করিলে, তাহার বার্ষিক আয় কত? [M. E. 1931]

B. জটিল ভগ্নাংশ
(Vulgar Fraction)

2·1. যে ভগ্নাংশের লব অথবা হর অথবা উভয়ই ভগ্নাংশ তাহাকে **জটিল ভগ্নাংশ** (Vulgar Fraction) বলে। যেমন,

$$\frac{\frac{1}{2}}{3}, \frac{2}{1\frac{1}{4}}, \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \text{ ইত্যাদি।}$$

দ্রষ্টব্য : জটিল ভগ্নাংশের লব ও হরকে স্পষ্টরূপে বুঝাইবার জন্য উভয়ের মধ্যে যে রেখাটি আছে তাহা একটু মোটা করিয়া দিতে হয়।

2·2. জটিল ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন :

(a) জটিল ভগ্নাংশেরও লব ও হরের মধ্যে ভাজ্য ও ভাজক সম্বন্ধ, সুতরাং ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশের আকারে পরিণত করিয়া সরল করা যায়।

অথবা (b) লব ও হর পৃথক্ পৃথক্ সরল করিয়া নূতন লবকে নূতন হরটি দ্বারা ভাগ করিয়া সরল করা যায়।

2·3. $\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ এইরূপ আকার থাকিলে তোমরা উহার পরিবর্তে $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5}$ লিখিতে পার। কিন্তু ভাগ চিহ্ন $(\div)$ এর পর ঐরূপ লিখিলে ভুলের সম্ভাবনা বেশী। সেইজন্য ঐরূপ না লিখিয়া একই রেখার উপরে ও নীচে $\frac{3 \times 6}{4 \times 5}$ লিখিলে ভাল হয়।

প্রশ্নমালা 2B

[1 (b−e), 2 (b−f), 9 (b−d), 15নং অঙ্কগুলি ক্লাসের কাজ এবং অবশিষ্ট বাড়ীর কাজ।]

সরল কর :

1. (a) $\dfrac{4\frac{1}{2}}{9}$ (b) $\dfrac{6\frac{1}{2}}{8\frac{2}{3}}$ (c) $\dfrac{15}{9\frac{2}{3}}$ (d) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ (e) $\dfrac{1\frac{1}{4} \div \frac{1}{5}}{1\frac{1}{4} \times \frac{1}{5}}$.

(a) $\dfrac{4\frac{1}{2}}{9} = \dfrac{\frac{9}{2}}{9} = \frac{9}{2} \div \frac{9}{1} = \frac{9}{2} \times \frac{1}{9} = \dfrac{9 \times 1}{2 \times 9} = \dfrac{1 \times 1}{2 \times 1} = \dfrac{1}{2}$.

(d) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{3+2}{6}}{\frac{3-2}{6}} = \dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{5}{6} \div \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{6}{1} = \dfrac{5 \times 6}{6 \times 1} = \dfrac{5 \times 1}{1 \times 1} = \dfrac{5}{1} = 5.$

2. (a) $\dfrac{1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \text{ এর } 1\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \times 1\frac{1}{3}}$ (b) $\dfrac{3\frac{1}{4} - \frac{4}{5} \text{ এর } \frac{5}{8}}{4\frac{1}{2} \div \frac{1}{5} - (\frac{9}{10} + 21\frac{1}{5})}$ (c) $\dfrac{6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{3}} - \dfrac{4\frac{1}{2}}{7} + \dfrac{6\frac{1}{4}}{12\frac{4}{9}}$

(d) $\dfrac{3 \times 2\frac{1}{4}}{3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}} \div \dfrac{5\frac{1}{7}}{2\frac{3}{5}}$ (e) $\dfrac{\frac{1}{2} \div 1\frac{5}{10} - \frac{1}{3} \times 1\frac{1}{4}}{\frac{1}{2} \times 1\frac{6}{24} - \frac{1}{3} \div 1\frac{1}{3}}$

(f) $\dfrac{\frac{5}{7} \div 3\frac{1}{14} - \frac{3}{8} \text{ এর } \frac{7}{12}}{(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \div (1\frac{5}{6} - \frac{2}{3})}$,

(a) $\dfrac{1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \text{ এর } 1\frac{1}{3}}{1\frac{1}{2} \div \frac{3}{4} \times 1\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{3}{2} \div \frac{3}{4} \text{ এর } \frac{4}{3}}{\frac{3}{2} \div \frac{3}{4} \times \frac{4}{3}} = \dfrac{\frac{3}{2} \div \left(\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}\right)}{\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}}$

['÷' ভাগের পূর্বে 'এর' এবং '×' গুণের পূর্বে ভাগের কাজ কর]

$= \dfrac{\frac{3}{2} \div 1}{\frac{8}{3}} = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{2} \div \frac{8}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{8} = \dfrac{9}{16}.$

3. $\dfrac{6\frac{7}{8}+3\frac{4}{5}}{6\frac{7}{8}-3\frac{4}{5}} \div \frac{1}{3}$ এর $10\frac{17}{41}$.

4. $\dfrac{2\frac{3}{4}-3\frac{4}{5}+4\frac{5}{8}}{7\frac{17}{30}\div 1\frac{1}{2} \text{ এর } 1\frac{1}{3}}$ এর $\frac{1}{24}$.

5. $\dfrac{2\frac{13}{15} \text{ এর } \frac{1}{3}}{\frac{4}{5} \text{ এর } \frac{5}{14} \div 5\frac{1}{6}} \div (\frac{1}{5} \text{ এর } 1\frac{15}{16})$.

6. $\dfrac{3\frac{1}{4}+2\frac{1}{7}}{5\frac{7}{8}-4\frac{5}{8}} \div \dfrac{5\frac{1}{4} \text{ এর } 9\frac{4}{7}}{4\frac{1}{8}+5\frac{1}{8}}$.

7. $\dfrac{2\frac{2}{3}+5\frac{7}{9}}{1\frac{1}{2}-\frac{4}{9}} \div \left(\dfrac{3\frac{1}{2}}{4} \text{ এর } \dfrac{5}{8}\right) \times \dfrac{2\frac{3}{15}}{32}$.

8. $\dfrac{4(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})-9(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+16(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})}{2(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})-3(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+4(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})}$.

9. (a) $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\frac{3}{4}}}$. (b) $8-8\times\dfrac{2\frac{1}{5}-1\frac{2}{7}}{2-\dfrac{1}{6-\frac{1}{6}}}$.

(c) $11+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{8\frac{1}{11}}}}$ (d) $1-\dfrac{2}{8-\dfrac{7}{1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{9}}}}$.

[C. U. 1883]

(a) এই জটিল ভগ্নাংশকে অবিরত ভগ্নাংশ (Continued Fraction) বলা হয়। উহাকে $\frac{1}{1+}\,\frac{2}{1+}\,\frac{3}{4}$ এইরূপে লেখা যায়। উহা প্রকৃত পক্ষে $1\div\{1+2\div(1+\frac{3}{4})\}$ এর সমান। এই ভগ্নাংশের সরল সর্বনিম্নস্তর হইতে করা হয়।

$$\frac{1}{1+\dfrac{2}{1+\frac{3}{4}}}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{\frac{4+3}{4}}}=\frac{1}{1+\dfrac{2}{\frac{7}{4}}}=\frac{1}{1+2\div\frac{7}{4}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2\times4}{7}}=\frac{1}{1+\frac{8}{7}}=\frac{1}{\frac{7+8}{7}}=\frac{1}{\frac{15}{7}}=1\div\tfrac{15}{7}=1\times\tfrac{7}{15}=\frac{7}{15}.$$

10. $2-\dfrac{5}{3+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$. 11. $\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}\times\dfrac{3}{1\frac{1}{2} \text{ এর } \frac{5}{6}\div 1\frac{1}{4}}$.

12. $\dfrac{4\frac{1}{7}-2\frac{1}{4}}{3\frac{1}{2}+1\frac{1}{7}} \div \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{5-\frac{1}{5}}}}$

13. $\dfrac{3\frac{1}{3}+2\frac{7}{11}}{4\frac{7}{10}-1\frac{17}{22}} \div \dfrac{5}{11+\dfrac{7}{8+2\frac{1}{2}}} - 4\dfrac{5}{7\frac{2}{3}}$. [C. U. 1933]

14. $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{6\frac{1}{3}}}}} + \frac{9}{2} \div \frac{5}{6}$ এর $\frac{8}{9} \times 1\frac{1}{4} - \frac{1}{11}\left(10+\frac{13}{30}\right)$, [C. U. 1934]

15 $\dfrac{1}{2} \div \dfrac{2}{3}$ এর $\dfrac{3}{4} \div \dfrac{4}{5} \times \dfrac{7 \text{ টাকা}}{\text{টা. } 3{\cdot}50}$.

$= \dfrac{1}{2} \div \left(\dfrac{2\times 3}{3\times 4}\right) \div \dfrac{4}{5} \times \dfrac{7 \text{ টাকা}}{3\frac{1}{2} \text{ টাকা}}$

$= \dfrac{1}{2} \div \dfrac{2\times 3}{3\times 4} \div \dfrac{4}{5} \times \dfrac{7}{\frac{7}{2}}$ [টাকাকে টাকা দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল সংখ্যা হইবে

$= \dfrac{1}{2} \div \dfrac{2\times 3}{3\times 4} \div \dfrac{4}{5} \times \dfrac{7\times 2}{7} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3\times 4}{2\times 3} \times \dfrac{5}{4} \times \dfrac{7\times 2}{7} = \dfrac{5}{2} = 2\dfrac{1}{2}$.

16. $\dfrac{5\frac{5}{8}}{6\frac{3}{7}}$ এর $\dfrac{6\frac{7}{11}}{9\frac{1}{8}} \div \frac{8}{9}\left(2\frac{3}{11}+\frac{19}{22}\right)$ এর $\dfrac{7 \text{ শি. } 6 \text{ পে.}}{12 \text{ শি. } 6 \text{ পে.}}$ [C. U. 1896)

17. $\dfrac{16 \text{ কুইণ্টাল } 80 \text{ কিগ্রা.}}{26 \text{ কুইণ্টাল } 88 \text{ কিগ্রা.}} - \dfrac{1 \text{ ঘ. } 16 \text{ মি. } 45 \text{ সে.}}{2 \text{ ঘ } 7 \text{ মি. } 55 \text{ সে.}}$.

18. $\dfrac{13 \text{ শি. } 5 \text{ পে.}}{9 \text{ শি. } 10 \text{ পে.}}$ এর $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{\frac{8}{9}+\frac{9}{10}} \div \dfrac{3 \text{ টন. } 3 \text{ হ.}}{4 \text{ টন. } 3 \text{ হ.}}$ এর $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{7}+\frac{8}{9}\right)$.

[C. U. 1899, P. U. 1949]

16. $\dfrac{3\frac{3}{4}+7\frac{5}{12}}{8\frac{5}{6}-4\frac{2}{3}} - 4\frac{1}{3} \div \dfrac{7\frac{7}{9}}{5\frac{1}{2}}$ এর $\dfrac{2\frac{3}{4}}{1\frac{5}{9}}$.

20. $\dfrac{44 \text{ পাউণ্ড}}{11+\dfrac{1}{7+\dfrac{3}{8\frac{1}{4}}}} \div 1 \text{ পা. } 13 \text{ শি. } 4 \text{ পে.}$ এর $\frac{1}{3}$.

[Pat. U. 1939 ; A. U. 1904

C. দশমিক ভগ্নাংশ ও আবৃত্ত দশমিক

(Decimal Fractions and Recurring Decimals)

2·1. তোমরা সংখ্যালিখন প্রণালীতে শিখিয়াছ যে, অখণ্ড সংখ্যার কোন স্থানীয় মান তাহার ঠিক বামের অঙ্কের স্থানীয় মানের দশ ভাগের এক ভাগ অর্থাৎ এক দশমাংশ। সুতরাং এককের পরে ঘরগুলি দশাংশ, শতাংশ ইত্যাদির ঘর। এককের পরের ঘরগুলি যে ভগ্নাংশের ঘর তাহা চিহ্নিত করিবার জন্য এককের অঙ্কের ঠিক ডাইনে এবং দশাংশ অঙ্কের ঠিক বামে একটু উপরে ['·'] এইরূপ একটি চিহ্ন দেওয়া থাকে। ঐ চিহ্নের নাম দশমিক বিন্দু এবং এই চিহ্নযুক্ত ভগ্নাংশের নাম **দশমিক ভগ্নাংশ** (Decimal Fraction)। যেমন, 2·34, 0·728 ইত্যাদি। সাধারণ ভগ্নাংশ ও দশমিক ভগ্নাংশের মধ্যে পার্থক্য এই যে, সামান্য ভগ্নাংশের হর যে-কোন সংখ্যা হইতে পারে, কিন্তু দশমিক ভগ্নাংশের হর সর্বদাই 10 বা 10 এর কোন গুণিতক হইবে।

2·2. দশমিকের যোগ :

নিয়ম : যোজ্য সংখ্যাগুলি এমন ভাবে স্থাপন করিতে হইবে যে, দশমিক বিন্দুগুলি এক উল্লম্ব লাইনে একটির নীচে একটি বসে এবং এককের নীচে একক, দশকের নীচে দশক ইত্যাদি ও দশাংশের নীচে দশাংশ, শতাংশের নীচে শতাংশ ইত্যাদি ক্রমে অঙ্কগুলি বসাইতে হইবে। পরে সাধারণ যোগের ন্যায় যোগ করিয়া যোগফলের দশমিক বিন্দু প্রদত্ত সংখ্যার দশমিক বিন্দুগুলির ঠিক নীচে বসাইতে হইবে।

2·3. দশমিকের বিয়োগ :

নিয়ম : বিয়োজনের নীচে বিয়োজ্য সংখ্যাটি এমন ভাবে স্থাপন কর যেন উভয় সংখ্যার দশমিক বিন্দু দুইটি ঠিক একটির নীচে অপরটি পড়ে। পরে সাধারণ বিয়োগের ন্যায় বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলে দশমিক বিন্দুর নীচে দশমিক বিন্দু বসাও।

2·4. দশমিকের গুণ : (a) সাধারণ নিয়ম :

গুণ্য ও গুণককে অখণ্ড সংখ্যা মনে করিয়া সাধারণ গুণের ন্যায় গুণ করিতে হয়। পরে গুণ্য ও গুণকের দশমিক বিন্দুর ডাইনে একত্রে যতগুলি অঙ্ক আছে গুণফলের ডানদিক হইতে ততগুলি অঙ্কের পর

দশমিক বিন্দু বসাইতে হয়। গুণফলে অঙ্কসংখ্যা কম পড়িলে বাম দিকে প্রয়োজনমত শূন্য বসাইয়া অঙ্কসংখ্যা পূরণ করিয়া লইতে হয়।

(b) গুণক 10 বা 10-এর গুণিতক হইলে :

গুণকে শূন্যসংখ্যা যত তত ঘর গুণ্যের দশমিক বিন্দু ডানদিকে সরাইলেই গুণফল পাওয়া যায়।

2·5. দশমিকের ভাগ : (a) সাধারণ নিয়ম :

প্রথমে ভাজক সংখ্যাটি অখণ্ড না থাকিলে উহাকে অখণ্ড সংখ্যা করিতে ডাইনে কত ঘর দশমিক সরাইতে হইবে তাহা দেখিতে হইবে। পরে ভাজ্যের দশমিক বিন্দু ডান দিকে তত ঘর সরাইতে হইবে। প্রয়োজন হইলে ঘর পূরণের জন্য শূন্য বসাইতে হইবে। এইবার সাধারণ ভাগের ন্যায় ভাগ করিতে হইবে। দশমিক বিন্দুর পরের অঙ্ক নামিলেই ভাগফলে দশমিক বিন্দু বসাইতে হইবে। ভাজ্যের অঙ্ক নামাইতে নামাইতে শেষ হইয়া গেলে 0 নামাইবে; কেননা ভাজ্যের শেষ অঙ্কের পর যত ইচ্ছা 0 আছে মনে করিলেও ভাজ্যের মানের কোন পরিবর্তন হইবে না।

(b) 10 বা 10 এর গুণিতক দ্বারা ভাগ :

ভাজকে, যতগুলি শূন্য আছে ততগুলি ঘর ভাজ্যের দশমিক বিন্দু বামে বসাইলে (প্রয়োজন হইলে ঘর পূরণের জন্য 0 বসাইয়াও) ভাগফল পাওয়া যায়।

2·6. দশমিকের গ. সা. গু. :

নিয়ম : (i) প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে 10 এর আবশ্যক যত শক্তি দ্বারা গুণ করিয়া পূর্ণ সংখ্যায় পরিণত কর। (ii) প্রাপ্ত পূর্ণ সংখ্যাগুলির সাধারণ নিয়মে গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর। (iii) প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে 1 এর পরে যে কয়টি শূন্য দ্বারা গুণ করা হইয়াছিল প্রাপ্ত গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. এর ডান দিক হইতে গণিয়া ততগুলি অঙ্কের বামে দশমিক বিন্দু বসাও।

2·7. দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন :

দশমিক ভগ্নাংশটির দশমিক বিন্দু ত্যাগ করিলে যে সংখ্যা হয় তাহাকে লব এবং দশমিক বিন্দুর ডাইনে যতগুলি অঙ্ক থাকে 1 এর

ডাইনে ততগুলি শূন্য বসাইয়া যে সংখ্যা হয় তাহাকে হর ধরিলে, দশমিক ভগ্নাংশটি সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত হয়।

2·8. সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিবর্তন ঃ

নিয়ম ঃ সামান্য ভগ্নাংশটির লবের ডাইনে দশমিক বিন্দু বসাইয়া তাহার ডাইনে প্রয়োজন মত শূন্য বসাও। পরে তাহাকে হর দ্বারা ভাগ কর। ভাগফলই নির্ণেয় দশমিক।

2·9. আবৃত্ত দশমিক (Recurring Decimal) ঃ

নিয়ম ঃ (a) সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিবর্তিত করিবার সময় ভাগকার্য শেষ হইলে যে দশমিক উৎপন্ন হয় তাহাকে **সসীম দশমিক** (Terminating Decimal) বলে। কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিবার পর যদি দেখা যায় যে, হরের উৎপাদক 2 ও 5 ব্যতীত অন্য কিছু নহে তবে সেই ভগ্নাংশকে পরিবর্তন করিলে **সসীম দশমিক** পাওয়া যাইবে।

(b) সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিবর্তিত করিবার সময় যদি ভাগকার্য শেষ না হয়, তাহাকে **অসীম দশমিক (Non-terminating Decimal)** বলে।

কোন ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিবার পর যদি দেখা যায় হরে 2, 5 ব্যতীত অন্য কোন মৌলিক উৎপাদক আছে তাহা হইলে সেই ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিবর্তন করিলে অসীম দশমিক পাওয়া যাইবে।

(c) যদি কোন অসীম দশমিকে এক বা একাধিক দশমিক অঙ্ক পর্যায়ক্রমে পুনঃ পুনঃ উদিত হয় তাহাকে **আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক** (Recurring Decimal) বলে।

আবৃত্ত দশমিক দুই প্রকার : **(1) বিশুদ্ধ (Pure), (2) মিশ্র (Mixed)।**

(i) যে আবৃত্ত দশমিকে দশমিক বিন্দুর পর হইতে আবৃত্ত অংশ (যে অংশ পুনঃ পুনঃ উদিত হয়) আরম্ভ হয় তাহাকে **বিশুদ্ধ আবৃত্ত বা পৌনঃপুনিক দশমিক** বলে। যেমন, $\cdot\dot{3}\dot{6}\cdots$, $1\cdot\dot{2}2\dot{7}$ ইত্যাদি।

(ii) যে আবৃত্ত দশমিকে দশমিক বিন্দুর পরবর্তী এক বা একাধিক অঙ্কের পর হইতে আবৃত্ত অংশ আরম্ভ হয় তাহাকে **মিশ্র আবৃত্ত বা মিশ্র পৌনঃপুনিক দশমিক** বলে। যেমন, $\cdot 35\dot{4}$, $1\cdot 3\dot{4}3\dot{7}$ ইত্যাদি।

আবৃত্ত দশমিকে যে অঙ্কগুলি পুনঃ পুনঃ উদিত হয় তাহা চিহ্নিত করিবার জন্য আবৃত্ত অঙ্কগুলির প্রথমটির মাথায় একটি এবং শেষটির মাথায় একটি বিন্দু বসান হয়।

এই বিন্দুকে পৌনঃপুনিক বিন্দু (Recurring point) বলে। মিশ্র আবৃত্ত দশমিকের তিনটি অংশ। যথা, (1) পূর্ণ অংশ বা অখণ্ড অংশ (Integral part), (2) তদবস্থ অংশ (Decimal or non-recurring part), এবং (3) আবৃত্ত অংশ বা পৌনঃপুনিক অংশ (Recurring part), যেমন—4·5723 এই আবৃত্ত দশমিকে পূর্ণ অংশ 4, তদবস্থ 5 এবং আবৃত্ত অংশ 723।

2·10 সামান্য ভগ্নাংশকে আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তন ঃ

নিয়ম ঃ হর দ্বারা লবকে ভাগ করিতে থাক। যখন দেখিবে ভাগফলে একই অঙ্ক বারবার উদিত হইবে তখন যে অঙ্কটি বা যে সমস্ত অঙ্ক পুনঃপুনঃ উদিত হইবে তাহা পৌনঃপুনিক বিন্দুর সাহায্যে চিহ্নিত করিয়া ভাগকার্য ছাড়িয়া দাও।

2·11 আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ

নিয়ম ঃ (a) **বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিক ঃ** প্রদত্ত বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিক সংখ্যা হইতে দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠাইয়া দিয়া সংখ্যাটিকে লব ধর এবং সংখ্যাটিতে যতগুলি আবৃত্ত অঙ্ক থাকিবে হরে ততগুলি 9 লিখ। এইরূপে উৎপন্ন ভগ্নাংশটি লঘিষ্ঠ আকারে না থাকিলে তাহাকে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত কর।

যেমন, $$\cdot\dot{2}\dot{7} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

(b) **মিশ্র আবৃত্ত দশমিক ঃ**

প্রদত্ত সংখ্যার দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠাইয়া দিয়া যে অখণ্ড সংখ্যা হইল তাহা হইতে তদবস্থ অংশে লিখিত সংখ্যাটি বিয়োগ কর। ঐ বিয়োগফলকে লব ধর ; এবং আবৃত্ত অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকিবে ততগুলি 9 এবং তদবস্থ অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকিবে 9 এর ডাইনে ততগুলি 0 বসাইয়া যে-সংখ্যা হয় সেই সংখ্যাটিকে হর ধর।

যেমন, $$\cdot 34\dot{5}\dot{7} = \frac{3457-34}{9900} = \frac{3423}{9900}.$$

(c) **পূর্ণ সংখ্যাযুক্ত আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ**

প্রথম নিয়ম ঃ প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক সংখ্যার পূর্ণাংশকে পূর্ণাংশ ধর। পরে তদবস্থ ও আবৃত্ত দশমিক অংশযুক্ত সংখ্যাটির দশমিক ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠাইয়া

দিয়া যে অখণ্ড সংখ্যা হয় তাহা হইতে তদবস্থ অংশে লিখিত সংখ্যাটি বিয়োগ কর। বিয়োগফলকে লব ধর এবং আবৃত্ত অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকে ততগুলি 9এর ডাইনে তদবস্থ অংশে যতগুলি অঙ্ক থাকে ততগুলি 0 বসাইয়া যে সংখ্যা হয় তাহাকে হর ধর। ভগ্নাংশ লঘিষ্ঠ আকারে না থাকিলে লঘিষ্ঠ আকারে লইয়া যাও।

দ্বিতীয় নিয়ম ঃ প্রদত্ত আবৃত্ত দশমিক সংখ্যার দশমিক বিন্দু ও পৌনঃপুনিক বিন্দু উঠাইয়া যে সংখ্যা হয় তাহা হইতে পূর্ণাংশ ও তদবস্থ অংশ মিলিয়া যে সংখ্যা হয় তাহা বিয়োগ কর। বিয়োগফলকে লব ধর এবং প্রথম নিয়মানুসারে হর বাহির কর।

যেমন, $6{\cdot}2\dot{3}1\dot{4} = 6 + {\cdot}2\dot{3}1\dot{4} = 6 + \dfrac{2314-2}{9990} = 6 + \dfrac{2312}{9990} = 6\dfrac{1156}{4995}.$

অথবা, $6{\cdot}2\dot{3}1\dot{4} = \dfrac{62314-62}{9990} = \dfrac{62252}{9990} = 6\dfrac{1156}{4995}.$

2·12. ভিন্ন ভিন্ন আকারের আবৃত্ত দশমিক সদৃশ করা ঃ

যে সমস্ত আবৃত্ত দশমিকে তদবস্থ অঙ্কের সংখ্যা যেমন পরস্পর সমান, আবৃত্ত অঙ্কের সংখ্যাও তেমনি পরস্পর সমান, তাহাদিগকে **সদৃশ আবৃত্ত দশমিক** বলে।

যেমন, $1{\cdot}45\dot{6}7\dot{8}$, ${\cdot}57\dot{2}3\dot{4}$, ${\cdot}004\dot{5}\dot{6}$ ইত্যাদি সদৃশ আবৃত্ত দশমিক।

অসদৃশ আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাগুলি সদৃশ আবৃত্ত দশমিকে পরিবর্তনের নিয়ম ঃ (i) অসদৃশ আবৃত্ত দশমিকগুলির যেটিতে সর্বাপেক্ষা অধিক সংখ্যক তদবস্থ অঙ্ক থাকিবে, সদৃশ করিলে প্রত্যেকটিতে আবৃত্ত অংশ হইতে আনিয়া ততগুলি তদবস্থ অঙ্ক কর। (ii) ভিন্ন ভিন্ন আবৃত্ত অঙ্কের সংখ্যাগুলির ল. সা. গু. নির্ণয় করিয়া ল. সা. গু. যত হইবে প্রত্যেকটির আবৃত্ত অঙ্কগুলি বাড়াইয়া প্রত্যেকটিতে ল. সা. গু. এর সমান সংখ্যক আবৃত্ত অঙ্ক কর। যেমন,

$1{\cdot}23\dot{4}\dot{5} = 1{\cdot}234\dot{5}4545\dot{4}.$ $\quad {\cdot}02\dot{3}4\dot{1} = {\cdot}023\dot{4}1341\dot{3}.$

$12{\cdot}135\dot{7} = 12{\cdot}135\dot{7}7777\dot{7}.$

2·13. কয়েকটি আবৃত্ত দশমিকের বিশেষত্ব ঃ

(*a*) $\frac{1}{7} = {\cdot}\dot{1}4285\dot{7}$; $\frac{2}{7} = {\cdot}\dot{2}8571\dot{4}$; $\frac{3}{7} = {\cdot}\dot{4}2857\dot{1}$; $\frac{4}{7} = {\cdot}\dot{5}7142\dot{8}$;
$\frac{5}{7} = {\cdot}\dot{7}1428\dot{5}$; $\frac{6}{7} = {\cdot}\dot{8}5714\dot{2}$.

লক্ষ্য করিলে দেখা যাইবে যে, যে সকল ভগ্নাংশের হর 7, তাহাদের তুল্যমান দশমিকগুলি বিশুদ্ধ আবৃত্ত এবং প্রত্যেকটিতেই 1, 4, 2, 8, 5, 7 এই ছয়টি অঙ্কই আছে। এই অঙ্ক ছয়টিকে চক্রাকারে রাখিয়া 1, 2, 4, 5, 7 ও 8 হইতে আরম্ভ করিয়া তীর প্রদর্শিত ক্রমে ছয়টি করিয়া অঙ্ক লইলে যথাক্রমে $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, ও $\frac{6}{7}$ এর তুল্যমান দশমিক (প্রথমে ও শেষে অঙ্কের উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইয়া) প্রাপ্ত হওয়া যায়।

যে সকল ভগ্নাংশে হর 13, তাহাদের তুল্যমান দশমিকগুলি বিশুদ্ধ আবৃত্ত এবং উহাদিগকে দুইটি শ্রেণীতে ভাগ করা যায়। এক শ্রেণীতে $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{10}{13}$ ও $\frac{12}{13}$—উহাদের তুল্যমান দশমিকের প্রত্যেকটিতেই 0, 7, 6, 9, 2. 3 এই ছয়টি অঙ্ক আছে। এই অঙ্ক ছয়টিকে চক্রাকারে রাখিয়া 0, 2, 3, 6, 7 ও 9 হইতে আরম্ভ করিয়া তীর প্রদর্শিত ক্রমে ছয়টি অঙ্ক হইলে যথাক্রমে $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{10}{13}$ ও $\frac{12}{13}$ এর তুল্যমান দশমিক (প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইয়া) পাওয়া যায়।

অপর শ্রেণীতে $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$, $\frac{11}{13}$—উহাদের তুল্যমান দশমিকের প্রত্যেকটিতেই 1, 5, 3, 8, 4 ও 6 এই ছয়টি অঙ্ক আছে। এই অঙ্ক ছয়টিকে চক্রাকারে রাখিয়া 1, 3, 4, 5, 6, ও 8 হইতে আরম্ভ করিয়া তীর প্রদর্শিত ক্রমে ছয়টি করিয়া অঙ্ক হইলে যথাক্রমে $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$, ও $\frac{11}{13}$ এর তুল্যমান দশমিক (প্রথম ও শেষ অঙ্কের উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইয়া) পাওয়া যায়।

2·14. আবৃত্ত দশমিকের যোগ : নিয়ম : প্রথমে সংখ্যাগুলি সদৃশ কর। সদৃশ করিয়া যে সমস্ত অঙ্ক পরিত্যক্ত হইল তাহাদের যোগফল হইতে কত হাতে থাকিবে তাহা স্থির করিবার জন্য দুটি অতিরিক্ত অঙ্ক লও। সাধারণ যোগের ন্যায়

যোগ কর। অতিরিক্ত অঙ্কের যোগফল ছাড়িয়া দিয়া কেবল হাতে যাহা থাকে তাহা লইয়া আবৃত্ত অংশের যোগ আরম্ভ কর। এই যোগফল হইতে উত্তর লিখিতে আরম্ভ কর। আবৃত্ত অংশের যোগফলকে নির্ণেয় যোগফলের আবৃত্ত অংশ ধর। তদবস্থ অংশের যোগফলকে তদবস্থ এবং পূর্ণাংশের যোগফলকে পূর্ণাংশ ধর।

2·15. আবৃত্ত দশমিকের বিয়োগ : যোগের অঙ্কের ন্যায় সমস্ত করিয়া কেবল যোগের পরিবর্তে বিয়োগ কর।

2·16. আবৃত্ত দশমিকের গুণ : (ক) আবৃত্ত দশমিকের গুণ্য ও গুণক উভয়কে প্রথমে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া গুণ করিতে হয়। যে গুণফল পাওয়া যায় তাহাকে আবার দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হয়। এইরূপে নির্ণেয় গুণফল পাওয়া যায়।

(খ) **গুণক অথবা গুণ্য সসীম দশমিক হইলে :** গুণ্যকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত না করিলেও চলে। গুণকে যতগুলি অঙ্ক থাকে, তাতে কত থাকিবে তাহা নির্ণয় করিবার জন্য গুণ্যের অঙ্কসংখ্যা যত তাহা অপেক্ষা একটি অধিক লইয়া গুণ কর। যে কয়টি অঙ্ক বেশী লওয়া হইয়াছিল, প্রাপ্ত গুণফলের ডান দিক হইতে সে কয়টি অঙ্ক বিয়োগ কর।

2·17. আবৃত্ত দশমিকের ভাগ : ভাজ্য ও ভাজক উভয়কেই সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া ভাগ কর। প্রাপ্ত ভাগফলকে দশমিকে লইয়া যাও। উহাই নির্ণেয় ভাগফল।

প্রশ্নমালা 2C

1. (i) $1022{\cdot}3+1579{\cdot}09+19{\cdot}1+12+{\cdot}22=$ কত ?

(ii) রামের বয়স 40 বৎসর, রাম শ্যাম অপেক্ষা 5·75 বৎসরের বড, উভয়ের বয়সের সমষ্টি কত ?

(iii) $23{\cdot}45+4{\cdot}532$ এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল 30 হইবে ?

(iv) সরল কর : $52{\cdot}85-(54{\cdot}37-42{\cdot}7)$

(v) $(0{\cdot}01)^3\times(0{\cdot}15)^2=$ কত ? (vi) $123{\cdot}7236\div0{\cdot}4017$.

(vii) $\dfrac{(0{\cdot}15)^2}{(0{\cdot}9)^2}-\dfrac{(0{\cdot}12)^2}{(0{\cdot}8)^2}$. (viii) $\dfrac{0{\cdot}8\times0{\cdot}027\times0{\cdot}35}{0{\cdot}032\times2{\cdot}1\times0{\cdot}1}$.

2. সরল কর :

(a) $\dfrac{\cdot2\times\cdot2\times\cdot2+\cdot02\times\cdot02\times\cdot02}{\cdot4\times\cdot4\times\cdot4+\cdot04\times\cdot04\times\cdot04}$ (b) $\dfrac{\cdot1701\div16\cdot2}{\cdot005\times\cdot07}$.

(a) $\dfrac{\cdot2\times\cdot2\times\cdot2+\cdot02\times\cdot02\times\cdot02}{\cdot4\times\cdot4\times\cdot4+\cdot04\times\cdot04\times\cdot04}=\dfrac{\cdot008+\cdot000008}{\cdot064+\cdot000064}=\dfrac{\cdot008008}{\cdot064064}=\dfrac{1}{8}$

$=\cdot125.$

3. (a) $\dfrac{\cdot\dot8\dot1\times\cdot005}{\cdot45}$. (b) $\dfrac{2\cdot4\dot6-2\cdot\dot3\dot0}{\cdot3+\cdot12\dot7}+\dfrac{4\frac{1}{3}}{19}$ [C. U. 1912]

(a) $\dfrac{\cdot\dot8\dot1\times\cdot005}{\cdot45}=\dfrac{\frac{81}{99}\times\frac{5}{1000}}{\frac{45}{100}}=\dfrac{81}{99}\times\dfrac{5}{1000}\times\dfrac{100}{45}=\dfrac{1}{110}=\cdot0\dot0\dot9.$

4. $\dfrac{\cdot0256+1\cdot2\dot5\dot4-\cdot073}{2(1\cdot254+\cdot078-1\cdot304)}$.

5. $(1\cdot25)^3+2\cdot25(1\cdot25)^2+3\cdot75(\cdot75)^2+(\cdot75)^3$.

6. $(\cdot438\times\cdot15)+\dfrac{\cdot063}{\cdot28}$.

7. $(1\cdot4-0\cdot362)\div(0\cdot31+0\cdot123-0\cdot0005)$. [C. U. 1918]

8. $\cdot04-[\cdot04-\{\cdot04-(\cdot04-\overline{\cdot03})\}]$.

9. $\dfrac{\cdot2\times\cdot2\times\cdot2+\cdot02\times\cdot02\times\cdot02}{\cdot6\times\cdot6\times\cdot6+\cdot06\times\cdot06\times\cdot06}\div\dfrac{2\frac{1}{3}-1\cdot1\dot6}{2\cdot3+1\frac{1}{6}}$. [C. U. 1907]

10. $\dfrac{15\cdot\dot6+7-0\cdot\dot3}{3\times7\cdot\dot4+0\cdot25}+\left\{37+\dfrac{3\cdot7\dot03\dot7}{100}\right\}\times0\cdot27$ [C. U. 1934]

11. $\dfrac{8}{3}\times\dfrac{0\cdot8\dot5}{1\cdot\dot2}\times7\cdot\dot14285\dot7\times1\cdot875$. [C. U. 1941]

12. $\dfrac{2\cdot2\dot7 \text{ এর } 2\cdot8}{1\cdot3\dot6}+\left\{\dfrac{4\cdot\dot4-2\cdot8\dot3}{1\cdot3+2\cdot62\dot9}\times8\cdot2\right\}$ [D. B. 1934]

13. $\dfrac{5}{5+\dfrac{\cdot5}{5+\frac{1}{5}}}+\dfrac{1 \text{ পা. } 15 \text{ শি.}}{1 \text{ পা. } 11 \text{ শি.}}\div\dfrac{1}{7}(2\cdot\dot4+4\cdot\dot5)^2$ [G. U. 1949]

14. $\dfrac{2\frac{1}{3}-1\frac{2}{9}}{3\frac{1}{6}+1\frac{2}{5}}+\dfrac{\frac{2}{7}-\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}+\frac{1}{8}}+\dfrac{\cdot05\times\cdot7}{\cdot071}$ এর $\dfrac{3 \text{ গ্রা. } 9 \text{ ডেসিগ্রা.}}{2 \text{ গ্রা. } 7 \text{ ডেসিগ্রা.}}$

15. $1-\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5-\cfrac{6}{7+\frac{8}{9}}}} \div \dfrac{\text{2 হন্দর 2 কো. 21 পা.}}{\text{10 হন্দর 2 কো. 11 পা.}}$ এর $2\cdot08\dot{3}$ কে সরল কর

এবং ইহাকে 1·1 এর দশমিকে প্রকাশ কর। [C. U. 1902]

16. (a). 5 শি. এর $\dfrac{2\cdot25-\cdot6 \text{ এর } 1\cdot8\dot{3}}{\cdot2 \text{ এর } 3\frac{1}{3}+\cdot36\dot{1}} \times \cdot95$ কে 11 পাউণ্ডের দশমিকে প্রকাশ কর। [P U. 1928]

(b) বৃহত্তম কোন্ সংখ্যা দ্বারা 2·4, 7·2 ও 1·2 কে ভাগ করিলে ভাগফল অখণ্ড সংখ্যা পাওয়া যাইবে ?

সংকেত ঃ নির্ণেয় বৃহত্তম সংখ্যা = প্রদত্ত সংখ্যাগুলির গ. সা. গু.।

(c) চারিটি ঘড়ি একসঙ্গে বাজিবার পর 1·2, 1·8, 2·4, 3 মিনিট অন্তর অন্তর বাজিলে তাহারা আবার কখন একসঙ্গে বাজিবে ?

17. (a) 1 সেকেণ্ডকে 1 ঘণ্টার দশমিকে প্রকাশ কর। [C. U. 1911]

(b) 3 পা. 15 শি. 5 পে. কে 100 টাকার দশমিকে প্রকাশ কর।
(1 পা. = 15 টাকা) [D. B 1939]

(c) A ও B এর মোট 132টি ঘোড়া আছে। A এর ঘোড়ার সংখ্যার $\cdot5$ = B এর ঘোড়ার সংখ্যার $\cdot\dot{2}8571\dot{4}$ হইলে কাহার কয়টি ঘোড়া আছে ?

(d) প্রথম যুদ্ধে একদল সৈন্যের $\cdot0\dot{3}$, দ্বিতীয় যুদ্ধে অবশিষ্টের 0·175, তৃতীয় যুদ্ধে অবশিষ্টের $0\cdot\dot{2}\dot{7}$ নিহত হইল এবং 870 জন অবশিষ্ট রহিল। সৈন্যদলে প্রথমে কত সৈন্য ছিল ? [C. U. 1936]

(e) দুইটি দোলক এর একটি 3·2 সেকেণ্ডে 6 বার ও অপরটি 3·6 সেকেণ্ডে 8 বার দোলে। প্রতিবার দোলনে যদি একবার টিক শব্দ হয়, তাহা হইলে উভয় দোলক একই সঙ্গে দুলিতে আরম্ভ করিলে, 12 ঘণ্টায় উঁহারা কতবার একত্র টিক্ শব্দ করিবে ? [B. C. S. 1947]

3

বর্গমূলাকর্ষণ

Extraction of square root

(পুনরালোচনা)

3·1. বর্গ ও বর্গমূল ঃ

একটি সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে, গুণফলকে ঐ সংখ্যার **বর্গ (Square)** বলে এবং ঐ সংখ্যাটি উক্ত গুণফলের **বর্গমূল (Square root)**।

যেমন, $4 \times 4 = 16$; 16, 4 এর বর্গ এবং 4, 16 এর বর্গমূল।

3·2. বর্গমূল নির্ণয় প্রণালী (Extraction of square root)

অখণ্ড সংখ্যার বর্গমূল দুই প্রকারে বাহির করা যায় :

(ক) উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল ঃ—

প্রথমে প্রদত্ত সংখ্যাটিকে মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। একই প্রকার দুইটি উৎপাদকের জন্য একটি করিয়া উৎপাদক লও। এই প্রকারে লব্ধ উৎপাদকগুলির গুণফলই উদ্দিষ্ট বর্গমূল। যথা ঃ

$$\sqrt{64} = \sqrt{(2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2)} = 2 \times 2 \times 2 = 8.$$

(খ) ভাগের সাহায্যে বর্গমূল ঃ

(i) প্রথমে এককের অঙ্ক চিহ্নিত করিয়া পরে একটি অঙ্ক অন্তর একটি অঙ্ক চিহ্নিত কর।

(ii) চিহ্নিত অঙ্ক ও তাহার বামের অঙ্ক লইয়া জোড়া বাঁধ। ইহাতে প্রদত্ত সংখ্যার বামদিকের শেষ অঙ্ক জোড়া বাঁধিতে পারে অথবা নাও বাঁধিতে পারে।

(iii) প্রদত্ত সংখ্যার বামদিকের সর্বশেষ অঙ্ক একক হউক বা জোড়া হউক তাহার সমান অথবা তাহার নিকটবর্তী (অবশ্য বড় নহে) বর্গসংখ্যা কোন্‌টি মনে মনে স্থির করিয়া সেই সংখ্যাটি ঐ জোড়া বা একক অঙ্কের নীচে বসাইয়া বিয়োগ কর এবং বর্গসংখ্যাটি মূল ভাগফলে বসাও।

(iv) পূর্বলব্ধ বিয়োগফলের ডাইনে ভাজ্য হইতে ঠিক পরবর্তী জোড়া আনিয়া ইহাকে আংশিক ভাজ্য ধর এবং ভাগফলের অঙ্ক দ্বিগুণ করিয়া তাহাকে নূতন ভাজক বলিয়া কল্পনা কর।

(v) নূতন ভাজ্যের সর্বশেষ অঙ্ক বাদ দিলে যে সংখ্যা থাকে তাহার মধ্যে নূতন ভাজক কতবার যায় তাহা সাধারণ ভাগের প্রণালীতে স্থির করিয়া সেই সংখ্যাটি ভাগফলের ও নূতন ভাজকের ডাইনে বসাও এবং এই ভাগফল দ্বারা নূতন ভাজককে গুণ করিয়া নূতন ভাজ্য হইতে সেই গুণফল বিয়োগ কর।

(vi) এই ভাবে যতক্ষণ না ভাগকার্য শেষ হয়, ভাগ কর। লব্ধ ভাগফলই নির্ণেয় বর্গমূল।

3·3. সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল :—

নিয়ম : (i) ভগ্নাংশ যদি লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করা প্রয়োজন হয় তাহা প্রথমেই করিবে।

(ii) পৃথক পৃথক ভাগে ভগ্নাংশের লব ও হরের বর্গমূল নির্ণয় কর। লবের বর্গমূলকে লব এবং হরের বর্গমূলকে হর ধর।

3·4. দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল :

নিয়ম : দশমিক বিন্দুর ঠিক পর হইতে আরম্ভ করিয়া ডানদিকের পাশাপাশি অবস্থিত দুই দুইটি অঙ্ক একত্র লইয়া দশমিক অংশটি কয়েকটি দলে ভাগ কর। শেষে অঙ্কের অভাব হইলে 0 (শূন্য) দিয়া পূরণ করিয়া লও। আর দশমিক বিন্দুর বামে পূর্ণ সংখ্যা থাকিলে তাহা 3·2 অনুচ্ছেদে (ভাগ-প্রক্রিয়ার সাহায্যে বর্গমূল) বর্ণিত নিয়মানুসারে কয়েক দলে বিভক্ত করিয়া ঐ অনুচ্ছেদে বর্ণিত নিয়মানুসারে বর্গমূল কর। যখনই দশমিক বিন্দুর পরের জোড়া নামাইবে তখনই মূলাংশে দশমিক বিন্দু বসাইবে।

3·5. আবৃত্ত দশমিকের বর্গমূল :

সাধারণ দশমিকের বর্গমূল নির্ণয় প্রণালীর সহিত আবৃত্ত দশমিকের বর্গমূল নির্ণয় প্রণালীর মূলতঃ কোন প্রভেদ নাই। তবে দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করিবার সময় অঙ্কের অভাব হইলে 0 (শূন্য) বসাইয়া সেই অভাব পূরণ করা হয়। আর আবৃত্ত দশমিকের ক্ষেত্রে আবৃত্ত অংশ হইতে অঙ্ক আনিতে হয়।

3·6. পূর্ণবর্গ ঃ

যে সকল সংখ্যার বর্গমূল কোন পূর্ণ সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশের ঠিক সমান, তাহাদিগকে পূর্ণবর্গ **(Perfect square)** বলে।

দ্রষ্টব্য ঃ যে সকল অখণ্ড সংখ্যা বা দশমিক ভগ্নাংশের ডান দিকে সর্বশেষ অঙ্ক 2 বা 3 বা 7 বা 8 থাকে, তাহারা কখনও পূর্ণবর্গ নহে।

প্রশ্নমালা 3

[1, 4 – 8, 14 নং অঙ্কগুলি ক্লাসের কাজ এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. (a) উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল কর :

(i) 784, (ii) 2304, (iii) 9025, (iv) 144×36.

(i)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 784 \\ 2 & 392 \\ 2 & 196 \\ 2 & 98 \\ 7 & 49 \\ & 7 \end{array}$$

$\therefore \sqrt{(784)} = \sqrt{(2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (7 \times 7)}$
$= 2 \times 2 \times 7 = 28.$

(b) ভাগ প্রক্রিয়ার সাহায্যে বর্গমূল কর :

(i) 88209, (ii) 1452025, (iii) 39601, (iv) 13225.

$$\begin{array}{r|l|l} & 8\,82\,09 & 297 \\ & 4 & \\ \hline 49 & 482 & \\ & 441 & \\ \hline 587 & 4109 & \\ & 4109 & \\ \hline \end{array}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= 297$.

2. (a) 198 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল পূর্ণ বর্গ সংখ্যা হইবে ?

(b) 250 এর সহিত কত যোগ করিলে যোগফল পূর্ণ বর্গ সংখ্যা হইবে ?

(c) 288 কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল একটি পূর্ণ বর্গ সংখ্যা হইবে ?

(d) 1250 কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল একটি পূর্ণ বর্গ সংখ্যা হইবে ?

(e) 6, 12, 15 দ্বারা বিভাজ্য ক্ষুদ্রতম পূর্ণ বর্গ সংখ্যা কত ?

3. সাধারণ নিয়মে বর্গমূল কর :

(a) 4008004. (b) 524176. (c) 57592921.

(d) 1522756 [C. U. 1922, 1925] (e) 2819041 [C. U. 1924].

4. কোন বিদ্যালয়ের এক শ্রেণীর ছাত্রগণ 'দাতব্য ভাণ্ডার' গঠন করার জন্য নিজেরা 92 টা. 16 প: চাঁদা তুলিল। যতজন ছাত্র ছিল প্রত্যেকে তত পয়সা চাঁদা দিলে ঐ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা কত ?

মনে কর, ছাত্রসংখ্যা $=x$ ∴ প্রত্যেক বালক x পয়সা চাঁদা দিল

∴ ছাত্রগণ $(x \times x)$ বা x^2 পয়সা চাঁদা দিল। এখন 92 টা. 16 প. = 9216 প.।

```
     9216| 96
     81
186 |1116
    |1116
      ×
```

∴ প্রশ্নানুসারে $x^2 = 9216$

∴ $x = \sqrt{9216} = 96$

∴ ছাত্রসংখ্যা = 96.

5. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যদলকে নিরেট বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 6 জন সৈন্য বেশী হয়। সৈন্যসংখ্যা 63510 হইলে, প্রতি সারিতে কতজন সৈন্য ছিল ? [W. B. S. F. Comp 1967]

6. 15848503 হইতে কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা বিয়োগ করিলে, বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

7. 1522099 এর সহিত কোন্ লঘিষ্ঠ সংখ্যা যোগ করিলে, সমষ্টি একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

8. কোন সমিতিতে যত জন সভ্য ছিল প্রত্যেকে তত পয়সা চাঁদা দেওয়ায় মোট 14 টা. 44 প. চাঁদা উঠিল। সমিতির সভ্যসংখ্যা কত ?

9. A ও B-এর টাকার সংখ্যার গুণফল 15, B ও C-এর টাকার সংখ্যার গুণফল 21 এবং A ও C-এর টাকার সংখ্যার গুণফল 35 হইলে, কাহার কত টাকা আছে ?

10. একটি দলে যত লোক ছিল, প্রত্যেকে তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক পাঁচ পয়সা ব্যয় করাতে 12744 টাকা 90 প. ব্যয় হইল। এই দলে কত লোক ছিল ?

11. দুইটি সংখ্যার গুণফল 875 এবং বৃহত্তম সংখ্যাকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $\frac{7}{5}$ হয় ; সংখ্যা দুইটি কত ?

12. দুইটি সংখ্যার গুণফল 37636 এবং একটি সংখ্যা অপরটির 4 গুণ, সংখ্যা দুইটি কত ?

বর্গমূল নির্ণয় কর :

13. (a) $\frac{196}{324}$, (b) $5\frac{76}{100}$, (c) 11·56. **14.** 29·192409.

15: 170·485249 **16.** ·01117249.

17. ·0041409225 **18.** 2919·46783041

তৃতীয় দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর :

19. (a) 2, (b) 5, (c) 1, (d) 12·21, (e) $\frac{8}{9}$, (f) $\frac{11}{20}$, (g) $\frac{1}{7}$

20. নিম্নে বামপাশে কতকগুলি সংখ্যা নীচে নীচে দেওয়া আছে, ডানপাশে উহাদের বর্গমূলসমূহ এলোমেলোভাবে দেওয়া আছে এবং উহাদের পাশে পাশে, বন্ধনী আছে। বন্ধনীর মধ্যে সংখ্যাগুলির যথাযথ নম্বর বসাও :

(1)	625	( )	001
(2)	729	( )	25
(3)	1024	( )	75
(4)	5625	( )	·1
(5)	15625	( )	·02
(6)	·01	( )	27
(7)	·0004	( )	32
(8)	·000001	( )	125

21. ছয় অঙ্ক দ্বারা লিখিত ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

[W. B. S. F. (Compt.) 1966]

22. একদল সৈন্যকে 15, 20 ও 25 সারিতে সাজান যায়। আবার এমনভাবে সাজান যায় যে উহাদিগকে যতগুলি সারিতে সাজান যায় প্রত্যেক সারিতে ততজন সৈন্য থাকে। ন্যূনপক্ষে ঐ দলে কত সৈন্য আছে ?

4

তল ও ঘন পরিমাণ

Square and Cubic Measures

(পুনরালোচনা)

A. তলপরিমাণ (Square Measures)

4·1 তলপরিমাণ সম্বন্ধীয় বিবিধ সংজ্ঞা :

(*a*) সীমাবদ্ধ সমতল স্থানকে **ক্ষেত্র** বলে।

(*b*) কোন সমতল ক্ষেত্রের বাহুগুলি দ্বারা আবদ্ধ স্থানের পরিমাণকে **ক্ষেত্রফল** বা **কালি (Area)** বলে।

(*c*) চারিটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **চতুর্ভুজ (Quadrilateral)** বলে।

(*d*) যে চতুর্ভুজের সম্মুখীন বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলি প্রত্যেকেই সমকোণ, তাহাকে **আয়তক্ষেত্র (Rectangle)** বলে।

(*e*) যে আয়তক্ষেত্রের বাহু চারিটি পরস্পর সমান তাহাকে **বর্গক্ষেত্র (Square)** বলে।

(*g*) যে সরলরেখা চতুর্ভুজের বিপরীত কৌণিক বিন্দুদ্বয় যোগ করে, তাহাকে **কর্ণ (Diagonal)** বলে।

(*g*) কোন ক্ষেত্রের সীমারেখার দৈর্ঘ্য-সমষ্টিকে **পরিসীমা (Perimeter)** বলে।

(*h*) যে বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহু 1 মিটার তাহার ক্ষেত্রফলকে **1 বর্গমিটার**, যে বর্গক্ষেত্রের প্রতি বাহু 1 ইঞ্চি তাহার ক্ষেত্রফলকে **1 বর্গ ইঞ্চি** ইত্যাদি বলে।

4·2 তল সম্বন্ধীয় বিভিন্ন সূত্র :

(*a*) (i) **আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ**

(ii) „ **দৈর্ঘ্য = ক্ষেত্রফল ÷ প্রস্থ**

(iii) „ **প্রস্থ = ক্ষেত্রফল ÷ দৈর্ঘ্য**

(iv) „ **পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)**

(*b*) (i) **বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহু)²**

(ii) „ **বাহু = √বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল**

(iii) „ **পরিসীমা = 4 × বাহুর দৈর্ঘ্য**

(c) চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা
বা পরিসীমা × উচ্চতা

(d) উচ্চতা $= \dfrac{\text{চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল}}{2\,(\text{দৈর্ঘ্য} + \text{প্রস্থ})}$

4·3. মনে রাখিও **বর্গমিটার** ও **মিটারবর্গ** ইহাদের অর্থ সম্পূর্ণ পৃথক্। যেমন 4 মিটারবর্গ বলিলে এমন একটি বর্গক্ষেত্র বুঝিতে হইবে যাহার প্রতি বাহু 4 মিটার। অতএব ক্ষেত্রফল = (4 × 4) বা 16 বর্গমিটার। কিন্তু 4 বর্গমিটার বলিলে এমন একটি ক্ষেত্র যাহার দৈর্ঘ্যকে প্রস্থ দ্বারা গুণ করিলে 4 হইবে অর্থাৎ যাহার ক্ষেত্রফল 1 বর্গমিটারের 4 গুণ।

প্রশ্নমালা 4 A

[1, 3, 11, 12 নং অঙ্কগুলি ক্লাসের কাজ এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. (i) কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 34 মি. 1 ডেসি. মি. এবং প্রস্থ 16 মি.; ক্ষেত্রফল = কত ?

দৈর্ঘ্য = 34 মি. 1 ডেসি. মি. = 34·1 মি.

প্রস্থ = 16 মি.

∴ ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = 34·1 × 16 মি. = 545·6 বর্গ মিটার।

(i) একটি বর্গাকার ঘরের মেঝের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 30 মিটার হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত ?

মেঝের কালি = (বাহু)^2 = (30 মি.)^2 = 30 মি. × 30 মি. = 900 বর্গ মিটার।

(iii) কোন গৃহের ক্ষেত্রফল 1 আর, উহার দৈর্ঘ্য 16 মিটার ; প্রস্থ কত ?

$$\text{প্রস্থ} = \frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\text{দৈর্ঘ্য}} = \frac{1 \text{ আর}}{16 \text{ মিটার}} = \frac{100 \text{ ব. মি.}}{16 \text{ মি.}} = 6·25 \text{ মিটার।}$$

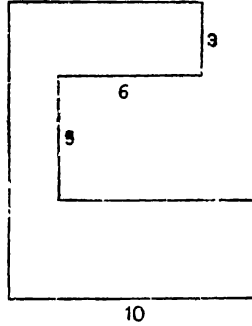
(iv) কোন আয়তকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 200 ব. মিটার ; দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ হইলে, উহার পরিসীমা কত ?

ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = 2 প্রস্থ × প্রস্থ = 2 × (প্রস্থ)^2 = 200 ব. মিটার

(প্রস্থ)^2 = 100 ব. মি. = 10^2 ; ∴ প্রস্থ = 10 মিটার।

দৈর্ঘ্য = 2 প্রস্থ = 2 × 10 = 20 মিটার।

∴ পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) = 2 (20 + 10) = 60 মিটার

2. নিম্নে প্রদত্ত ক্ষেত্রটির কোণগুলি সমকোণ এবং উহার বাহুগুলির মাপ সেন্টিমিটারে দেওয়া আছে ; ঐ ক্ষেত্রটির কালি কত ?

3. 15 ফুট দীর্ঘ এবং 12 ফুট বিস্তৃত একখণ্ড কার্পেট 20 ফুট বর্গ ঘরের মেঝেতে পাতা হইলে মেঝের অনাবৃত অংশের পরিমাণ কত ?

4. 30 মিটার দীর্ঘ এবং 16 মিটার বিস্তৃত একখণ্ড জমির বাহিরে চতুর্দিকে 2 মিটার বিস্তৃত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল কত ?

PQRS দ্বারা আয়তাকার জমি এবং ABCD দ্বারা পথটির বাহিরের ধার সূচিত করা হইয়াছে।

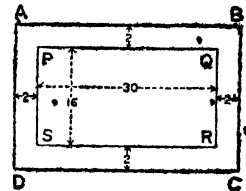
$\because$ PQ = 30 মি. এবং $\because$ পথের বিস্তার 2 মি.

$\therefore$ AB = (30 + 2 + 2) মি. = 34 মি

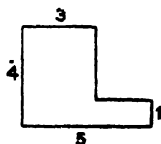
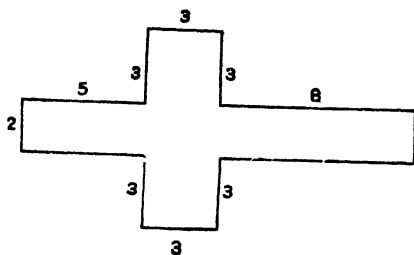
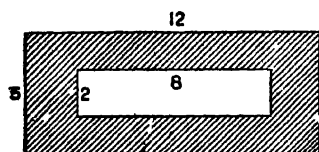
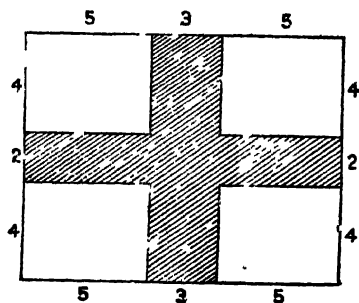
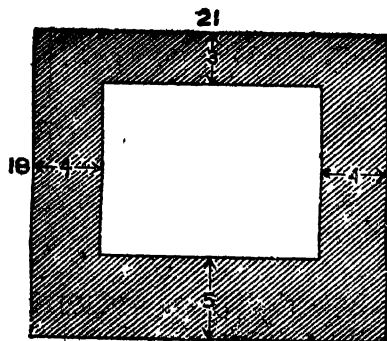
এইরূপে AD = (16 + 2 + 2) মি. = 20 মি.

$\therefore$ ABCD জমির ক্ষেত্রফল = (34×20) ব. মি.

= 680 ব. মি.

এবং PQRS = (30×16) ব. মি. = 480 ব. মি.

$\therefore$ পথের ক্ষেত্রফল = ABCD এর ক্ষেত্রফল − PQRS এর ক্ষেত্রফল

= (680 − 480) ব. মি. = 200 ব. মি.

নিম্নে কয়েকটি ক্ষেত্র দেওয়া আছে; উহাদের কোণগুলি সমকোণ এবং বাহুগুলির মাপ সেণ্টিমিটারে দেওয়া আছে; উহাদের ক্ষেত্রফল বাহির কর:—

5. 6.

নিম্নে কয়েকটি ক্ষেত্র দেওয়া আছে: উহাদের কোণগুলি সমকোণ এবং বাহুগুলির মাপ সেণ্টিমিটারে দেওয়া আছে: উহাদের ক্ষেত্রফল বাহির কর। যে ক্ষেত্রটি তীর চিহ্নিত তাহার কেবল তীর চিহ্নিত অংশের ক্ষেত্রফল বাহির কর:

7. 8.

9.

10. 48 ফুট দীর্ঘ একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ। উহার পরিসীমার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রকে পাথর দিয়া বাঁধাইতে 18" দৈর্ঘ্য ও 8" প্রস্থের কয়খানা পাথরের প্রয়োজন? [D. B. 1935]

11. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ এবং প্রতি বর্গগজে 25 প. হিসাবে উহার মেঝে পাকা করিতে 50 টাকা খরচ হয়। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।
[M. E. 1°31]

12. 40 একর পরিমিত একটি বর্গাকার উদ্যানের বাহিরের চারিদিকে 30 ফুট প্রশস্ত একটি রাস্তাকে 2 ফুট দীর্ঘ এবং 1 ফুট 6 ইঞ্চি প্রশস্ত প্রস্তর দ্বারা বাঁধাইতে কতগুলি প্রস্তর লাগিবে? [D. B. 1946]

13. একটি বর্গাকার তৃণভূমির বাহু 200 গজ এবং উহাকে ঘিরিয়া বাহির দিকে 10 ফুট প্রশস্ত একটি পথ আছে। প্রতি 100 বর্গ ফুট 2 টা. 50 প. হিসাবে ঐ পথে কাঁকর বিছাইতে কত ব্যয় হইবে? [C. U. 1911]

14. 452 ফুট দীর্ঘ ও 404 ফুট প্রশস্ত উঠানে সমান বর্গাকার পাথর বসাইতে বৃহত্তম কি মাপের পাথর ব্যবহার করা যাইতে পারে?

15. একটি ঘরের ভিতরের দৈর্ঘ্য 42 ফু. 6 ই. ও প্রস্থ 22 ফু. 9 ই.। উহার দেওয়াল 2 ফুট 3 ইঞ্চি পুরু এবং বাহিরের চারিধারে 10 ফুট 6 ইঞ্চি প্রশস্ত একটি বারান্দা আছে। $4\frac{1}{2}'' \times 3''$ মাপের টালি দিয়া ঐ বারান্দা বাঁধান হইল। প্রতি টালির মূল্য 5 প. হইলে মোট ব্যয় কত হইবে?

16. একটি বর্গক্ষেত্রের কালি 202.5 একর। উহার চারিধারে প্রতিগজ 34 প. হিসাবে বেড়া দিতে কত ব্যয় হইবে?

17. একখানি ঘরের দেওয়ালের দৈর্ঘ্য 21 ফু., প্রস্থ 16 ফু., উচ্চতা 10 ফু.; চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল কত?

চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল

= (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × 2 × উচ্চতা = (21 ফু. + 16 ফু.) × 2 × 10 ফু.

= (37 × 2 × 10) ব. ফু. = 740 ব. ফু.

18. ঢাকনীবিহীন একটি খোলা বাক্সের বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 15", 8" এবং 10" হইলে ঐ বাক্সের বহির্দেশের ক্ষেত্রফল কত?

19. 72 মিটার দীর্ঘ, 28 মিটার প্রশস্ত উঠানের চতুর্দিকে 7 মি. 5 ডেসি. মি. উচ্চ প্রাচীর আছে। প্রাচীরের বহির্দেশের ক্ষেত্রফল কত?

20. 12 ফুট দীর্ঘ, 8 ফুট প্রশস্ত ও 10 ফুট উচ্চ একটি ঘরে দুইটি দরজা ও

চারিটি জানালা আছে। প্রত্যেক দরজা 6 ফুট উচ্চ ও 4 ফুট চওড়া এবং প্রতি জানালা 5 ফুট উচ্চ ও 3 ফুট চওড়া। প্রতি বর্গফুট 3 প. হিসাবে দেওয়াল চারিটি চুণকাম করিতে কত খরচ পড়িবে ?

সংকেত : দরজা জানালার ক্ষেত্রফল, চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল হইতে বিয়োগ করিয়া চুণকামের হিসাব করিতে হইবে।

21. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। প্রতি বর্গগজে 5 শিলিং হিসাবে উহাতে কার্পেট বসাইতে 6 পা. 2 শি. 6 পে. এবং প্রতি বর্গগজ 9 পে. হারে দেওয়ালগুলি রং করিতে 2 পা. 12 শি. 6 পে. ব্যয় হইল। ঘরটির মাত্রা নির্ণয় কর। [P. U. 1925]

22. প্রতি বর্গফুট 5 শিলিং হারে 10 ফু. উচ্চ ও 20 ফুট দীর্ঘ ঘরের দেওয়ালগুলি রং করিতে 190 পাউণ্ড খরচ হইল। উহার মেঝেতে প্রতি বর্গগজ টা. 3·12 হারে কার্পেট বসাইতে কত খরচ হইবে ?

23. একটি ঘরের দেওয়ালগুলির মোট ক্ষেত্রফল 660 ব. ফু.। উহার মেঝের কালি 270 ব. ফু ও প্রস্থ 18 ফু.। ঐ ঘরের উচ্চতা কত ? [Pat. U 1949]

24. কোন ঘরের মেঝের ও ছাদের ক্ষেত্রফল একত্রে উহার চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফলের সমান। ঘরের দৈর্ঘ্য 20 ফুট ও প্রস্থ 16 ফুট হইলে, উহার উচ্চতা কত ? [D. B. 1931]

25. একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 150 গজ এবং বিস্তার 120 গজ। উহার দুই পার্শ্বের মধ্যভাগ হইতে দুইটি বিপরীত পার্শ্বের মধ্যভাগ পর্যন্ত 12 ফুট প্রশস্ত দুইটি রাস্তা আছে। প্রতি বর্গগজ $1\frac{1}{8}$ টাকা হারে রাস্তা দুইটি বাঁধাইবার ব্যয় নির্ণয় কর। [C. U. 1949]

26. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 21 ফুট. প্রস্থ 15 ফুট, এবং উচ্চতা 10 ফুট। 20 ইঞ্চি বিস্তৃত প্রতি গজ কাগজের মূল্য $3\frac{1}{2}$ পেন্স হইলে ঘরটির চারি দেওয়াল কাগজ দিয়া মুড়িতে কত ব্যয় হইবে ?

27. 100 ফুট দীর্ঘ ও 80 ফুট বিস্তৃত একটি উঠানের ভিতরে চারিদিকে 8 ফুট বিস্তৃত একটি পথ আছে। পথের ক্ষেত্রফল এবং প্রতিবর্গগজ 36 পয়সা হিসাবে পথ বাঁধাইবার খরচ নির্ণয় কর।

28. আয়তাকার একটি উঠানের দৈর্ঘ্য বিস্তারের 3 গুণ এবং উহা পাকা করিতে $1\frac{1}{2}$ ফুট-বর্গ 2028 খানা পাথর লাগে। উহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

29. বর্গাকার একখানি মাঠের ক্ষেত্রফল 8·1 একর। ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে মাঠের চারিদিকে ঘুরিয়া আসিতে একটি লোকের কত সময় লাগিবে ?

30. 40 মিটার দীর্ঘ একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণ বাধাইতে 2400 টাকা লাগে ; ঐ প্রাঙ্গণটি 5 মিটার কম চওড়া হইলে, 2000 টাকা লাগিত। প্রাঙ্গণটির প্রস্থ কত ?

31. একটী টেনিস কোর্টের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দেড়গুণ। প্রতি বর্গ মিটার 30 পয়সা হিসাবে ইহাকে সমতল করিবার ব্যয় 2205 টাকা। প্রতি মিটার রেলিং এর মূল্য 6 টাকা হইলে কোর্টের চতুর্দিকে রেলিং দিতে কত ব্যয় হইবে ?

[W. B. S. F. 1968]

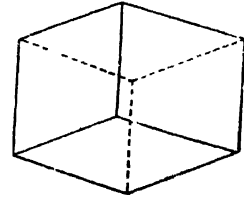
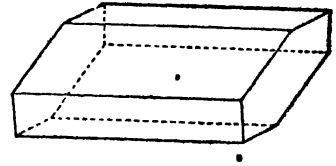
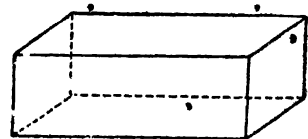
B. ঘন পরিমাণ (Cubic Measures) (পুনরালোচনা)

4·4. কয়েকটি সংজ্ঞা :

(*a*) যাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে, তাহাকে **ঘন** (Solid) বলে।

(*b*) ঘন বস্তুর দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধকে উহার এক একটি **মাত্রা** (Dimension) বলে।

(*c*) প্রত্যেক ঘন বস্তুর বহিরাবরণকে উহার **তল** বা **পৃষ্ঠ** (surface) বলে। প্রত্যেক ঘনবস্তু ছয়টি তল দ্বারা সীমাবদ্ধ।

(*d*) যে ঘন পদার্থের ছয়টি তলই সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র, তাহাকে **ঘনক** বা **ঘনক্ষেত্র** (Cube) বলে। প্রত্যেক ঘনক্ষেত্রের 12টি ধার ও ছয়টি তল আছে।

(*e*) যে ঘনক্ষেত্রের 6টি তলের মধ্যে বিপরীত তলগুলি পরস্পর সমান্তরাল, তাহাকে **চৌপল** (Parallelopiped) বলে।

(*f*) চৌপলের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ হইলে তাহাকে **সমকোণী চৌপল** বা **আয়তঘন** (Rectangular Parallelopiped) বলে। যেমন, ইট, বাক্স ইত্যাদি।

(*g*) কোন পদার্থ যতটা স্থান অধিকার করিয়া থাকে, তাহাকে উহার **ঘনফল** বা **আয়তন** (Volume) বলে।

(*h*) কোন ঘনক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ প্রত্যেকটি 1 ইঞ্চি হইলে তাহার ঘনফলকে 1 ঘন ইঞ্চি (Cubic inch) এবং প্রত্যেকটি 1 সে. মি. হইলে তাহার ঘনফলকে 1 ঘন সেমি (Cubic centimeter) ইত্যাদি বলে।

1 মি. × 1 মি. × 1 মি. = 1 ঘনমিটার = 1 স্টেয়ার (Stere)

4·5. (*a*) সমকোণী চৌপলের ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × বেধ

(*b*) সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য = ঘনফল ÷ (প্রস্থ × বেধ)

(*c*) সমকোণী চৌপলের প্রস্থ = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × বেধ)

(*d*) সমকোণী চৌপলের বেধ বা উচ্চতা = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ × প্রস্থ)

(*e*) সমকোণী চৌপলের পৃষ্ঠফল (বা তল পরিমাণ)
= 2(দৈর্ঘ্য × প্রস্থ + দৈর্ঘ্য × বেধ + প্রস্থ × বেধ)।

(*f*) ঘনকের ঘনফল = (বাহু)^3

(*g*] ঘনকের মোট তল পরিমাণ = 6 × (ধার বা বাহু)^2।

প্রশ্নমালা 4B

[1—10 নং অঙ্কগুলি ক্লাসের কাজ এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. একখানি ইটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 6 ইঞ্চি, 4 ইঞ্চি ও 2 ইঞ্চি। উহার ঘনফল কত?

নির্ণেয় ঘনফল = (6 × 4 × 2) ঘন ইঞ্চি = 48 ঘন ইঞ্চি।

2. একখানি সমকোণী চৌপল পাথরের দৈর্ঘ্য 4 ফু. 6 ই., প্রস্থ 3 ফু. 3ই, এবং ঘনফল 29 ঘন ফু. 432 ঘন ই. হইলে পাথরখানির বেধ কত?

29 ঘন ফু. 432 ঘ. ই. $= \left(29 + \frac{432}{1728}\right)$ ঘন ফুট $= 29\frac{1}{4}$ ঘন ফুট.
(কাটাকাটি: 4)

4 ফু. 6 ই. $= 4\frac{1}{2}$ ফু. এবং 3 ফু. 3 ই. $= 3\frac{1}{4}$ ফু.

∴ নির্ণেয় বেধ $= \dfrac{\text{পাথরের ঘনফল}}{\text{পাথরের দৈর্ঘ্য} \times \text{উহার প্রস্থ}} = \dfrac{29\frac{1}{4}\text{ ঘন ফুট}}{4\frac{1}{2}\text{ ফু.} \times 3\frac{1}{4}\text{ ফু.}}$

$= \left(\frac{117}{4} \times \frac{2}{9} \times \frac{4}{13}\right)$ ফু. $= 2$ ফুট।
(কাটাকাটি: 13)

3. যে ঘনকের প্রত্যেক ধার 2 ফু, 6 ই. উহার পৃষ্ঠফল কত ?

$\because$ ঘনকের পৃষ্ঠফল বা তল পরিমাণ $= 6 \times$ (প্রত্যেকধার)^2

এবং প্রত্যেক ধার $= 2$ ফু. 6 ই. $= 2\frac{1}{2}$ ফুট

$\therefore$ নির্ণেয় পৃষ্ঠফল $= \left(\overset{3}{\cancel{6}} \times \frac{5}{\cancel{2}} \times \frac{5}{2}\right)$ ব. ফু.

$= \frac{75}{2}$ ব. ফু. $= 37\frac{1}{2}$ ব. ফু. $= 37$ ব. ফু. 72 ব. ই.

4. একটি কাঠের গুডির দৈর্ঘ্য 24 সে. মি., প্রস্থ 4·5 সে. মি. এবং বেধ 2·5 সে. মি.। প্রত্যেক ঘন সেন্টিমিটার কাঠের মূল্য 75 প. হইলে সম্পূর্ণ গুঁড়িটির মূল্য কত ?

গুঁড়িটির ঘনফল $= (24 \times 4\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2})$ ঘন সেমি.

$= \left(\overset{\overset{6}{\cancel{12}}}{\cancel{24}} \times \frac{9}{\cancel{2}} \times \frac{5}{\cancel{2}}\right)$ ঘ. সেমি. $= 270$ ঘ. সেমি.

$\therefore$ নির্ণেয় মূল্য $= 75$ প. $\times 270 = 20250$ প. $= 202$ টা. 50 প.।

5. একখানি আয়তঘন পাথরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 8 ফু. 6 ই., 4 ফু. 4 ই. এবং 3 ফু. 2 ই. হইলে উহার ঘনফল কত ?

6. 8 সে. মি. দীর্ঘ, 6 সে. মি. বিস্তৃত ও 2 সে. মি. উচ্চ একটি বেদীর ঘনফল কত ?

7. একটি চৌবাচ্চায় 960 ঘ. সেমি. জল ধরে ; চৌবাচ্চাটির দৈর্ঘ্য 20 সে. মি. ও প্রস্থ 8 সে. মি. হইলে উহার গভীরতা কত ?

8. 140 ঘন ফুট আয়তন বিশিষ্ট কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 13 ফুট 4 ই. এবং বেধ 2 ফু. 4 ই. হইলে উহার প্রস্থ কত ?

9. 9 সে. মি. উচ্চ একটি বর্গাকার বেদীর ঘনফল 324 ঘন সে. মি. হইলে উহার দৈর্ঘ্য কত ?

10. একটি ঘনকের ঘনফল 37 ঘ. গ. 1 ঘন ফু. হইলে উহার একটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল কত ?

11. 7 ফু. 6 ই. দীর্ঘ, 3 ফু. প্রশস্ত একটি চৌবাচ্চা হইতে কি পরিমাণ জল বাহির করিয়া দিলে জলের গভীরতা 4 ইঞ্চি কমিয়া যায় ?

12. 32 মি. দীর্ঘ, 3 মি, উচ্চ এবং 40 সেমি. পুরু দেওয়ালের জন্য 25 সেমি. $\times$ 15 সেমি. $\times$ 8 সেমি. মাপের কয়খানি ইট লাগিবে ?

13. একটি টিনের বাক্সের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 2·4 ডেসিমি., 7·5 সেমি. এবং 12 সেমি. ; উহাতে কত লিটার জল ধরে ?

14. 1 ঘন সেমি. পেট্রলের ওজন 0·7 গ্রাম হইলে 1·5 ডেসিমি. দীর্ঘ, 1·2 ডেসিমি. বিস্তৃত, 4 ডেসিমি. উচ্চ টিনে যে পরিমাণ পেট্রল ধরে তাহার ওজন কত ?

15. $1\frac{1}{2}$ মি. দীর্ঘ, 88 সেমি. প্রশস্ত একটি আয়তাকার ট্যাঙ্কে 65 সেমি. গভীর জল আছে ; ঐ জল 2 মি দীর্ঘ, 1 মি প্রশস্ত একটি খালি ট্যাঙ্কে ঢালিলে এই ট্যাঙ্কে জলের গভীরতা কত হইবে ?

16. 1 ঘন সেমি. জলের ওজন 1 গ্রাম হইলে, $1\frac{1}{2}$ লিটার জলের ওজন কত ?

17. 2·5 মি. দীর্ঘ. 1·4 মি. প্রশস্ত একটি ট্যাঙ্ক হইতে 560 গ্রা. জল বাহির করিয়া লইলে জলের গভীরতা কত কমিবে ?

18. একটি বন্ধ বাক্সের বহির্দেশের মাত্রা 10 ই.×9 ই.×8 ই. ; কাঠ $\frac{1}{2}$ ই. পুরু হইলে বাক্সটি তৈয়ারী করিতে কত ঘন ইঞ্চি কাঠ লাগিবে ?

19. 40 গজ দীর্ঘ, 30 গজ প্রশস্ত একটি মাঠের চতুর্দিকে 5 ফুট বিস্তৃত একটি পথ আছে। 3 ইঞ্চি পুরু করিয়া ভাঙ্গা পাথর ফেলিলে কত ঘন ফুট পাথর লাগিবে ?

*20. 120 ফুট দীর্ঘ ও 90 ফুট বিস্তৃত একটি আয়তাকার উদ্যানের বাহিরে চারিধারে 6 ফুট উচ্চ ও 9 ইঞ্চি পুরু প্রাচীর প্রস্তুত করিতে 9 ইঞ্চি দীর্ঘ, $4\frac{1}{2}$ ই. প্রশস্ত ও 3 ইঞ্চি পুরু কতগুলি ইট লাগিবে ? [C. U. 1935]

*21. 5 ফুট দীর্ঘ, 4 ফুট বিস্তৃত, $3\frac{2}{3}$ ফুট গভীর কোন চৌবাচ্চায় 30 ঘন ফুট জল আছে। জলের নীচে 9 ই.×3 ই.×$2\frac{2}{3}$ ই. মাত্রাযুক্ত ইট ফেলায় জল ঠিক চৌবাচ্চার কাণায় কাণায় পৌছিল। যদি প্রত্যেক ইট নিজ আয়তনের $\frac{1}{17}$ অংশ জল শোষণ করে, তবে চৌবাচ্চাটিতে কতগুলি ইট ফেলা হইয়াছিল ? [C. U. 1937]

22. কোন জলাধার একটি নল দ্বারা $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় জলপূর্ণ হয়। যদি নলটির প্রস্থচ্ছেদ (cross-section) 3 বর্গ ইঞ্চি হয় এবং উহার ভিতর দিয়া ঘণ্টায় 6·4 মাইল বেগে জল প্রবেশ করে, তবে চৌবাচ্চাটির ঘনফল কত ? [R M. A.]

23. একটি চৌবাচ্চায় $243\frac{3}{4}$ ঘনফুট জল ধরে ; 4 ফুট 4 ইঞ্চি গভীর আর একটি বর্গাকার তল বিশিষ্ট চৌবাচ্চায় যদি উহার 4 গুণ জল ধরে, তবে দ্বিতীয় চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য কত ? [C. U. 1910]

24. এক স্টেয়ার কাঠের মূল্য 115·25 পয়সা হইলে, 2305 টাকা মূল্যের কাঠ হইতে 10 মি. লম্বা, 2 ডেসি. মি. চওড়া, 1 ডেসি. মি. পুরু কতগুলি বরগা পাওয়া যাইবে ?

5

ঐকিক নিয়ম, সময় ও কার্য, সময় ও দূরত্ব

Simple cases of Unitary Method including Time and work, Time and Distance.

A. ঐকিক নিয়ম (Unitary Method)

(পুনরালোচনা)

51. যে কোন জাতীয় এককের মানের সাহায্যে সেই জাতীয় একাধিক এককের মান নির্ণয় পদ্ধতিকে **ঐকিক নিয়ম** বলে।

52. ঐকিক নিয়মের প্রশ্নে দুইটি অংশ থাকে ; একটি অংশে কিছু দেওয়া থাকে এবং অপর অংশে কি বাহির করিতে হইবে তাহার নির্দেশ থাকে। দ্বিতীয় অংশ হইতে কি বাহির করিতে হইবে তাহা বুঝিয়া লইয়া প্রথম অংশটিকে এরূপভাবে সাজাইতে হইবে যে, উত্তরটির সমজাতীয় রাশিটি যেন ডান দিকের শেষে থাকে। পরে অঙ্কটির সমাধান করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 5A

[1—7 নং অঙ্কগুলি ক্লাসের কাজ এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. যদি 15টি পাম্প দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া 7 দিনে 1260 টন জল তুলিতে পারে, তবে কতগুলি পাম্প দৈনিক 12 ঘণ্টা কাজ করিয়া 14 দিনে 7560 টন জল তুলিতে পারিবে? [C. U. 1950 Special]

দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া 7 দিনে 1260 টন জল 15টি পাম্প তুলিতেছে'

∴ ,, 1 ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, ,, (15×8) ,, ,,

∴ ,, 1 ,, ,, ,, 1 ,, ,, ,, ,, (15×8×7) পাম্প তুলিতেছে

∴ ,, 1 ,, ,, ,, 1 ,, 1 ,, ,, $\frac{15\times8\times7}{1260}$,, ,,

∴ ,, 12 ,, ,, ,, 1 ,, 1 ,, ,, $\frac{15\times8\times7}{1260\times12}$,, ,,

∴ দৈনিক 12 ঘণ্টা কাজ করিয়া 14 দিনে 1 টন জল $\frac{15\times8\times7}{1260\times12\times14}$ পাম্প তুলিতেছে।

∴ " " " " " " " 7560 " " $\frac{15\times8\times7\times7560}{1260\times12\times14}$ বা 30 "

∴ নির্ণেয় পাম্পের সংখ্যা = 30.

2. 8 জন পুরুষ, বা 12 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 10 দিনে করিতে পারে। 4 জন পুরুষ এবং 16 জন স্ত্রীলোক কত দিনে উহা করিবে? [D. B. 1926]

8 জন পুরুষের কাজ = 12 জন স্ত্রীর কাজ

∴ 1 " " " $=\frac{12}{8}$ " " "

∴ 4 জন " " $=\frac{12}{8}\times4$ বা 6 জন স্ত্রীর কাজ

∴ 4 জন পুরুষ + 16 জন স্ত্রীর কাজ = 6 স্ত্রী + 16 স্ত্রী বা 22 জন স্ত্রীর কাজ।

12 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 10 দিনে করিতে পারে।

∴ 1 " " " " 10 × 12 দিনে করিতে পারে।

∴ 22 " " " " $\frac{10\times12}{22}$ বা $\frac{60}{11}$ বা $5\frac{5}{11}$ দিনে করিতে পারে।

∴ নির্ণেয় দিন সংখ্যা = $5\frac{5}{11}$.

3. 100 জন মজুর 150 দিনে একটি পরিখা খনন করিতে পারে। 50 দিন কাজ করিয়া যদি 20 জন মজুর চলিয়া যায় তবে অবশিষ্ট লোক আর কত দিনে কাজটি শেষ করিতে পারিবে?

50 দিন পরে (150 − 50) বা 100 দিনের কাজ বাকী থাকে। 20 জন চলিয়া গেলে আর (100 − 20) বা 80 জন থাকে।

100 জনে অবশিষ্ট কাজ 100 দিনে করিতে পারে।

∴ 1 „ „ „ 100×100 দিনে করিতে পারে।

∴ 80 „ „ „ $\frac{100 \times 100}{80}$ বা 125 দিনে করিতে পারে।

∴ নির্ণেয় দিন সংখ্যা = 125.

4. যদি 24 জন লোক দৈনিক $8\frac{1}{2}$ ঘণ্টা কাজ করিয়া 15 দিনে একটি কাজ সম্পন্ন করিতে পারে, তাহা হইলে দৈনিক 6 ঘণ্টা কাজ করিয়া এইরূপ কয় জন লোক 17 দিনে উহার দ্বিগুণ কাজ করিতে পারিবে? [C. U. 1916]

5. 8 জন পুরুষ অথবা 15 জন স্ত্রীলোক 30 দিনে 120 টাকা উপার্জন করে। 21 জন পুরুষ এবং 24 জন স্ত্রীলোক 45 দিনে কত টাকা উপার্জন করিবে?

[C. U. 1907]

6. একটি দুর্গে 420 জন সৈন্যের 35 দিনের খাদ্য আছে। 5 দিন পরে কোন খাদ্য না লইয়া আরও 210 জন সৈন্য সেই দুর্গে আসিল। দুর্গে যে খাদ্য আছে তাহার দ্বারা আর কয় দিন চলিবে? [C. U. 1918]

7. 8 জন পুরুষ অথবা 12 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 25 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। 6 জন পুরুষ এবং 11 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজ কত দিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে? [C. U. 1928]

8. 5 জন পূর্ণবয়স্ক লোক এবং 9টি বালক কোন একটি কাজ 17 দিনে করিতে পারিলে, 9 জন পূর্ণবয়স্ক লোক এবং 12টি বালক সেই কাজ কত দিনে করিতে পারিবে, যদি 2 জন পূর্ণবয়স্ক লোক 3টি বালকের সমান কাজ করিতে পারে?

9. 40 জন লোক দৈনিক 10 ঘণ্টা কাজ করিয়া $8\frac{1}{2}$ দিনে 19 একর জমির শস্য কাটিতে পারে। 17 জন লোক দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া 50 দিনে কত একর জমির শস্য কাটিতে পারে? [C. U. 1929]

10. এক বুশেল গমের মূল্য যখন 9 শি. 4 পে. তখন 4 পেনিতে 3 পা. 9 আউন্স ওজনের রুটি পাওয়া যায়। গমের মূল্য প্রতি বুশেল 11 শি. 1 পে. হইলে 6 পেনি রুটির ওজন কত হইবে? [C. U. 1901]

11. প্রত্যহ 9 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া এক ব্যক্তি 35 দিনে 600 মাইল চলিতে

পারে। উহার $1\frac{1}{2}$ গুণ বেগে চলিলে এবং প্রত্যহ 10 ঘণ্টা বিশ্রাম করিলে সে কত দিনে 375 মাইল চলিবে? [C. U. 1888]

12. যদি প্রতি 10 মিনিটে 3 বার করিয়া গোলাবর্ষণ করিয়া 6টি কামানে 60 ঘণ্টায় কোন দুর্গ ভাঙ্গিতে পারে, তবে প্রতি 5 মিনিটে 2 বার গোলাবর্ষণ করিয়া কতগুলি কামানে 15 ঘণ্টায় উহা ভাঙ্গিবে? [D. B. 1941]

13. কোন ঠিকাদার 38 দিনে একটি কাজ করিবার চুক্তি করিয়া 60 জন লোক নিযুক্ত করিল। যদি ইহাতে 22 দিনে কাজটির $\frac{3}{7}$ অংশ সম্পন্ন হইয়া থাকে, তবে যথা-সময়ে উহা সমাপ্ত করার জন্য আর কত জন অতিরিক্ত লোক নিযুক্ত করিতে হইবে?

14. কোন দুর্গে 2200 লোকের 50 দিনের খাদ্য ছিল। 17 দিন পরে আরও কয়েকজন লোক সেখানে আসায় 20 দিনেই খাদ্য শেষ হইল। পরে কত জন লোক আসিয়াছিল? [D. B. 1940]

15. যদি 5 সেকেণ্ডে 3টি অক্ষর বসাইতে পারে এরূপ 10 জন মুদ্রাকর $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় 27 পৃষ্ঠা শেষ করিতে পারে তবে 6 সেকেণ্ডে 5টি অক্ষর বসাইতে পারে এরূপ কয়জন মুদ্রাকর 1 ঘণ্টায় 50 পৃষ্ঠা শেষ করিতে পারিবে? [M. U. 1865]

***16.** 60 জন লোক 250 দিনে একটি গৃহ নির্মাণ করিতে পারে। তাহারা কার্যটি আরম্ভ করিল, কিন্তু 200 দিন পরে মন্দ আবহাওয়ার জন্য 10 দিন কাজ বন্ধ রহিল। নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে কাজটি শেষ করিতে হইলে, কয়জন অতিরিক্ত লোক নিযুক্ত করিতে হইবে? [W. B. S. F. 1958 Compl]

17. যদি 45 জন স্ত্রীলোক 48 দিনে 207 পাউণ্ড পায়, তবে কত জন পুরুষ 16 দিনে 76 পা. 13 শি. 4 পে. বেতন পাইবে? (1 জন পুরুষের দৈনিক বেতন 1 জন স্ত্রীলোকের দৈনিক বেতনের দ্বিগুণ।) [C. U. 1912]

***18.** একটি ঠিকাদার একটি কাজ কোন নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে শেষ করিয়া দিবে বলিয়া প্রত্যহ 9 ঘণ্টা করিয়া খাটে এরূপ 55 জন লোক নিযুক্ত করিল। তাহারা নির্দিষ্ট সময়ের $\frac{3}{4}$ অংশ সময়ে কার্যটির $\frac{3}{7}$ অংশ সম্পন্ন করিল। প্রত্যহ 11 ঘণ্টা করিয়া খাটে এরূপ কতজন লোক নিযুক্ত করিলে কার্যটি নির্দিষ্ট সময়ে শেষ হইবে? [C. U. 1917]

***19.** যদি 6টি ঘোড়ার মূল্য 24টি গরুর মূল্যের, 10টি গরুর মূল্য 8টি মহিষের মূল্যের, 4টি মহিষের মূল্য 15টি গাধার মূল্যের, 4টি গাধার মূল্য 32টি ভেড়ার মূল্যের সমান হয় এবং 9টি ভেড়ার মূল্য 25 টাকা হয়, তবে 1টি ঘোড়ার মূল্য কত? [D. B. 1926]

B. সময় ও কার্য

(Time and Work)

(পুনরালোচনা)

5.3. (*a*) কোন কার্য বলিলে একটি সম্পূর্ণ কাজ (অর্থাৎ 1) বুঝায়।

(*b*) দিন-সংখ্যা বা ঘণ্টা-সংখ্যা বা মিনিট-সংখ্যা বা সেকেণ্ড-সংখ্যা দ্বারা ঐ সম্পাদিত কাযের পরিমাণকে ভাগ দিলে 1 দিন বা 1 ঘণ্টা বা 1 মিনিট বা 1 সেকেণ্ডে সম্পাদিত কার্যের পরিমাণ পাওয়া যায়।

যেমন, 2 দিনে কার্য করিলে 1 দিনে $(1 \div 2)$ বা $\frac{1}{2}$ অংশ কার্য হয়। 3 মিনিটে $\frac{1}{2}$ অংশ কার্য করিলে 1 মিনিটে $(\frac{1}{2} \div 3)$ বা $\frac{1}{6}$ অংশ কার্য হয়। $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডে $\frac{1}{5}$ অংশ কার্য হইলে 1 সেকেণ্ডে $(\frac{1}{5} \div 2\frac{1}{2})$ বা $(\frac{1}{5} \times \frac{2}{5})$ বা $\frac{2}{25}$ অংশ কার্য হয়।

(*c*) দিন-সংখ্যা বা ঘণ্টা-সংখ্যা বা মিনিট-সংখ্যা বা সেকেণ্ড-সংখ্যাকে ঐ সময়ের মধ্যে সম্পাদিত কার্যের অংশ দ্বারা ভাগ করিলে কত দিন বা ঘণ্টা বা মিনিট বা সেকেণ্ডে সমস্ত কার্য করিতে পারা যাইবে তাহা পাওয়া যাইবে। যেমন, 1 দিনে কোন কার্যের $\frac{1}{3}$ অংশ সম্পন্ন হইলে সমস্ত কাজ $(1 \div \frac{1}{3})$ বা 3 দিনে সম্পন্ন হইবে। 3 ঘণ্টায় কোন কার্যের $\frac{1}{4}$ অংশ সম্পন্ন হইলে সমস্ত কার্য $(3 \div \frac{1}{4})$ বা 12 ঘণ্টায় সম্পন্ন হইবে।

5·4. দুই বা ততোধিক ব্যক্তি বিভিন্ন সময়ে একটি কার্য করিতে থাকিলে প্রথমে একক সময়ে উহারা কার্যের যত অংশ করে, পৃথক্ পৃথক্ ভাবে বাহির করিয়া ঐ সকল কার্যের অংশের সমষ্টি দ্বারা একক সময়কে ভাগ করিলে যে সময় পাওয়া যায়, তাহা ঐ সকল ব্যক্তির একত্রে কার্যটি সম্পন্ন করিবার সময়।

প্রশ্নমালা 5B.

[1—9, 22—25 ক্লাসের কাজ এবং বাকী বাড়ীর কাজ]

. A কোন কার্য 10 দিনে এবং B 12 দিনে করিতে পারে। উহারা একত্রে ঐ কার্য কত দিনে করিবে?

A 10 দিনে সমস্ত কার্য করে। ∴ A 1 দিনে ঐ কার্যের $\frac{1}{10}$ অংশ করে।

আবার B 12 দিনে সমস্ত কার্য করে।

∴ B 1 দিনে ঐ কার্যের $\frac{1}{12}$ অংশ করে।

A ও B একত্রে 1 দিনে $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)$ বা $\left(\frac{6+5}{60}\right)$ বা $\frac{11}{60}$ অংশ কার্য করে

∴ উহারা সমস্ত কাজটি $\left(1\div\frac{11}{60}\right)$ বা $\left(1\times\frac{60}{11}\right)$ বা $\frac{60}{11}$ দিনে

বা $5\frac{5}{11}$ দিনে করিবে।

2. কোন কার্য A ও B একত্রে 6 দিনে, B ও C 9 দিনে এবং A ও C 12 দিনে করিতে পারে। A একাকী কার্যটি কত দিনে করিবে?

(A+B) 1 দিনে কার্যটির $\frac{1}{6}$ অংশ করে, (B+C) 1 দিনে কার্যটির $\frac{1}{9}$ অংশ করে,

এবং (A+C) 1 দিনে কার্যটির $\frac{1}{12}$ অংশ করে।

∴ যোগ করিয়া, 2(A+B+C) এর 1 দিনের কাজ $=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}\right)$

বা $\left(\frac{6+4+3}{36}\right)$ বা $\frac{13}{36}$ অংশ।

∴ A+B+C এর 1 দিনের কার্য $=\left(\frac{13}{36}\div2\right)=\frac{13}{72}$ অংশ।

∴ A 1 দিনে করে $\left(\frac{13}{72}-\frac{1}{9}\right)$ বা $\left(\frac{13-8}{72}\right)$ বা $\frac{5}{72}$ অংশ।

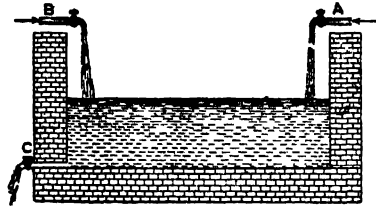
∴ সমস্ত কার্য $\left(1\div\frac{5}{72}\right)$ দিনে বা $\frac{72}{5}$ দিনে বা $14\frac{2}{5}$ দিনে করিবে।

3. একটি চৌবাচ্চা A ও B নল দ্বারা যথাক্রমে 3 মিনিটে ও 6 মিনিটে পূর্ণ হয়। দুইটি নলই খোলা থাকিলে খালি চৌবাচ্চাটি কত সময়ে পূর্ণ হয়?

A 1 মি. এ চৌবাচ্চার $\frac{1}{3}$ অংশ এবং B 1 মি. এ $\frac{1}{6}$ অংশ পূর্ণ করে।

∴ A ও B নল একত্রে খোলা থাকিলে 1 মিনিটে চৌবাচ্চার $(\frac{1}{3}+\frac{1}{6})$ বা $\frac{1}{2}$ অংশ পূর্ণ করে।

∴ সমস্ত চৌবাচ্চা পূর্ণ হইতে $(1\div\frac{1}{2})$ বা 2 মিনিট সময় লাগে।

4. একটি চৌবাচ্চা A ও B নল দ্বারা যথাক্রমে 10 ও 12 ঘণ্টায় পূর্ণ হয় এবং C নল দ্বারা 20 ঘণ্টায় খালি হয়। তিনটি নলই এক সঙ্গে খোলা থাকিলে কতক্ষণে খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

A নলটি 1 ঘণ্টায় চৌবাচ্চার $\frac{1}{10}$ অংশ পূর্ণ করে।
B ,, 1 ,, ,, $\frac{1}{12}$ অংশ পূর্ণ করে।
C ,, 1 ,, ,, $\frac{1}{20}$ অংশ খালি করে।
∴ A, B ও C নল 1 ঘণ্টায় চৌবাচ্চার $\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}$ বা $\frac{2}{15}$ অংশ পূর্ণ করে।
∴ খালি চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে $1\div\frac{2}{15}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$ ঘণ্টায়।

5. একজন লোক যে কার্য 20 দিনে করিতে পারে, একজন বালক তাহা 30 দিনে করিতে পারে। উহারা একত্রে করিলে ঐ কার্য কত দিনে সম্পন্ন হইবে ?

6. রাম ও শ্যাম একত্রে একটি কার্য 5 ঘণ্টায় করে ; শ্যাম একাকী ঐ কার্য 10 ঘণ্টায় করে। রাম একাকী ঐ কার্য কত সময়ে করিবে ?

7. একটি চৌবাচ্চা একটি নল দ্বারা 3 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং অপর একটি নল দ্বারা 4 মিনিটে খালি হয়। যদি দুইটি নলই এক সঙ্গে খোলা থাকে তবে খালি চৌবাচ্চা কতক্ষণে পূর্ণ হইবে ?

8. A ও B একত্রে একটি কার্য 12 দিনে, B ও C একত্রে ঐ কাজ 15 দিনে এবং A ও C একত্রে ঐ কার্য 20 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। A একাকী ঐ কার্য কত দিনে করিবে ? [C. U. 1939]

9. A, B ও C একত্রে 3 দিনে একটি কাজ শেষ করিতে পারে। A একাকী 5 দিনে এবং B একাকী 12 দিনে করিতে পারিলে, C একাকী কাজটি কত দিনে করিতে পারিবে ? [C. U. 1948]

10. A একাকী কোন কার্য 12 দিনে এবং B একাকী 6 দিনে করিতে পারে। উভয়ে একত্রে 2 দিন কাজ করিবার পর B চলিয়া গেল। A একাকী আর কত দিনে কার্যটি শেষ করিবে ? [C. U. 1931]

11. A যে কাজ 1 দিনে করিতে পারে; B তাহা 2 দিনে, C 3 দিনে এবং D 4 দিনে করিতে পারে। উহারা চার জনে একত্রে যে কাজ 8 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে তাহা C একা করিলে কত দিনে সম্পন্ন হইবে? [G. U. 1948]

12. 3 জন পুরুষ এবং 2 জন বালক একত্রে 15 দিনে একটি কাজ করে, 2 জন পুরুষ ও 3 জন বালক একত্রে ঐ কাজ 18 দিনে করিতে পারে। কত সময়ে 1 জন পুরুষ ও 1 জন বালক একত্রে ঐ কাজটি করিবে?

13. একটি চৌবাচ্চা দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে পূর্ণ হয়। দুইটি নলই একসঙ্গে খুলিয়া দেওয়ার পর কখন প্রথম নলটি বন্ধ করিলে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইতে আরও 10 মিনিট সময় লাগিবে? [C. U. 1926]

14. একটি কাজ A 9 দিনে এবং B 18 দিনে করিতে পারে। উহারা একত্রে কাজটি আরম্ভ করিয়া শেষ হইবার 3 দিন পূর্বে A চলিয়া গেল। মোট কত দিনে কাজটি শেষ হইল?

A 9 দিনে কাজটি করে ∴ A 1 দিনে কাজটির $\frac{1}{9}$ অংশ করে।

B 18 „ „ „ ∴ B 1 দিনে „ $\frac{1}{18}$ অংশ করে।

কাজটি শেষ হইবার 3 দিন পূবে A চলিয়া গেল। ∴ শেষ 3 দিন B কাজটি একা করিয়াছিল। B 3 দিনে করে $\frac{1}{18}\times 3=\frac{1}{6}$ অংশ। বাকী কাজ $(1-\frac{1}{6})=\frac{5}{6}$ অংশ A+B একত্রে করে।

(A+B) 1 দিনে করে $(\frac{1}{9}+\frac{1}{18})=\frac{1}{6}$ অংশ

A+B একত্রে $\frac{1}{6}$ অংশ করে = 1 দিনে

„ „ 1 „ „ = 6 „

„ „ $\frac{5}{6}$ „ „ $=6\times\frac{5}{6}=5$ দিনে।

∴ কাজটি শেষ হইতে মোট 5+3=8 দিন লাগিয়াছিল।

15. A ও B একত্রে একটি কাজ 15 দিনে করিতে পারে। B এর সহিত 8 দিন কাজ করিবার পর A চলিয়া গেল এবং B আর 15 দিনে বাকী কাজটি সম্পন্ন করিল। ঐ কাজ A একা করিলে কত দিনে করিতে পারিত? [C. U. 1947]

16. যদি 3 জন পুরুষ ও 5 জন স্ত্রীলোক একত্রে একটি কাজ 8 দিনে করিতে পারে এবং 2 জন পুরুষ 7 জন বালকের সাহায্যে ঐ কাজ 12 দিনে করিতে পারে, তবে 13 জন পুরুষ, 14 জন বালক এবং 15 জন স্ত্রীলোক ঐ কাজ কতদিনে করিবে? [B. U. 1898]

17. যদি 12 জন পুরুষ এবং 10 জন বালক কোন কাজের $\frac{3}{8}$ অংশ 3 দিনে

এবং 4 জন পুরুষ ও 5 জন বালক ঐ কাজের $\frac{1}{27}$ অংশ 7 দিনে করে, তবে 7 জন পুরুষ ঐ কাজ কতদিনে করিবে ?

18. প্রতিদিন 7 ঘণ্টা কাজ করিয়া একটি কাজ A 6 দিনে এবং B 8 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে প্রতিদিন 8 ঘণ্টা কাজ করিলে কত দিনে কাজটি সম্পন্ন হইবে ? [C. U. 1930]

19. যে কাজ B একা 1 দিনে করিতে পারে A একা 1 দিনে তাহার 3 গুণ কাজ করিতে পারে। তাহারা একত্রে 9 দিনে যে কাজের $\frac{2}{3}$ অংশ করিল, তাহা একা করিতে কাহার কত দিন লাগিবে ? [C. U. 1946]

20. একটি চৌবাচ্চা A ও B নল দ্বারা যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে পূর্ণ হয়। দুইটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দেওয়া হইল। কখন A নলটি বন্ধ করিলে চৌবাচ্চাটি 18 মিনিটে পূর্ণ হইবে ? [S. F. 1963]

21. একটি চৌবাচ্চা এক নল দ্বারা 10 মিনিটে পূর্ণ হয়, আর একটি নল দ্বারা 15 মিনিটে খালি হয়। যদি নল দুইটি পর পর এক এক মিনিট করিয়া খুলিয়া রাখা হয়, তাহা হইলে কত সময়ে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

22 A যে কাজ 3 দিনে করিতে পারে B তাহার 3 গুণ কাজ 8 দিনে এবং C তাহার 5 গুণ কাজ 12 দিনে করিতে পারে। প্রত্যেকে প্রতিদিন 9 ঘণ্টা কাজ করিলে উহারা তিন জনে একত্রে ঐ কাজ কত ঘণ্টায় করিবে ? [P. U. 1927]

23. B ও C একত্রে যে কাজ করিতে পারে A একা তাহা করিতে পারে। একটি কাজ A ও B একত্রে 9 ঘণ্টা 36 মিনিটে এবং C একা 48 ঘণ্টায় করিতে পারে। B একা করিলে ঐ কাজ কত ঘণ্টায় করিবে ?

$$A=B+C.$$

$$\because \quad (A+B)=(B+C)+B=2B+C.$$

(A+B) বা (2B+C) 1 ঘণ্টায় কাজের $\frac{5}{48}$ অংশ করে

$\because$ C 1 „ „ $\frac{1}{48}$.

বিয়োগ করিয়া, 2B 1 ঘণ্টায় কাজের $\left(\frac{5}{48}-\frac{1}{48}\right)$ বা $\frac{1}{12}$ অংশ করে।

$\therefore$ B 1 „ „ $\frac{1}{12\times 2}$ বা $\frac{1}{24}$

$\therefore$ B সমস্ত কাজ $\left(1\div\frac{1}{24}\right)$ বা 24 ঘণ্টায় করে।

*24. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। প্রথম দুইটি নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে 3 ঘণ্টা ও 3 ঘণ্টা 45 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং তৃতীয়টি দ্বারা 1 ঘণ্টায় খালি হয়। নল তিনটিকে যথাক্রমে বেলা 1 টা, 2টা ও 3 টার সময় খুলিলে কখন চৌবাচ্চা খালি হইবে? [C. U. 1929]

25. একটি চৌবাচ্চায় তিনটি নল আছে। উহাদের মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয় নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি যথাক্রমে 10 ও 12 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং তৃতীয় নলটি দ্বারা চৌবাচ্চাটি খালি হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খোলা থাকিলে চৌবাচ্চাটি 15 মিনিটে পূর্ণ হয়। তৃতীয় নল দ্বারা পূর্ণ চৌবাচ্চা কত সময়ে খালি হইবে?

[C. U. 1938, 1951]

26. A একটি কাজের অর্ধেক $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় শেষ করিতে পারে, B বাকী কাজের $\frac{1}{4}$ অংশ $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় শেষ করিতে পারে এবং C সমস্ত কাজটি $5\frac{1}{4}$ ঘণ্টায় শেষ করিতে পারে। 3 জনে একত্রে কাজ করিলে ঐ কাজ কত সময়ে শেষ হইবে?

[P. U. 1903]

*27. তিনটি নল A, B এবং C একটি চৌবাচ্চা যথাক্রমে 5 মি., 6 মি. এবং $7\frac{1}{2}$ মিনিটে পূর্ণ করিতে পারে। তিনটি নলই একসঙ্গে খুলিয়া দেওয়া হইল, কিন্তু 1 মিনিট পরে A নলটি বন্ধ করিয়া দেওয়া হইল। কতক্ষণে B ও C নল দ্বারা চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে? [C. U. 1903]

28. 21 দিনে একখানি গৃহ নির্মাণ করিয়া দিবার চুক্তিতে কোন ঠিকাদার 15 জন লোক নিযুক্ত করেন। 15 দিন পরে তিনি আরও 9 জন লোক নিযুক্ত করায় কাজটী নির্দিষ্ট সময়ের 1 দিন পূর্বেই শেষ হইয়া যায়। অতিরিক্ত 9 জন লোক নিযুক্ত না করিলে নির্দিষ্ট সময়ের কত পরে কাজটি শেষ হইত?

29. একটি কাজ শেষ করিতে 40 জন লোকের যত দিন লাগে, 30 জন লোকের তাহা অপেক্ষা 6 দিন অধিক লাগে। 60 জন লোকে ঐ কাজ কত দিনে করিতে পারিবে? [W. B. S F. 1956]

*30. A ও B 22টা. 50 পয়সা লইয়া কোন কাজ 16 দিনে সম্পন্ন করিয়া দিবে বলিয়া চুক্তি করিল। A একাকী কাজটি 30 দিনে এবং B একাকী 45 দিনে শেষ করিতে পারে। A ও B 10 দিন একত্রে কাজ করিবার পর C-এর সাহায্যে নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি শেষ করিল। উহারা ঐ টাকা কিরূপে ভাগ করিবে?

[I. P. S. 1940]

31. কোন কাজ A 12 দিনে, B 16 দিনে, C 20 দিনে এবং D 24 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। উহারা চার জন একত্রে কাজ আরম্ভ করিল। A 3 দিন কাজ করিয়া চলিয়া গেল, B উহার পরের দিন কাজ করিয়া চলিয়া গেল, C কাজটি শেষ হইবার 5 দিন পূর্বে চলিয়া গেল। কাজটি শেষ হইতে মোট কতদিন লাগিল ?

A 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{12}$ অংশ $\therefore$ A 3 দিনে করে $\frac{1}{12}\times 3=\frac{1}{4}$ অংশ। B মোট কাজ করে $3+1=4$ দিন। B 1 দিনে করে $\frac{1}{16}$ অংশ $\therefore$ B 4 দিনে করে $\frac{1}{16}\times 4=\frac{1}{4}$ অংশ।

মনে করা যাক কাজটি শেষ হইতে মোট x দিন লাগিয়াছিল। $\therefore$ C করে $(x-5)$ দিন এবং D করে x দিন। $\because$ C 1 দিনে করে $\frac{1}{20}$ অংশ $\therefore$ C, $(x-5)$ দিনে করে $\frac{x-5}{20}$ অংশ।

D x দিনে করে $\frac{x}{24}$ অংশ $\therefore$ প্রশ্নানুসারে $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{x-5}{20}+\frac{x}{24}=1$

[$\because$ সম্পূর্ণ কাজ $=1$ অংশ]

$\frac{x}{20}+\frac{x}{24}=\frac{3}{4}$ $\therefore$ $x=8\frac{2}{11}$ দিন $\therefore$ নির্ণেয় দিন $=8\frac{2}{11}$.

C. সময় ও দূরত্ব

Time & Distance

(পুনরালোচনা)

5·1 কোন গতিশীল ব্যক্তি বা বস্তুর যে হারে অবস্থানের পরিবর্তন হয় তাহাকে গতিবেগ (Velocity) বলে। যদি কোন বস্তু 1 ঘণ্টায় 5 মাইল যায় তাহার গতিবেগ "ঘণ্টায় 5 মাইল" অথবা ইংরাজীতে, '5 Miles per hour' (সংক্ষেপে 5 m p. h) বলা হয়। গতিবেগের দিক ও মান আছে। চিত্রে এই গতিবেগ নিম্নলিখিতরূপে দেখান যায় :

5 মাইল

A → B

5·2. গতিবেগ সম্বন্ধে কয়েকটি সূত্র :

(*a*) (1) দূরত্ব = গতিবেগ × সময়

(2) গতিবেগ $=\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}}$ (3) সময় $=\frac{\text{দূরত্ব}}{\text{গতিবেগ}}$

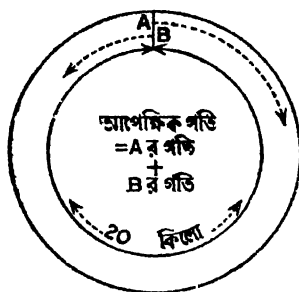
(*b*) যদি দুইটি বস্তুর সমান্তরাল পথে দুইটি গতিবেগ থাকে তাহা হইলে

আপেক্ষিক গতিবেগ = বস্তু দুইটির গতিবেগের অন্তর

(Relative Velocity) (বস্তু দুইটি একই দিকে চলিলে

অথবা

আপেক্ষিক গতিবেগ = বস্তু দুইটির গতিবেগের সমষ্টি

(বস্তু দুইটি বিপরীত দিকে চলিলে)

(*c*) দুইটি গতিশীল বস্তুর মিলিত হইবার সময়

$$= \frac{\text{উহাদের মধ্যে ব্যবধান}}{\text{উহাদের আপেক্ষিক গতিবেগ}}$$

5·3. দুইটি বস্তু বৃত্তাকার পথের কোন স্থান হইতে বৃত্তপথে ঘুরিতে থাকিলে তাহাদের মিলিত হইবার সময়

$$= \frac{\text{বৃত্তাকার পথের দৈর্ঘ্য}}{\text{উহাদের আপেক্ষিক গতি}}$$

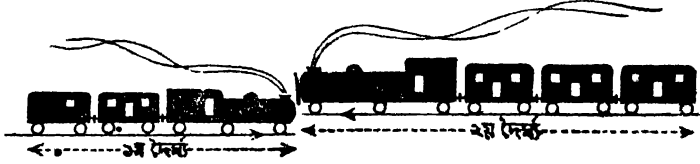
5·4. (1) একটি গতিশীল বস্তুর একটি স্থির বিন্দুকে অতিক্রম করিবার সময়

$$= \frac{\text{বস্তুর দৈর্ঘ্য}}{\text{বস্তুর গতিবেগ}}$$

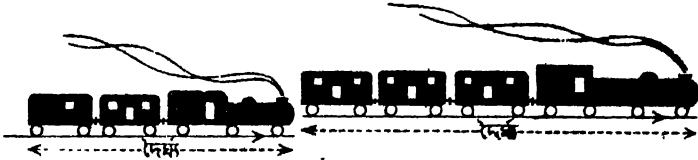
একটি ট্রেনের সিগ্‌ন্যাল-পোস্ট অতিক্রম করিবার সময়

$$= \frac{\text{ট্রেনের দৈর্ঘ্য}}{\text{ট্রেনের গতিবেগ}}।$$

(2) দুইটি গতিশীল বস্তুর পরস্পরকে অতিক্রম করিবার সময়

$$= \frac{\text{বস্তু দুইটির দৈর্ঘ্যসমষ্টি}}{\text{উহাদের আপেক্ষিক গতিবেগ}}।$$

দুইটি ট্রেনের পরস্পরকে অতিক্রম করিবার সময়

$$= \frac{\text{ট্রেন দুইটির দৈর্ঘ্যসমষ্টি}}{\text{ট্রেন দুইটির গতিসমষ্টি}} \text{ (যদি বিপরীত দিকে যায়)}$$

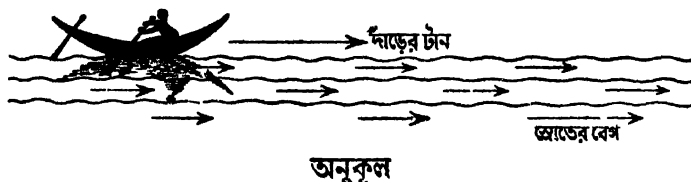
$$\text{এবং ঐ সময়} = \frac{\text{ট্রেন দুইটির দৈর্ঘ্যসমষ্টি}}{\text{ট্রেন দুইটির গতির অন্তর}} \text{ (যদি একই দিকে যায়)}$$

(3) একটি গতিশীল বস্তুর একটি দৈর্ঘ্যসম্পন্ন স্থির বস্তুকে অতিক্রম

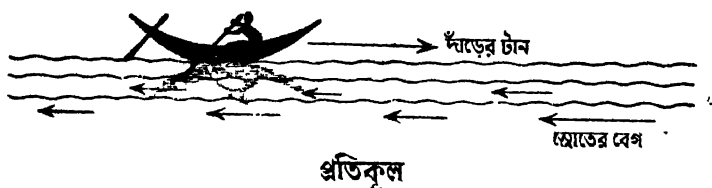
$$\text{করিবার সময়} = \frac{\text{স্থিরবস্তু ও গতিশীল বস্তুর দৈর্ঘ্যসমষ্টি}}{\text{বস্তুর গতিবেগ}}$$

একটি ট্রেনের প্লাটফরম অতিক্রম করিবার সময়

$$= \frac{\text{ট্রেন ও প্লাটফরমের দৈর্ঘ্যসমষ্টি}}{\text{ট্রেনের গতিবেগ}}।$$

5·5 যদি কোন নৌকা স্রোতের অনুকূলে যায়, তখন উহার বেগ = স্থির জলে দাঁড়ের টান + স্রোতের বেগ।

অনুকূল

যদি স্রোতের প্রতিকূলে যায় তখন উহার বেগ = স্থির জলে দাঁড়ের টান − স্রোতের বেগ।

প্রতিকূল

প্রশ্নমালা 5 C

[1 হইতে 7 পর্যন্ত ক্লাসের কাজ, এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. একটি লোক A স্থান হইতে B স্থানে যাইতে ঘণ্টায় 5 মাইল হিসাবে 3 ঘণ্টা পায়ে হাঁটিয়া, ঘণ্টায় 10 মাইল হিসাবে $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা ঘোড়ায় চড়িয়া এবং ঘণ্টায় 20 মাইল হিসাবে 3ঘ. 30 মি. মোটরে যায়। A হইতে B-এর দূরত্ব কত?

লোকটি ঘণ্টায় 5 মাইল হিসাবে 3 ঘণ্টায় (5 মাইল × 3) বা 15 মাইল হাঁটে; ঘণ্টায় 10 মাইল হিসাবে $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় (10 মাইল × $2\frac{1}{2}$) বা 25 মাইল ঘোড়ায় চড়িয়া যায়; ঘণ্টায় 20 মাইল হিসাবে $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় (20 × $3\frac{1}{2}$) বা 70 মাইল মোটরে যায়।

∴ নির্ণেয় দূরত্ব = (15 + 25 + 70) মাইল বা 110 মাইল।

2. কোন স্থান হইতে যাত্রা করিয়া A ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে চলিতে লাগিল। 2 ঘণ্টা পরে B ঐস্থান হইতে যাত্রা করিয়া একই পথে ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ মাইল বেগে A-কে ধরিবার জন্য চলিতে লাগিল। B, A-কে যাত্রাস্থান হইতে কতদূরে ধরিবে?

ঘণ্টায় 3 মাইল হিসাবে A 2 ঘণ্টায় (3 মাইল × 2) বা 6 মাইল যায়। ∴ B যখন যাত্রা করিল তখন উভয়ের মধ্যে ব্যবধান 6 মাইল এবং উভয়ে একই দিকে চলিতেছে বলিয়া উহাদের আঃ গতিবেগ $=(4\frac{1}{2}-3)$ বা $1\frac{1}{2}$ মাইল। B, Aকে $(6 \div 1\frac{1}{2})$ বা 4 ঘণ্টা পরে ধরিবে। ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ মাইল হিসাবে 4 ঘণ্টায় B ($4\frac{1}{2}$ মাইল × 4) বা 18 মাইল যায়। যাত্রাস্থান হইতে 18 মাইল দূরে B, A কে ধরিবে।

3. 20 কি. মি. পরিধিবিশিষ্ট কোন বৃত্তাকার মাঠের চতুর্দিকে পরিভ্রমণ করিবার নিমিত্ত A ও B দুইজনে একই সময়ে এক স্থান হইতে এক দিকে গমন করিল; A ঘণ্টায় 8 কি. মি. এবং B ঘণ্টায় 6 কি. মি. চলিতে লাগিল। (i) কতক্ষণ পরে পুনরায় তাহারা একত্র হইবে? (ii) যদি A ও B একে অন্যের বিপরীত দিকে যায়, তবে কতক্ষণ পরে আবার তাহাদের মিলন হইবে?

(i) বৃত্তাকার পথের দৈর্ঘ্য = 20 কি. মি. এবং একই দিকে চলিলে A ও B-এর আপেক্ষিক গতি ঘণ্টায় $=(8-6)$ কি, মি বা 2 কি. মি.

∴ উহারা $(20 \div 2)$ বা **10 ঘণ্টা** পরে মিলিত হইবে।

(ii) বৃত্তাকার পথের দৈর্ঘ্য = 20 কি. মি. এবং বিপরীত দিকে চলিলে A ও B-এর আপেক্ষিক গতি ঘণ্টায় $=(8+6)$ বা 14 কি. মি.।

∴ উহারা $(20 \div 14)$ বা $1\frac{3}{7}$ **ঘণ্টা** পরে মিলিত হইবে।

4. 24 মাইল দীর্ঘ একটি পথের বিপরীত দুই প্রান্ত হইতে A ও B পরস্পরের দিকে একই সময়ে রওনা হইল। যদি তাহারা ঘণ্টায় যথাক্রমে $3\frac{1}{2}$ মাইল ও $4\frac{1}{2}$ মাইল হিসাবে হাঁটিতে থাকে, তবে তাহারা কখন মিলিত হইবে? [W. B. S. F. 1953]

5. কোন স্থান হইতে যাত্রা করিয়া A ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ মাইল বেগে চলিতে লাগিল। কিছু সময় পর ঐ একই স্থান হইতে B ঘণ্টায় 6 মাইল বেগে চলিয়া 10 ঘণ্টায় A-কে ধরিল। B কত সময় পরে A-কে ধরিবার জন্য রওনা হইয়াছিল?

6. একটি ট্রেন সকাল 7 টায় কলিকাতা হইতে ছাড়িয়া বেলা 11 টায় বর্ধমান পৌঁছিল এবং অপর একখানি ট্রেন সকাল 8 টায় বর্ধমান হইতে ছাড়িয়া সকাল 10টা. 30 মি.-এ কলিকাতায় পৌঁছিল। কখন উভয় ট্রেনের সাক্ষাৎ হইয়াছিল?

7. চারিজন লোক একটি $2\frac{1}{4}$ মাইল বৃত্তাকার পথে ঘুরিবার জন্য একই স্থান হইতে একই সময়ে রওনা হইয়া একই দিকে যথাক্রমে $3\frac{1}{4}$, $3\frac{3}{4}$, $4\frac{1}{2}$ ও 5 মাইল বেগে চলিতে লাগিল। দেখাও, তাহারা 9 ঘণ্টা পরে পুনরায় যাত্রা স্থানে মিলিত হইবে।

8. যদি একটি গাড়ী ঘণ্টায় 42 মাইল বেগে যায়, তবে উহা গন্তব্য স্থানে ঠিক সময়ে পৌছিতে পারে ; আর যদি ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে যায়, তবে গন্তব্য স্থলে পৌছিতে 15 মিনিট দেরী হয়। গাড়ীটির গন্তব্য পথের দূরত্ব কত ?

[D. B. 1927, C. U. 1947 Spl.]

9. 200 গজের একটি দৌড়ের খেলায় A, B-কে 20 গজে হারায় এবং C কে 40 গজে হারায়। 100 গজের দৌড়ের খেলায় B, C-কে কত গজে হারাইবে ?

10. A, B ও C ঘণ্টায় 3, 4 ও 5 মাইল বেগে চলিতে পারে। তাহারা পুণা হইতে যথাক্রমে 1টা, 2টা, এবং 3টায় সময় রওনা হইল ; B যখন A কে ধরিল তখন সে একটি সংবাদ দিয়া A-কে C-এর নিকট পাঠাইল। C কখন সংবাদ পাইবে ?

11. কিছু দূর পথ পায়ে হাঁটিয়া গিয়া ঘোড়ায় চড়িয়া ফিরিয়া আসিতে একটি লোকের 3 ঘ. 45 মি. সময় লাগে এবং ঘোড়ায় চড়িয়া ঐ পথ যাতায়াত করিতে $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা সময় লাগে। পায়ে হাঁটিয়া ঐ পথ যাতায়াত করিতে কত সময় লাগিবে ?

12. ঘণ্টায় $33\frac{3}{4}$ মাইল বেগে ধাবমান 130 গজ দীর্ঘ একটি ট্রেন কতক্ষণে 200 গজ দীর্ঘ একটি স্টেশন অতিক্রম করিবে ? [D. B 1936, C U. 1951]

13. মির্জাপুর ও দিল্লী হইতে দুইখানি ট্রেন একই সময়ে যথাক্রমে ঘণ্টায় 16 ও 21 কি. মি. বেগে পরস্পরের দিকে রওনা হইল। উহারা যখন মিলিত হইল তখন একটি ট্রেন অন্যটি অপেক্ষা 60 কি.মি. অধিক গিয়াছে। উভয় স্থানের মধ্যে দূরত্ব কত ?

14. এক ব্যক্তিকে নির্দিষ্ট সময়ে একটি স্থানে পৌছিতে হইবে। ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে যাইলে তাহার 10 মিনিট বিলম্ব হয়, কিন্তু ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে যাইলে সে 5 মিনিট পূর্বে পৌছায়। তাহাকে কতদূর যাইতে হইবে ?

15. এক ব্যক্তি ঘোড়ায় চড়িয়া ঘণ্টায় 8 কি. মি. হিসাবে যাইতে পারে। যদি 12 কি. মি. অন্তর ঘোড়া বদল করিতে তাহার 10 মিনিট সময় লাগে, তবে কত সময়ে 96 কি. মি. যাইবে ?

16. একটি শামুক রাত্রিভাগে 12 ঘণ্টায় 1 ফু. $7\frac{1}{2}$ ই. উঠে এবং দিবাভাগে 12 ঘণ্টায় 11 ই. নামে : 93 ফু. একটি দণ্ডের উপরে উহা কত ঘণ্টায় উঠিবে ?

17. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে 30 কি. মি. 3 ঘণ্টায় গিয়া প্রতিকূলে 5 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসে। দাঁড়ের ও স্রোতের বেগ কত ?

18. একটি দৌড়ের প্রতিযোগিতায় A, B-কে 44 গজে এবং C-কে 83 গজে হারায়। ঐ প্রতিযোগিতাটি যখন B ও C-এর মধ্যে অনুষ্ঠিত হয় তখন B, 40 গজে জিতে। দৌড়ের পাল্লাটি কত ? [D. B. 1939]

19. একজন চৌকিদার চোরের 100 গজ পশ্চাতে আছে। যদি 1 মাইল দৌড়াইতে চৌকিদারের 6 মিনিট এবং চোরের 10 মিনিট লাগে, তবে কতদূরে চৌকিদার চোরকে ধরিবে ?

20. একটি বানর একটি তৈলাক্ত বাঁশ বাহিয়া উপরে উঠিতে লাগিল। বানরটি 1 মিনিটে 15 ফুট উঠে, কিন্তু পরের মিনিটে 1 ফুট হড়কাইয়া নামিয়া পড়ে। বাঁশটি যদি 63 ফুট উচ্চ হয়, তবে বাঁশের মাথায় উঠিতে বানরের কত সময় লাগিবে ?

21. A ও B ট্রেনের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 100 গজ ও 76 গজ ; A ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় 30 মাইল এবং B ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় 45 মাইল। উহারা সমান্তরাল পথে বিপরীত দিক হইতে আসিলে কত সময়ে পরস্পরকে অতিক্রম করিবে ?

ট্রেন দুইখানি বিপরীত দিক হইতে আসিতেছে বলিয়া উহাদের ঘণ্টায় গতিবেগ (30+45) বা 75 মাইল। যে সময়ে উভয় ট্রেনের মোট দৈর্ঘ্য অর্থাৎ (100+76) বা 176 গজ ঘণ্টায় 75 মাইল হিসাবে অতিক্রান্ত হইবে সেই সময়ই উদ্দিষ্ট সময়।

75×1760 গজ অতিক্রান্ত হয় 60 মিনিটে।

$\therefore$ 1 „ „ „ $\dfrac{60}{75\times1760}$ মিনিটে

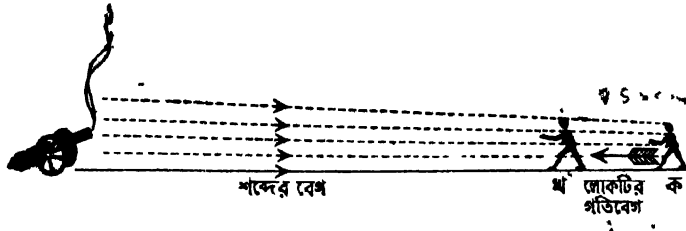
$\therefore$ 176 „ „ „ $\dfrac{60\times176}{75\times1760}$ বা $\dfrac{2}{25}$ মিঃ বা $4\frac{4}{5}$ সেকেণ্ডে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় = $4\frac{4}{5}$ সেকেণ্ড।

22. দুইখানি গাড়ীর প্রত্যেকের দৈর্ঘ্য 88 গজ এবং উহাদের ঘণ্টায় গতিবেগ যথাক্রমে 30 মাইল ও 25 মাইল। যদি গাড়ী দুইখানি সমান্তরাল পথে একই দিকে চলিতে থাকে তাহা হইলে (i) কখন তাহারা পরস্পরকে অতিক্রম করিবে ? (ii) কত সময়ে দ্রুতগামী গাড়ীর আরোহী অপর গাড়ীকে অতিক্রম করিবে ?

23. একখানি ট্রেন 5 সেকেণ্ডে একটি টেলিগ্রাফের খুঁটি এবং 10 সেকেণ্ডে 330 ফুট দীর্ঘ একটি স্টেশন-প্ল্যাটফর্ম অতিক্রম করিল। ট্রেনখানির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '66]

*24. 88 গজ দীর্ঘ একখানি ট্রেন রেললাইনের পাশ দিয়া একই দিকে ঘণ্টায় 4 মাইল বেগে গমনকারী এক ব্যক্তিকে 10 সেকেণ্ডে এবং ঐ ভাবে একই দিকে গমনকারী অন্য ব্যক্তিকে 9 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিয়া গেল। দ্বিতীয় ব্যক্তিটির গতিবেগ নির্ণয় কর। [P. U. 1924]

25. কোন শহরে প্রতি 21 মিনিট অন্তর কামান দাগা হইতেছে এবং একটি লোক ঐ শহরের দিকে অগ্রসর হইতেছে। শব্দের বেগ সেকেণ্ডে 1125 ফুট হইলে এবং ঐ লোকটি প্রতি 20 মিনিট 15 সেকেণ্ড অন্তর কামান গর্জন শুনিতে পাইলে, ঐ ব্যক্তির বেগ ঘণ্টায় কত মাইল? [W. B. S F. 1956]

শব্দ (21 মি. – 20 মি. 15 সে.) বা 45 সেকেণ্ডে যে দূরত্ব (খ – ক) যায়; লোকটি 20 মি. 15 সে. বা 1215 সেকেণ্ডে সেই দূরত্ব (ক – খ) যায়। শব্দ 45 সেকেণ্ডে (1125 × 45) ফুট যায়।

∴ লোকটি 1215 সেকেণ্ডে (1125 × 45) ফুট যায়।

∴ " 1 " $\frac{1125 \times 45}{1215}$ " "

∴ লোকটি 1 ঘণ্টা বা 60 × 60 সেকেণ্ডে যায়

$\frac{1125 \times 45 \times 60 \times 60}{1215 \times 3 \times 1760}$ বা $\frac{625}{22}$ মা. বা $28\frac{9}{22}$ মা. যায়।

∴ নির্ণেয় গতিবেগ $= 28\frac{9}{22}$ মা.

*26. ডিপো হইতে 15 মিনিট পরে পরে বাস ছাড়িয়া ঘণ্টায় 16 মাইল বেগে চলে। বিপরীত দিক হইতে রওনা হইয়া এক ব্যক্তি 12 মিনিট পরে পরে ঐ বাসগুলিকে অতিক্রম করিলে ঐ ব্যক্তির গতিবেগ কত? [W. B. S. F. 1957]

*27. একই সময়ে একটি ট্রেন কলিকাতা হইতে মধুপুরের দিকে এবং আর একটি ট্রেন মধুপুর হইতে কলিকাতার দিকে যাত্রা করিল। যদি তাহাদের সাক্ষাৎ হইবার যথাক্রমে 1 ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টা পরে তাহারা যথাক্রমে মধুপুরে ও কলিকাতায় পৌঁছায়, তবে প্রমাণ কর, একটি ট্রেনের গতিবেগ অপরটির দ্বিগুণ। [C. U. 1946]

28. একই সময়ে দুইখানি ট্রেন A ও B স্টেশন হইতে পরস্পরের অভিমুখে রওনা হইল। যদি পরস্পরের সাক্ষাতের পর যথাক্রমে 15 ও 60 মিঃ পরে ট্রেন দুইখানি B এবং A স্টেশনে পৌছিয়া থাকে, তাহা হইলে উহাদের বেগের অনুপাত কত?

মনে কর B গামী ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় x কি. মি. এবং A গামী ট্রেনের বেগ ঘণ্টায় y কি. মি.। সুতরাং উভয় ট্রেনের সাক্ষাতের পর B গামী ট্রেন 15 মিঃ এ গিয়াছে $x\times\frac{15}{60}$ কি. মি. $=\frac{x}{4}$ কি. মি., এবং A গামী ট্রেন 60 মিঃ এ গিয়াছে y কি. মি.।

এখন ঘণ্টায় x কি.মি. বেগে y কি.মি যাইতে A গামী ট্রেনের সময় লাগে $=\frac{y}{x}$ ঘণ্টা এবং ঘণ্টায় y কি.মি. বেগে $\frac{x}{4}$ কি. মি. যাইতে B গামী ট্রেনের সময় লাগে $=\frac{x}{4y}$ ঘণ্টা। কিন্তু $\because$ উভয় ট্রেনই একই সময় রওনা হইয়াছে

$$\text{সুতরাং } \frac{y}{x}=\frac{x}{4y} \text{ বা } 4y^2=x^2 \quad \therefore \quad x=2y.$$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{2}{1}.$$

29. স্থির জলে দাঁড় বাহিয়া কোন নৌকা ঘণ্টায় 16 কি. মি. বেগে চালান যায়। স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বাহিয়া যাইতে যে সময় লাগে স্রোতের প্রতিকূলে সময় লাগে তাহার তিনগুণ। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার?

মনে কর স্রোতের বেগ ঘণ্টায় x কি. মি.। 1 কি. মি. দূরত্ব স্রোতের অনুকূলে যাইতে সময় লাগে $=\frac{1}{16+x}$ ঘ. এবং স্রোতের প্রতিকূলে সময় লাগে $=\frac{1}{16-x}$ ঘণ্টা।

$$\therefore \quad \text{প্রশ্নানুসারে } \frac{3}{16+x}=\frac{1}{16-x}.$$

$$\therefore \quad x=8 \text{ কি. মি.}$$

30. একখানি নৌকা দাঁড় বাহিয়া স্রোতের অনুকূলে 3 ঘণ্টায় 21 কি. মি. গিয়া স্রোতের প্রতিকূলে 7 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিতে পারে। দাঁড় ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

31. একখানি ট্রেন তাহার স্বাভাবিক বেগের $\frac{3}{4}$ বেগে চলিয়া কোন স্থানে $1\frac{3}{4}$ ঘণ্টা বিলম্বে পৌছিল। স্বাভাবিক বেগে চলিলে ঐ স্থানে পৌছিতে কত সময় লাগিত? [D. B. 1955]

6

শতকরা হিসাব ও সরল সুদ

Percentage and Simple Interest

A. শতকরা হিসাব (পুনরালোচনা)

6·1. শতকরা কথাটির অর্থ 'প্রতি শ-তে' অর্থাৎ প্রতি 100তে (Per centum বা per cent)। একশতের উপর যে হিসাব করা হয় তাহাকে **শতকরা হিসাব** (Percentage) বলে। মনে কর, তোমাদের বিদ্যালয়ে 50 জন ছাত্রের মধ্যে 48 জন প্রবেশিকা পরীক্ষায় উত্তীর্ণ হইয়াছে। এখন যদি পরীক্ষার্থীর সংখ্যা 50 না ধরিয়া 100 অর্থাৎ 50 এর দ্বিগুণ ধরা হয়, তাহা হইলে উত্তীর্ণ ছাত্রের সংখ্যাও 48 এর দ্বিগুণ অর্থাৎ 96 হইবে। সেইজন্য উত্তীর্ণ ছাত্র '100 জনের মধ্যে 96', সংক্ষেপে "শতকরা 96' এবং আরও সংক্ষেপে '96%' এইরূপ লেখা হয়।

6·2. ভগ্নাংশ বা দশমিক ভগ্নাংশের সহিত শতকরা হিসাবের সম্বন্ধ :

50 জনের মধ্যে 48 জন উত্তীর্ণ হইয়াছে অর্থাৎ 50 ভাগের মধ্যে 48 ভাগ উত্তীর্ণ হইয়াছে ∴ ইহা ভগ্নাংশে প্রকাশ করিলে আমরা $\frac{48}{50}$ লিখি। এখন $\frac{48}{50}=\frac{96}{100}$ $=\cdot 96$ ∴ ঐ ভগ্নাংশ $\frac{48}{50}$ না লিখিয়া $\frac{96}{100}$ বা দশমিক ·96 লিখিতে পারা যায়। আবার '50 জনের মধ্যে 48 জন' শতকরা হিসাবে 96% ; ∴ 96% ভগ্নাংশে $\frac{96}{100}$ এবং দশমিক ·96 হইতেছে। শতকরা হিসাব দ্বারা সামান্য ভগ্নাংশ বা দশমিক ভগ্নাংশের ন্যায় কোন একটি সমগ্র বস্তুর অংশ প্রকাশ করা হয়। এইজন্য ইহাকে একপ্রকার ভগ্নাংশ বলা যাইতে পারে।

6·3. ভগ্নাংশকে শতকরা হিসাবে পরিবর্তন :

ভগ্নাংশকে বা দশমিক ভগ্নাংশকে 100 দ্বারা গুণ করিলেই শতকরা হিসাবে পাওয়া যায়।

যেমন : $\frac{1}{2}=\frac{\frac{1}{2}\times 100}{100}=\frac{50}{100}=50\%.$

সেইরূপ, $\cdot 482=\frac{\cdot 482\times 100}{100}=\frac{48\cdot 2}{100}=48\cdot 2\%$

দ্রষ্টব্য : প্রাত্যহিক জীবনে একই ভগ্নাংশকে বিভিন্ন রূপে প্রকাশের একটি তালিকা :

ভগ্নাংশ	দশমিক ভগ্নাংশ	প্রতি শতে	প্রতি পাউণ্ডে
$\frac{3}{8}$	0·375	37·5	7শি. 6পে.

প্রশ্নমালা 6A

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসের কাজ এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. একটি সভায় 15000 লোক উপস্থিত ছিল ; তন্মধ্যে 2500 জন স্ত্রীলোক। উপস্থিত লোকসংখ্যার শতকরা কতজন স্ত্রীলোক ?

নির্ণেয় শতকরা হার $=\frac{2500}{15000}\times100=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$

অথবা, 15000-এর মধ্যে 2500 জন স্ত্রীলোক

∴ 100 „ „ $\frac{2500}{150}=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$ ∴ নির্ণেয় হার $=16\frac{2}{3}\%$

2. গত বৎসর অপেক্ষা এই বৎসর চাউলের দর 35% বাড়িয়াছে। গত বৎসর 1 কুইণ্টাল চাউলের মূল্য 60 টাকা থাকিলে এ বৎসর 1 কুইণ্টাল চাউলের মূল্য কত ?

চাউলের মূল্য শতকরা 35 বৃদ্ধি পাওয়ায়

100 টাকার চাউলের বর্তমান মূল্য $=(100+35)$ টাকা বা 135 টাকা

∴ 1 „ „ „ „ $=\frac{135}{100}$ টাকা

∴ 60 „ „ „ „ $=\frac{135}{100}\times60=81$ টাকা।

অথবা সংক্ষেপে,

নির্ণেয় মূল্য $=60$ টাকার 135%

$=60$ টা. $\times\frac{135}{100}=81$ টাকা।

3. সোনার গিনিতে 11 ভাগ খাঁটি সোনা ও 1 ভাগ তামা আছে। গিনিতে শতকরা কত ভাগ সোনা আছে ?

মোট $(11+1)$ বা 12 ভাগের মধ্যে 11 ভাগ খাঁটি সোনা,

∴ নির্ণেয় হার $=\frac{11}{12}\times100$ বা $\frac{275}{3}$ বা $91\frac{2}{3}\%$

4. যে গ্রামে শতকরা 90 জন শিক্ষিত তাহার লোকসংখ্যা 1200 হইলে শিক্ষিতের সংখ্যা কত ?

5. সত্যবাবু তাঁহার আয়ের $12\frac{1}{2}\%$ দান করেন। তাঁহার দানের পরিমাণ 36 টাকা। তাঁহার আয়ের পরিমাণ কত ?

6. 1961 সালে কোন বিদ্যালয়ে 375 জন ছাত্র ছিল। 1962 সালে 60 জন ছাত্র বিদ্যালয় ছাড়িয়া চলিয়া গেল এবং 135 জন নূতন ছাত্র ভর্তি হইল। বিদ্যালয়ে ছাত্রসংখ্যা শতকরা কত বাড়িল ?

7. এক ব্যক্তির বার্ষিক বেতন 380 পাউণ্ড ; যদি তাহার বেতন 15% বাড়ে, তবে নূতন বেতনের পরিমাণ কত হইবে ?

8. এক ব্যক্তি বৎসরে 440 টাকা খরচ করেন, ঐ টাকা তাঁহার আয়ের 80% হইলে, তাঁহার আয় কত ?

9. কোন্ সংখ্যা 20% বাড়িলে 144 হয় ?

10. কোন্ সংখ্যা 20% কমিলে 108 হয় ?

11. কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 80 সে. মি. এবং বিস্তার 25 সে. মি., যদি দৈর্ঘ্য 20% বাড়ে তাহা হইলে ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি. বাড়িবে ? ক্ষেত্রফল শতকরা কত বাড়িবে ?

12. এক ব্যক্তি তাঁহার আয়ের 88% খরচ করেন। যদি বৎসরে 81 পাউণ্ড সঞ্চয় করেন তবে তাঁহার বাৎসরিক আয় কত ?

13. কোন বিদ্যালয়ে ছাত্রীর সংখ্যা মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যার 55% ; ছাত্রের সংখ্যা মোট সংখ্যার শতকরা কত ? যদি বালকের সংখ্যা 216 হয়, মোট ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা কত ?

14. কোন অর্থের 15%, 27 পা. 15 শি. হইলে এ অর্থের $16\frac{1}{2}\%$-এর মান কত ?

15. যদি বস্ত্রের মূল্য 75% বৃদ্ধি পায়, তবে বস্ত্রের মূল্য ঠিক রাখিতে হইলে গৃহস্থকে শতকরা কি পরিমাণ বস্ত্র ক্রয় কমাইতে হইবে ? [C.U. 1922]

• পূর্বে যতখানি কাপড়ের মূল্য 100 টাকা এখন ততখানির মূল্য 175 টাকা।

বর্তমানে 175 টাকায় পূর্বের 100 টাকা মূল্যের কাপড় পাওয়া যায়।

∴ 1 " " $\frac{100}{175}$ " " " " "

∴ বর্তমানে 100 টাকায় পূর্বের $\frac{100}{175} \times 100$ টাকা মূল্যের কাপড় পাওয়া যায়।

বা $\frac{400}{7}$ বা $57\frac{1}{7}$ " " " " " "

∴ ($100-57\frac{1}{7}$) বা $42\frac{6}{7}\%$ পরিমাণ বস্ত্র ক্রয় কমাইতে হইবে।

16 কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের এক-পঞ্চমাংশ বালিকা এবং অবশিষ্ট সকলে বালক ছিল। বালকদের 5% এবং বালিকাদের 40% অনুত্তীর্ণ হইল। যদি পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা মোট 2500 হয় তবে উত্তীর্ণ পরীক্ষার্থীদের শতকরা হার কত ? [M. U. 1926]

17. লবণের মূল্য $12\frac{1}{2}\%$ কমিয়া যাওয়ায় 56 পয়সায় 2 কি. গ্রা. লবণ বেশী পাওয়া যায়। পূর্বে 1 কি. গ্রা লবণের মূল্য কত ছিল ?

$12\frac{1}{2}\%$ কমিয়া যাওয়ায় অর্থাৎ $\frac{12\frac{1}{2}}{100}=\frac{1}{8}$ অংশ মূল্য কম হওয়ায় 2 কি. গ্রা. লবণ বেশী পাওয়া যায়।

∴ বর্তমানে $56 \times \frac{1}{8}=7$ পয়সায় পাওয়া যায় 2 কি. গ্রা.

∴ 56 " " " 16 কি গ্রা.

∴ পূর্বে পাওয়া যাইত $16-2=14$ কি. গ্রা.

∵ 14 কি. গ্রা. লবণের দাম 56 পয়সা

∴ 1 " " " " $\frac{56}{14}=4$ পয়সা (নির্ণেয় মূল্য)।

18. কাপড়ের মূল্য 65% বর্ধিত হইলে কোন গৃহস্থ কাপড়ের খরচ শতকরা কি হারে কমাইলে তাহার ব্যয় বৃদ্ধ হইবে না ? [D.B. 1931]

19. কোন পরীক্ষায় শতকরা 52 জন পরীক্ষার্থী ইংরাজীতে ও শতকরা 42 জন পরীক্ষার্থী গণিতে অকৃতকার্য হইল। যদি শতকরা 17 জন উভয় বিষয়েই অকৃতকার্য হইয়া থাকে, তবে শতকরা কতজন উভয় বিষয়েই কৃতকার্য হইয়াছিল ? [C. U. 1917]

100 জন ছাত্রের মধ্যে কেবলমাত্র ইংরাজীতে $(52-17)$ বা 35 জন, কেবলমাত্র গণিতে $(42-17)$ বা 25 জন এবং উভয় বিষয়ে 17 জন অকৃতকার্য হইয়াছিল।

∴ 100 জন ছাত্রের মধ্যে মোট $(35+25+17)$ বা 77 জন অকৃতকার্য হইয়াছিল।

∴ 100 জনের মধ্যে $(100-77)$ বা 23 জন কৃতকার্য হইয়াছিল।

∴ নির্ণেয় হার $=23\%$

20. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 80% ইংরাজীতে, 85% অঙ্কে এবং উভয় বিষয়ে 73% কৃতকার্য হয়। পরীক্ষার্থীদের শতকরা কতজন উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য হইল? [W. B. S. F. 1954]

21. পঠন ও লিখনের কোন পরীক্ষায় এক বিদ্যালয়ের প্রতিটি ছাত্রই অন্ততঃ একটি বিষয়ে কৃতকার্য হইয়াছে এবং তাহাদের মধ্যে 150 জন উভয় বিষয়েই পাশ করিয়াছে। পঠনে শতকরা 80 জন এবং লিখনে শতকরা 70 জন কৃতকার্য হইয়া থাকিলে, বিদ্যালয়ের মোট ছাত্রসংখ্যা কত? [D. B. 1939]

22. কোন স্থানের লোকসংখ্যা 20000 ; যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বৃদ্ধি এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% হ্রাস পায় তবে মোট লোকসংখ্যার কোন পরিবর্তন হয় না। পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা কত? [C. U. 1937]

মনে করি, পুরুষের সংখ্যা $=x$ $\therefore$ স্ত্রীলোকের সংখ্যা $=20,000-x$

$\therefore$ বৃদ্ধি $=x$-এর 10% বা $\frac{1}{10}x$ এবং হ্রাস $=(20000-x)$এর 6% বা $\frac{3}{50}(20000-x)$

$\because$ হ্রাস ও বৃদ্ধি সমান হইলে, লোকসংখ্যার পরিবর্তন হয় না,

$\therefore \frac{1}{10}x=\frac{3}{50}(20000-x)$

50 দ্বারা উভয়পক্ষ গুণ করিয়া পাই $5x=60000-3x$

বা $5x+3x=60000$ বা $8x=60000$ $\therefore$ $x=\frac{60000}{8}=7500.$

$\therefore$ পুরুষের সংখ্যা $=7500$ এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা $=(20000-7500)$ বা **12500.**

23. আমের মূল্য 15% কমিয়া যাওয়ায় একটি লোক প্রতি টাকায় 6টি করিয়া আম বেশী পায়। পূর্বে প্রতি আমের মূল্য কত ছিল? [Utkal U. 1947]

*24. কোন ট্রাম-কোম্পানির মোট আয়ের 40% খরচ চালাইবার জন্য ব্যয় হয় এবং অবশিষ্টের 40% রিজার্ভ ফণ্ডে জমা রাখিয়া বাকী টাকা অংশীদারগণকে $3\frac{1}{3}$% হারে লভ্যাংশ দিতে ব্যয় হয়। অংশীদারগণের শেয়ারের মোট পরিমাণ 864000 টাকা হইলে কোম্পানির মোট আয় কত? [C. U. 1920]

25. কোন দেশের লোকসংখ্যা প্রতি 10 বৎসরে শতকরা 7 জন বৃদ্ধি পায়। যদি বর্তমানে উহার লোকসংখ্যা 4007150 হয়, তবে 20 বৎসর পূর্বে লোকসংখ্যা কত ছিল? [M. U. 1885]

নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্য লও :

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n.$$

P—প্রথমে যা ছিল।
A—বৃদ্ধি পাইয়া যাহা হইল।
r—শতকরা বৃদ্ধির হার।
n—যতবার বাড়ে।

প্রতি 10 বৎসরে বাড়িলে 20 বৎসরে 2 বার বাড়ে।

$$\therefore \quad 4007150 = P\left(1+\frac{7}{100}\right)^2$$

$$\therefore \quad P = \frac{4007150 \times 100 \times 100}{107 \times 107} = 3500000$$

$\therefore$ নির্ণেয় লোকসংখ্যা = **3500000.**

26. এক ব্যক্তির মূলধন প্রতি বৎসর 20% বৃদ্ধি পাইয়া 4 বৎসর অন্তে 5184 টাকা হইল, প্রথমে তাহার মূলধন কত ছিল? [C U. 1950]

27. একটী আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 20% বাড়াইলে এবং প্রস্থ 10% কমাইলে উহার ক্ষেত্রফলের শতকরা কি পরিবর্তন হইবে?

28. খাঁটী দুগ্ধে 88% জল থাকে। যদি কোন দুগ্ধের নমুনায় 90% জল পাওয়া যায়, তাহা হইলে ঐ দুগ্ধের 24 লিটারে মিশ্রিত জলের পরিমাণ কত?

B. সরল সুদ (পুনরালোচনা)

61. সংজ্ঞা: যিনি টাকা ধার দেন তাঁহাকে **উত্তমর্ণ** বা **মহাজন** (Creditor), যিনি টাকা ধার করেন তাঁহাকে **অধমর্ণ** বা **দেনাদার** (Debtor) বলে। যে পরিমাণ টাকা দেওয়া হয় তাহাকে **আসল** বা **মূলধন** (Principal), দেনাদার পাওনাদারকে কর্জ টাকা পরিশোধ করিবার সময় আসল অপেক্ষা যে পরিমাণ টাকা বেশী দেয় সেই অতিরিক্ত টাকাকে **সুদ** বা **কুসীদ** বা **বৃদ্ধি** (Interest) বলে। কি পরিমাণ টাকার কতদিন পরে কত সুদ দিতে হইবে তাহার যে চুক্তি বা স্বীকৃতি তাহাকে **সুদের হার** বা **হার** (Rate of Interest), এবং সুদ ও আসল একত্রে যে টাকা হয় তাহাকে **সুদ-আসল** বা **সবৃদ্ধিমূল** (Amount) বলা হয়।

সুদের হার প্রতি টাকায় প্রতিদিনে বা প্রতি মাসে বা প্রতি বৎসরে কত হইবে সেই হিসাবে অথবা প্রতি একশত টাকায় প্রতি দিনে বা প্রতি মাসে বা প্রতি বৎসরে কত হইবে, এই হিসাবে ধার্য করা হয়। তবে যেখানে বেশী পরিমাণ টাকার দেওয়া-নেওয়া হয় সেখানে প্রতি একশত টাকায় প্রতি বৎসরে কত সুদ দিতে হইবে সেই হিসাবে সুদের হার ধার্য করা হয়। যদি 100 টাকার উপর 'বার্ষিক 5 টাকা সুদ' ধার্য হয় তাহা হইলে **শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হারে** (5 percent per annum) অথবা সংক্ষেপে 5% হারে লেখা হয়।

6·2. (i) **সবৃদ্ধিমূল = আসল + সুদ**

(ii) **আসল = সবৃদ্ধিমূল − সুদ**

(iii) **সুদ = সবৃদ্ধিমূল − আসল।**

6·3 সুদকষার কয়েকটি সূত্র :

I = সুদ, **P** = আসল, **T** = সময়, **R** = সুদের হার এবং **A** = সবৃদ্ধিমূল ধরিলে—

(i) $I=\dfrac{P.T.R.}{100}$ (ii) $R=\dfrac{I\times 100}{P.T.}$ (iii) $T=\dfrac{I\times 100}{P.R}$

(iv) $P=\dfrac{I\times 100}{T.R.}$ (v) $P=\dfrac{A\times 100}{100+R.T.}$

প্রশ্নমালা 6B

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসের কাজ এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. 6% হারে 1954 সালের 5ই জানুয়ারী হইতে 31শে মে পর্যন্ত 3500 পাউণ্ডের সুদ কত ? [W. B. S. F. 1955]

1954 সালের 5ই জানুয়ারী হইতে 31শে মে পর্যন্ত মোট দিনসংখ্যা

$=(26+28+31+30+31)$ বা 146 দিন $=\frac{2}{5}$ বৎসর।

∵ 100 পাউণ্ডের 1 বৎসরের সুদ 6 পা.

∴ 1 পাউণ্ডের 1 বৎসরের সুদ $\dfrac{6}{100}$ পা.

∴ 1 পাউণ্ডের 146 দিন বা $\frac{2}{5}$ বৎসরের সুদ $\dfrac{6\times 2}{100\times 5}$ পা.

∴ 3500 " " " " " " " $\dfrac{6\times 2\times 3500}{100\times 5}$ = **84 পাউণ্ড।**

2. শতকরা বার্ষিক $3\frac{1}{5}$ টাকা সুদের হারে 427 টা. 50 পয়সা এর $12\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ কত হইবে ? [G. U. 1962]

$$\text{সুদ} = \frac{\text{P.T.R.}}{100} = \frac{427\frac{1}{2} \times 12\frac{1}{2} \times \frac{16}{5}}{100} = \frac{855}{2} \times \frac{25}{2} \times \frac{16}{5} \times \frac{1}{100} \text{ টা.} = 171 \text{ টা।}$$

3. 8% সুদের হারে কত বৎসরে 575 টাকার সবৃদ্ধিমূল 736 টাকা হইবে ? [D. B. 1952]

575 টাকার নির্ণেয় সময়ের সুদ = (736 − 575) টাকা বা 161 টাকা

575 টাকার 1 বৎসরে 8% হিঃ সুদ $= 575 \times 1 \times \frac{8}{100}$ টা. = 46 টা.

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= \frac{161}{46}$ বৎসর বা $3\frac{1}{2}$ বৎসর।

4. 425 টাকা ধার দেওয়া হইল ; 9 মাস পরে যদি 437 টা. 75 পয়সা দেওয়ায় সেই ধার পরিশোধ হয় তবে শতকরা সুদের হার নির্ণয় কর। [C. U. 1924].

425 টাকার 9 মাস বা $\frac{3}{4}$ বৎসরের সুদ $(437\frac{3}{4} - 425)$ বা $12\frac{3}{4}$ টাকা

$\therefore$ 1 „ „ „ „ „ „ $\frac{51}{4 \times 425}$ টাকা

$\therefore$ 1 „ „ 1 „ „ „ $\frac{51 \times 4}{4 \times 425 \times 3}$ টাকা

$\therefore$ 100 „ „ 1 „ „ „ $\frac{51 \times 4 \times 100}{4 \times 425 \times 3} = 4$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার = 4%

5. সুদের হার বার্ষিক শতকরা $4\frac{1}{2}$ টাকা হইলে কত টাকার 3 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 1532 টা. 25 পয়সা হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $\frac{9}{2}$ টাকা

$\therefore$ „ „ 3 „ „ $\frac{9 \times 3}{2}$ বা $\frac{27}{2}$ টাকা

∴ সবৃদ্ধিমূল $(100+\frac{27}{2})$ বা $\frac{227}{2}$ টাকা হইলে আসল 100 টাকা হইবে

∴ „ 1 „ „ „ $\frac{100\times2}{227}$ „ „

∴ „ $1532\frac{1}{4}$ „ „ „ $\frac{100\times2\times6129}{227\times4}$ টাকা

বা 1350 টাকা হইবে

∴ নির্ণেয় আসল = 1350 টাকা।

6. $4\frac{1}{2}\%$ হারে 350 পাউণ্ডের 3রা মার্চ হইতে 28শে ডিসেম্বর পর্যন্ত সুদ কত? [C. U. 1868]

7. $4\frac{1}{4}\%$ হারে 2187 পা. 10 শি.-এর $2\frac{1}{2}$ বৎসরের সুদ কত? [C. S.]

8. সুদের হার কত হইলে কোন মূলধন 25 বৎসরে সুদ-আসলে 3 গুণ হইবে? [C. U. 1936]

9. বার্ষিক $3\frac{1}{3}\%$ হারে সুদ হইলে কত বৎসরে 1350 টাকার সবৃদ্ধিমূল 1620 টাকা হইবে? [C. U. 1947]

10. বার্ষিক 4% হারে কত টাকা 5 বৎসরে সুদ-আসলে 360 টাকা হইবে? [D. B. 1948]

11. শতকরা কত হার সুদে কোন টাকা 25 বৎসরে সুদেমূলে তিনগুণ হইবে? [C. U. 1936]

মনে করি আসল = 100 টাকা।

∴ সুদেমূলে = 100 টা. × 3 বা 300 টাকা

∴ 100 টাকার 25 বৎসরের সুদ (300 − 100) বা 200 টা.

∴ „ „ 1 „ „ $\frac{200}{25}$ বা 8 টা.

∴ নির্ণেয় সুদের হার = 8%

12. বার্ষিক $4\frac{1}{18}\%$ হার সুদে কত টাকার দৈনিক সুদ এক টাকা হইবে? [C. U. 1935, '37]

13. বার্ষিক $6\frac{2}{3}\%$ হারে কত টাকা 5 বৎসরে সুদে-আসলে 100 টাকা হইবে? [C. U. 1932]

14. বার্ষিক 4% হারে 3 বৎসরে কত টাকার সুদ 546 টাকা হইবে?

15. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সুদে কত বৎসরে কোন টাকার সুদ আসলের পঞ্চমাংশ হইবে?

16. শতকরা $6\frac{1}{4}\%$ হার সুদে কত বৎসর পরে যে-কোন টাকার সুদ, সবৃদ্ধি-মূলের এক চতুর্থাংশ হইবে ?

17. কোন আসলের 3 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 336 টাকা এবং 5 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল 360 টাকা।. আসল ও শতকরা সুদের হার কত ? [G. U. 1955]

18. এক ব্যক্তি বার্ষিক 6% হারে কিছু টাকা ধার করিলেন এবং 3 মাস পরে তিনি 4% হারে আরও 200 টাকা ধার করিলেন। দ্বিতীয়বার ধার করিবার 6 মাস পরে দেখা গেল যে তাঁহার দুই ঋণের জন্য মোট সুদ 17 টাকা 50 পয়সা হইয়াছে। তিনি প্রথমে কত টাকা ধার করিয়াছিলেন ? [W. B. S. F. 1959]

19. 4% হার সুদে 5000 টাকার 50 বৎসরের সুদ, 3% হার সুদে কত সময়ে 4000 টাকার সুদের সমান হইবে ? [C. U. 1900]

20. 5 বৎসরে কোন টাকার সবৃদ্ধিমূল 1100 টাকা। সুদ আসলের $\frac{3}{8}$ হইলে, আসল ও শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত ? [C. U. 1934]

মনে করি আসল $= x$ টাকা। $\therefore$ সুদ $= \frac{3}{8}x$ টাকা।

$\therefore$ সবৃদ্ধিমূল $= \left(x + \frac{3}{8}x\right)$ বা $\frac{11}{8}x$ টাকা

$$\therefore \frac{11}{8}x = 1100; \quad \therefore x = \frac{\overset{100}{\cancel{1100}} \times 8}{\cancel{11}} = 800$$

$\therefore$ নির্ণেয় আসল $= 800$ টাকা

মোট সুদ $= 800$ টা. $\times \frac{3}{8}$ বা 300 টাকা

$$\text{শতকরা সুদের হার} = \frac{I \times 100}{P \times T} = \frac{\overset{15}{\cancel{300}} \times \cancel{100}}{\underset{2}{\cancel{800}} \times \cancel{5}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$$

21. একই হার সুদে 400 টাকার 5 বৎসরে ও 600 টাকার 4 বৎসরে মোট 132 টাকা সুদ হইল। সুদের শতকরা হার নির্ণয় কর। [C. U. 1939]

মনে করি সুদের হার $x\%$

400 টাকার 5 বৎসরে $x\%$ হিঃ সুদ $= \left(400 \times 5 \times \frac{x}{100}\right)$ বা $20x$ টাকা

600 টাকার 4 বৎসরে $x\%$ হিঃ সুদ $= \left(600 \times 4 \times \frac{x}{100}\right)$ বা $24x$ টাকা

$\therefore$ $20x + 24x = 132$; বা $44x = 132$; $\therefore$ $x = \frac{132}{44} = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $= 3\%$

22. কোন আসল 4% হার সুদে 6 বৎসরে সুদেমূলে 930 টাকা হয়। কত সময়ে উহা সুদেমূলে 1020 টাকা হইবে ? [W. B. S F. 1954]

23. কোন আসল 20 বৎসরে দ্বিগুণ হয়। কত সময়ে উহা তিনগুণ হইবে ? [Utkal U. 1949]

24. কোন ব্যাঙ্ক বৎসরে $1\frac{1}{2}\%$ হারে সুদ দেয়। ঐ ব্যাঙ্কে কোন ব্যক্তি বৎসরের প্রথমে 350 টাকা জমা দেন। 4 মাস পরে তিনি 50 টাকা তুলিয়া লন এবং আরও 3 মাস পরে 160 টাকা জমা দেন। এই বৎসরের শেষে তিনি কত সুদ পাইবেন ? [W. B S F. 1954 Compl.]

25 কোন টাকার 5% হারে 9 মাসের সুদ উহার 4% হারে 15 মাসের সুদ অপেক্ষা 125 টাকা কম। আসল কত ? [P. U. 1920]

26 দুইটি সমান মূলধন যথাক্রমে 5% এবং 4% হারে খাটান হইল, 3 বৎসর পর তাহাদের মোট সুদ 405 টাকা হইলে, প্রতিটি মূলধন কত ? [B C. S 1950]

27. 4% হার সুদে 500 টাকার 4 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল, শতকরা কতহার সুদে 400 টাকার 5 বৎসরের সবৃদ্ধিমূলের সমান ? [W. B S F. 1956 Suppl]

28. 7% হার সুদে 9000 টাকার যে সময়ে সবৃদ্ধিমূল 12150 টাকা হয়, 4% হার সুদে কত টাকার সবৃদ্ধিমূল সেই সময়ে 14400 টাকা হইবে ? [C. U. 1941]

29. এক ব্যক্তি 5 , হার সুদে 1000 টাকা ধার করিয়া বাড়ী নির্মাণ করিল এবং সে বাড়ী প্রতি মাসে 12 টা. 50 পয়সা হিসাবে ভাড়া দিল, ঐ ভাড়া হইতে কত বৎসরে সে ঐ ধার পরিশোধ করিতে পারিবে ? [Pat. U. 1948]

30. 3% ও $2\frac{1}{2}\%$ হারে সুদ দেয় এইরূপ দুইটি ব্যাঙ্কে মোট 15000 টাকা জমা দিয়া বৎসরের শেষে টা. 432·75 মোট সুদ বাবদ পাওয়া গেলে, কোন ব্যাঙ্কে কত টাকা জমা দেওয়া হইয়াছিল ? [C. U. 1957]

31. এক ব্যক্তি মৃত্যুকালে তাঁহার সঞ্চিত 18750 টাকা তাহার 12 ও 14 বৎসর বয়স্ক দুইপুত্রকে এরূপভাবে ভাগ করিয়া দিলেন যে, যখন পুত্র দুইটির প্রত্যেকে 18 বৎসর বয়সে সাবালক হইবে তখন 5% হারে প্রত্যেকের অংশের টাকা সুদে-আসলে সমান হইবে। তিনি কোন্ পুত্রকে কত টাকা দিয়া গেলেন ? [D. B. 1927]

32. কোন মহাজন 4% সুদে 5 বৎসরের জন্য একজনকে এবং $3\frac{3}{4}\%$ সুদে 4 বৎসরের জন্য আর একজনকে মোট 10,000 টাকা ধার দিয়া প্রথমোক্ত ব্যক্তির নিকট হইতে যত সুদ পাইলেন তাহা দ্বিতীয় ব্যক্তির নিকট হইতে প্রাপ্ত সুদের দ্বিগুণ হইল। কাহাকে কত ধার দেওয়া হইয়াছিল ?

7

আসন্ন মান

Approximation

7·1. যখন কোন রাশির প্রকৃতমান নির্ণয় করা সম্ভব হয় না অথবা নির্ণয় করিতে পারিলেও কার্যক্ষেত্রে তাহা ব্যবহার করা যায় না তখন প্রকৃত মানের যথাসম্ভব নিকটতম যে মান লওয়া হয়– তাহাকে প্রকৃত মানের **আসন্ন মান** (Approximation বা Approximation Value) বলে।

7·2. পূর্ণসংখ্যা, মিশ্ররাশি ও সামান্য ভগ্নাংশের আসন্ন মান ঃ

মনে কর পূর্ব পাকিস্থান হইতে 481375 জন উদ্বাস্তু পশ্চিমবঙ্গে আসিয়াছে। এখন যদি কেহ তোমাকে জিজ্ঞাসা করে, পূর্বপাকিস্তান হইতে কত লক্ষ উদ্বাস্তু আসিয়াছে, এবং যদি তুমি বল 5 লক্ষ উদ্বাস্তু আসিযাছে তাহা হইবে তুমি প্রকৃত সংখ্যা অপেক্ষা $500000 - 481375 = 18625$ জন বেশী করিয়া বলিলে। আবার যদি বল 4 লক্ষ উদ্বাস্তু আসিয়াছে তাহা হইলে প্রকৃত সংখ্যা অপেক্ষা $481375 - 400000 = 81375$ জন কম করিয়া বলিলে। এই উভয় ক্ষেত্রে তোমার ভুল সংখ্যা বলা হইল। তবে 5 লক্ষ বা 500000 বলিলে ভুলের পরিমাণ $\frac{1}{2}$ লক্ষের কম হইল, আর 4 লক্ষ বা 400000 বলিলে ভুলের পরিমাণ $\frac{1}{2}$ লক্ষের বেশী হইল। এই জন্য 5 লক্ষকে প্রকৃত সংখ্যার **আসন্ন লক্ষ পর্যন্ত শুদ্ধমান** (Correct to nearest lakh) বলা হয়। আবার মনে কর, 1 টাকায় 7টি করিয়া আম বিক্রয় হইতেছে। সুতরাং একটি আমের মূল্য $14\frac{2}{7}$ পয়সা হইবে। এখন যদি 1টি আমের মূল্য তুমি 14 পয়সা দাও তাহা হইলে $\frac{2}{7}$ পয়সা কম দেওয়া হইল। আর যদি তুমি 15 পয়সা দাও তাহা হইলে $\frac{5}{7}$ পয়সা বেশী দেওয়া হইল। এখন $\because$ $\frac{5}{7}$ পয়সা $\frac{2}{7}$ পয়সা অপেক্ষা বেশী $\therefore$ 14 পয়সার পরিবর্তে 15 পয়সা দিলে ভুল বেশী হইবে। $\therefore$ 14 পয়সা দিলেই আমের প্রকৃত নিকটতম দাম দেওয়া হইবে। সেইজন্য 14 পয়সাকে $14\frac{2}{7}$ পয়সার **আসন্ন পয়সা পর্যন্ত** (Correct to nearest pice) শুদ্ধমান বলা হয়। এইরূপে 4টা. 50 পয়সার আসন্ন টাকা পর্যন্ত শুদ্ধমান 5 টাকা ; $\frac{3}{4}$ টাকার আসন্ন পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত আসন্নমান 1 টাকা ইত্যাদি।

7·3. আসন্ন মান নির্ণয়ের নিয়ম :

(1) কোন রাশির আসন্ন মান কোন নির্দিষ্ট একক পর্যন্ত শুদ্ধ করিয়া নির্ণয় করিতে হইলে প্রদত্ত রাশিটির ঐ নির্দিষ্ট এককের পরবর্তী অঙ্কগুলি ত্যাগ করিতে হইবে।

(2) পরিত্যক্ত অংশ যদি উক্ত নির্দিষ্ট এককের $\frac{1}{2}$ এর সমান অথবা $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা অধিক হয়, তবে যে সংখ্যাটি লওয়া হয় তাহার ডান দিকের শেষ অঙ্কের সহিত 1 যোগ করিতে হয়।

7·4. দশমিক ভগ্নাংশের আসন্ন মান : কোন নির্দিষ্ট দশমিক পর্যন্ত কোন দশমিক ভগ্নাংশের আসন্ন মান নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে যতগুলি পর্যন্ত অঙ্ক রাখিতে হইবে সংখ্যাটির ততগুলি অঙ্ক রাখিয়া অবশিষ্ট অঙ্ক পরিত্যাগ কর। পরে পরিত্যক্ত অঙ্কগুলির বামদিক হইতে সর্বপ্রথম অঙ্ক যদি 5 অথবা 5 অপেক্ষা অধিক কোন অঙ্ক থাকে তবে যে অঙ্কগুলি রাখিয়াছ তাহাদের ডানদিকের শেষ অঙ্কের সহিত 1 যোগ কর। ঐই যোগ করিবার পর যে সংখ্যা হইবে তাহ মিক ভগ্নাংশের আসন্ন মান।

7·5. 'দশমিক পর্যন্ত' এবং 'দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ' এই দুইটি কথার পার্থক্য : নীচের উদাহরণটি লক্ষ্য কর :

$\frac{1}{7}$ ভগ্নাংশটিকে দশমিকে পরিবর্তিত করিয়া (i) ভাগফল তিন দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় কর। (ii) ভাগফল আসন্ন তিন দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় কর।

$\because \frac{1}{7} = {}^{\cdot}14285714\cdots\cdots$

·142857 এর তিন দশমিক পর্যন্ত মান = ·142

ও ·142′8′57-এর তিন দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান = ·143

∴ "'দশমিক পর্যন্ত' এবং 'দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ' কথা দুইটি একই অর্থবোধক নহে ; প্রথমটির দ্বারা সাধারণ মান বুঝায় এবং দ্বিতীয়টি দ্বারা আসন্ন মান বুঝায়।

7·6. সার্থক অঙ্ক (Significant digit) :

কোন দশমিক ভগ্নাংশে যদি পূর্ণসংখ্যা না থাকে এবং দশমিক বিন্দুর পর প্রথমেই একটি বা একের অধিক 0 থাকে তবে ঐ শূন্যগুলির পর ডানদিকে প্রথমে যে অঙ্ক থাকে সেই অঙ্ক হইতে সার্থক অঙ্ক আরম্ভ হয়।

7·7. ভুল (Error):

ভুল তিন প্রকার: (1) প্রকৃত ভুল (Absolute Error), (2) আপেক্ষিক ভুল (Relative Error), (3) শতকরা ভুল (Percentage Error)।

(1) প্রকৃত ভুল = প্রকৃত মান ~ গৃহীত আসন্ন মান,

(2) $\text{আপেক্ষিক ভুল} = \dfrac{\text{প্রকৃত ভুল}}{\text{প্রকৃত মান}}$,

(3) $\text{শতকরা ভুল} = \dfrac{\text{প্রকৃত ভুল} \times 100}{\text{প্রকৃত মান}}$

অথবা আপেক্ষিক ভুল × 100

দ্রষ্টব্য: 'প্রায় সমান' (is approximately equal to) বুঝাইতে $\simeq$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়।

প্রশ্নমালা 7

[1 হইতে 4 এবং 7 হইতে 10 ক্লাসের এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. 45674 (i) আসন্ন কত হাজার, (ii) কত শত, (iii) কত দশ নির্ণয় কর।

(i) আসন্ন কত হাজার বলিলে প্রদত্ত সংখ্যাটি হইতে 45 রাখিয়া 674 ত্যাগ করিতে হইবে ∴ পরিত্যক্ত 674 এর বামদিকে প্রথম অঙ্ক 6 অর্থাৎ 5 এর অধিক।

∴ শুদ্ধ হাজার পর্যন্ত আসন্নমান = 45 + 1 = 46.

(ii) আসন্ন কত শত বলিলে প্রদত্ত সংখ্যাটি হইতে 456 রাখিয়া 74 ত্যাগ করিতে হইবে। ∵ পরিত্যক্ত 74 এর বামদিকের প্রথম অঙ্ক 7 অর্থাৎ ইহা 5 অপেক্ষা অধিক। ∴ শুদ্ধ শত পর্যন্ত আসন্ন মান = 456 + 1 = 457.

(iii) আসন্ন কত দশ বলিলে 4567 রাখিয়া 4 ত্যাগ করিতে হইবে। ∵ $4<5$ ∴ শুদ্ধ দশ পর্যন্ত আসন্নমান = 4567 (এখানে 1 যোগ করিতে হইবে না)।

2. 285716 সংখ্যাটি (i) আসন্ন কত লক্ষ, (ii) কত হাজার, (iii) কত শত, (iv) কত দশ নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলির আসন্ন পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

(i) $2\frac{7}{8}$, (ii) $5\frac{1}{4}$, (iii) $6\frac{1}{2}$, (iv) $8\frac{9}{16}$, (v) $6\frac{7}{78}$, (vi) $7\frac{15}{16}$.

$2\frac{7}{8}$ ভগ্নাংশটির আসন্ন পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত মান নির্ণয় করিতে হইলে ভগ্নাংশটি হইতে পূর্ণসংখ্যা 2 রাখিয়া $\frac{7}{8}$ পরিত্যাগ করিতে হইবে। $\because$ $\frac{7}{8}>\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় আসন্নমান $=2+1=3$ ইত্যাদি।

4. আসন্ন পূর্ণসংখ্যক টাকা পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :—

(i) 10 টা. 51 পয়সা, (ii) 15 টা. 75 পয়সা, (iii) 65 পয়সা।

(i) 10 টা. 51 পয়সার আসন্ন পূর্ণসংখ্যক টাকা পর্যন্ত মান নির্ণয় করিতে বলা হইয়াছে। $\therefore$ 51 পয়সা ত্যাগ করিতে হইবে। $\because$ 51 পয়সা 1 টাকার অর্ধেক 50 পয়সা অপেক্ষা অধিক,

$\therefore$ নির্ণেয় আসন্ন মান $=(10+1)$ বা 11 টাকা ইত্যাদি।

5. প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর :—

(i) 2·3425 ; (ii) ·2548 , (iii) 6·4027 ; (iv) ·59351.

(i) 2·3425 এর প্রথম দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় করিতে হইলে 425 পরিত্যাগ করিতে হইবে। $\because$ পরিত্যক্ত 425 এর বামদিকের প্রথম অঙ্ক 4, 5 হইতে ছোট। $\therefore$ $2·3425 \simeq 2·3$.

6. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর :—

(i) 5·253 ; (ii) 7·034 ; (iii) ·257 , (iv) ·048 ; (v) ·0053 ; (vi) ·0007.

(i) প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক 5 ও 2 $\therefore$ আসন্ন মান $=5·3$.

(ii) প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক 7 ও 0 $\therefore$ আসন্ন মান $=7·0$

(iii) প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক 2 ও 5 $\therefore$ আসন্ন মান $=·26$

(iv) প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক 4 ও 8 $\therefore$ আসন্ন মান $=·048$

(v) প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক 5 ও 3 $\therefore$ আসন্ন মান $=·0053$.

(vi) প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক 7 ও 7 এর পরবর্তী 0 $\therefore$ আসন্ন মান $=·00070$.

7. তিনটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর :—

(i) 9·0904 ; (ii) ·00932 ; (iii) ·00084.

8. নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলির (a) তিন দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত মান এবং (b) তিন দশমিক পর্যন্ত শুদ্ধ মান নির্ণয় কর :—

(i) $\frac{3}{7}$; (ii) $\frac{5}{6}$; (iii) $\frac{4}{11}$; (iv) $\frac{18}{19}$, (v) $1\frac{5}{13}$; (vi) $2\frac{4}{33}$.

9. দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান নির্ণয় কর :—

(i) 0·79 ÷ 6 ; (ii) 5·05 ÷ 9 ; (iii) 10·1 ÷ 11 ; (iv) 203 ÷ 1100.

(v) 13 ÷ 70.

10. 2 পা. 7 শি. $5\frac{3}{4}$ পে.-কে 1 পাউণ্ডের দশমিকে (আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত) প্রকাশ কর :—

11. 4 পাউণ্ডের 0·816 এর মান আসন্ন পেনি পর্যন্ত বাহির কর।

12. 3·1074 টনকে আসন্ন পাউণ্ডে প্রকাশ কর।

13 নিম্নলিখিত মিশ্র রাশিগুলিকে আসন্ন নিম্নতম এককে প্রকাশ কর : —

(i) $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টার 0·814. (ঘণ্টা, মিনিট, সেকেণ্ড)

(ii) 5 গ্যালনের 0·9172. (গ্যালন, কোয়ার্ট, পাইণ্ট)

(iii) $7\frac{1}{2}$ টনের 0·6186. (টন, হন্দর, কোয়ার্টার)

14. 6·254 এর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধমান 6·25 ; উহার (i) প্রকৃত ভুল, (ii) আপেক্ষিক ভুল, (iii) শতকরা ভুল নির্ণয় কর।

(i) প্রকৃত ভুল $= 6·254 - 6·25 = ·004$

(ii) আপেক্ষিক ভুল $= \frac{·004}{6·254} = ·000639$

(iii) শতকরা ভুল $= ·000639 \times 100 = \mathbf{0·0639}$.

15. নিম্নলিখিত পূর্ণসংখ্যাটির দশক পর্যন্ত এবং দশমিক ভগ্নাংশটির 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করিয়া, প্রকৃত ভুল, আপেক্ষিক ভুল ও শতকরা ভুল নির্ণয় কর :—

(i) 875 , (ii) 6·245

16. দুইটি সংখ্যার পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত আসন্ন মান 126 এবং 94 হইলে, সংখ্যা দুইটির গুণফলের সীমা নির্ণয় কর। [P. U. 1946]

17. আসন্ন পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত কোন সংখ্যার মান 85, ইহার বর্গের সীমা নির্ণয় কর। [P. U. 1948]

৪

চক্রবৃদ্ধি

Compound Interest

8·1 চক্রবৃদ্ধি (Compound Interest) :

যদি কোন অধমর্ণ এরূপভাবে চুক্তিবদ্ধ হয় যে, নির্দিষ্ট সময় অন্তে কোন আসলের সুদ দিবে এবং ঐ সময় অন্তে সুদ দিতে অক্ষম হইলে, ঐ সুদ আসলের সহিত যুক্ত হইয়া যে সুদ-আসল হইবে তাহা পরবর্তী সময়ের আসলরূপে গণ্য হইবে, তাহা হইলে ঐ প্রকার সুদকে **চক্রবৃদ্ধি সুদ** (Compound Interest) বলে।

মনে কর, বৎসর অন্তে সুদ দিতে হইবে এই চুক্তিতে শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সুদে চক্রবৃদ্ধি হিসাবে 1000 টাকা ধার দেওয়া হইল। 1 বৎসর পরে ঐ টাকার সুদ (1000 টাকার 5%) বা 50 টাকা হইল। মনে কর, অধমর্ণ উত্তমর্ণকে ঐ 50 টাকা সুদ দিতে পারিল না, তাহা হইলে 1 বৎসর অন্তে অর্থাৎ দ্বিতীয় বৎসরের প্রারম্ভে অধমর্ণের নিকট উত্তমর্ণের (1000+50) বা 1050 টাকা থাকিবে। সুতরাং দ্বিতীয় বৎসরের সুদ হিসাব করিতে 1050 টাকাকে আসলরূপে ধরিতে হইবে। (1050 টাকার 5%) বা $\left(1050 \times \frac{1}{20}\right)$ বা 52·5 টাকা দ্বিতীয় বৎসরের সুদ। আবার দ্বিতীয় বৎসর অন্তে সুদ পরিশোধ করিতে না পারিলে, দ্বিতীয় বৎসর অন্তে অর্থাৎ তৃতীয় বৎসরের প্রারম্ভে ঋণের পরিমাণ হইবে (1050+52·5) বা 1102·5 টা. এবং সুদ হিসাব করিতে হইলে উহা তৃতীয় বৎসরের আসলরূপে গণ্য হইবে। এখন দেখ, দুই বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = প্রথম বৎসরের সুদ + দ্বিতীয় বৎসরের সুদ = 50 টা. + 52·5 টা. = 102·5 টা. অথবা 1102·5 টা. − 1000 টা = 102·5 টা.। সুতরাং প্রতি বৎসরের সুদ যোগ করিয়া, কোন নির্দিষ্ট সময়ের চক্রবৃদ্ধি সুদ পাওয়া যায়, অথবা নির্দিষ্ট সময় অন্তে সবৃদ্ধিমূল হইতে মূল আসল বিয়োগ করিয়াও চক্রবৃদ্ধি সুদ পাওয়া যায়।

8·2. চক্রবৃদ্ধি সুদ বাহির করিবার সূত্র :

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

আসল P; সুদের হার r%, n বৎসর সংখ্যা এবং A, n বৎসর অন্তে সবৃদ্ধিমূল। এখন, এইরূপে সবৃদ্ধিমূল বাহির করিয়া উহা হইতে আসল (বা P) বিয়োগ করিলে চক্রবৃদ্ধি সুদ পাওয়া যায়।

8·3. চক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের কতিপয় নিয়ম ঃ

(a) আসল টাকা, পয়সা অথবা পাউণ্ড, শিলিং পেন্স অথবা ডলার সেণ্ট থাকিলে উহাকে যথাক্রমে টাকা, পাউণ্ড বা ডলারের ভগ্নাংশে প্রকাশ করিতে হয়।

যেমন :	25 টা. 75 পয়সা	=	টা. 25·75
	40 পা. 2 শি. 6 পে.	=	পা. 40·125
	30 ডলার 75 সেণ্ট	=	30·75 ডলার

(b) এক বৎসরের সুদ নির্ণয় করিতে হইলে $\frac{P. T. R.}{100}$ সূত্রানুসারে আসলকে বার্ষিক সুদের হার দ্বারা গুণ কর এবং গুণফলের ডান দিক হইতে দুই অঙ্কের বামে দশমিক বিন্দু বসাইলে আসলের 1 বৎসরের সরল সুদ পাওয়া যাইবে।

(c) শতকরা সুদের হার মিশ্রসংখ্যা হইলে সুদ নির্ণয়ে একাংশ (Aliquot part)-এর সাহায্য গ্রহণ করিলে সুবিধা হয়।

$$2\tfrac{3}{4}=2+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}=2+2 \text{ এর } \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2} \text{ এর } \tfrac{1}{2}.$$

সুতরাং সুদের হার $2\frac{3}{4}\%$ দিলে প্রথমে 2% এর সুদ বাহির করিয়া, উহাকে 4 দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{1}{2}\%$ হিঃ সুদ পাওয়া যাইবে।

(d) সুদ যদি 6 মাস অন্তর দেয় হয়, তাহা হইলে সুদের হার অর্ধেক ধরিয়া দ্বিগুণ সংখ্যক বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিবে। সুদ যদি 4 মাস অন্তর দেয় হয়, তাহা হইলে সুদের হার $\frac{1}{3}$ ধরিয়া 3 গুণ বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিবে। সুদ যদি $\frac{1}{y}$ বৎসর অন্তর দেয় হয়, তাহা হইলে সুদের হারকে y দ্বারা ভাগ করিয়া y গুণ বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিবে।

(e) যদি বৎসর সংখ্যা পূর্ণ না হইয়া $2\frac{7}{8}$ বৎসর, $3\frac{3}{8}$ বৎসর প্রভৃতি হয়, তবে প্রথমে পূর্ণ বৎসরগুলির চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিয়া বৎসরের ভগ্নাংশের জন্য ঐ বৎসরের আসলের ঐ খণ্ড বৎসরের সরল সুদ নির্ণয় করিবে এবং তাহা পূর্বের চক্রবৃদ্ধির সহিত যোগ করিবে।

প্রশ্নমালা 8

[1 হইতে 11 ক্লাসের এবং বাকীগুলি বাড়ীর কাজ]

1. বার্ষিক 5% হারে 500 টাকার 3 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি এবং আসন্ন পয়সা পর্যন্ত চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

প্রথম প্রক্রিয়া

বিবরণ		টাকা	
	টা.	500·00	আসল প্রথম বৎসর
		25·00	সুদ প্রথম বৎসর
(a) 525·00কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল দক্ষিণ দিকে 2 ঘর সরাইয়া দ্বিতীয় বৎসরের সুদ পাওয়া গেল।		525·00	আসল দ্বিতীয় বৎসর
	(a)	26.25	সুদ দ্বিতীয় বৎসর
(b) 551·25কে 5 দ্বারা গুণ করিয়া গুণফল দক্ষিণে 2 ঘর সরাইয়া তৃতীয় বৎসরের সুদ পাওয়া গেল।		551.25	আসল তৃতীয় বৎসর
	(b)	27·5625	সুদ তৃতীয় বৎসর
		578.81,25	সবৃদ্ধিমূল 3 বৎসর
		500·00,00	প্রথম আসল বাদ দাও
		78·81,25	চক্রবৃদ্ধি সুদ।

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি সুদ = টা. 78·81

বা 78 টা. 81 **পয়সা** (আসন্ন পয়সা পর্যন্ত)

দ্বিতীয় প্রক্রিয়া ঃ সূত্রের সাহায্যে ঃ

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

প্রদত্ত প্রশ্নে $A = 500\left(1+\frac{5}{100}\right)^3$ টাকা।

$$= 500\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 500 \times (1.05)^3 \text{ টা}$$

$$= 500 \times 1·05 \times 1.05 \times 1.05 \text{ টা.}$$

$$= 578.81\ 25 \text{ টা.}$$

```
   105
   105
  ----
   525
  105
  -----
  11025
    105
  -----
  55125
 11025
 -------
 1157625
       5
 5788125
```

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = (578·81,25 − 500) টা.

বা, **78·81 টা.**

বা, **78 টাকা 81 পয়সা (আসন্ন)।**

2. $2\frac{3}{4}\%$ হার সুদে 250 টাকা 50 পয়সা এর 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি আসন্ন পয়সা পর্যন্ত নির্ণয় কর।

$2\frac{3}{4}\% = 2\% + \frac{1}{2}\% + \frac{1}{4}\% = 2\% + 2\%$ এর $\frac{1}{4}\% + \frac{1}{2}\%$ এর $\frac{1}{2}$

টা. 250·50	= প্রথম বৎসরের আসল	
5·0100	= 2% হারে সুদ	প্রথম বৎসরের সুদ
1 2525	= $\frac{1}{2}$% „ „	
0·62625	= $\frac{1}{4}$% „ „	
টা. 257 38875	= দ্বিতীয় বৎসরের আসল	
5·1477750	= 2% হারে সুদ	দ্বিতীয় বৎসরের সুদ
1·2869437	= $\frac{1}{2}$% „ „	
0·6434718	= $\frac{1}{4}$% „ „	
টা. 264·4669405	= 2 বৎসরের সম্পূর্ণ চক্রবৃদ্ধি	
250 50	= প্রথম আসল	
13 96 69405	= চক্রবৃদ্ধি	

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = **13 টা. 97 পয়সা।**

3. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে 4% হারে 120000 টাকার 1 বৎসর 6 মাসের চক্রবৃদ্ধি কত ?

সুদ 6 মাস বা $\frac{1}{2}$ বৎসর অন্তর দেয়।

∴ সুদের হার $\frac{4}{2}$ বা 2% হিসাবে ধরিয়া প্রদত্ত আসলের ($1\frac{1}{2}$ বৎসর × 2) বা 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি বাহির করিলে নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি পাওয়া যাইবে।

এখন, $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

∴ আলোচ্য প্রশ্নে,

$A =$ টা $120000(1 + \frac{2}{100})^3 =$ টা. $\{120000 \times (1·02)^3\}$

$=$ টা. $(120000 \times 1·02 \times 1·02 \times 1·02)$

$=$ টা. $(12 \times 102 \times 102 \times 1·02) =$ টা. **127344·96**

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = টা. 127344·96 − টা. 120000

= টা. 7344·96 = **7344 টাকা 96 পয়সা।**

আসন্ন পয়সা পর্যন্ত (1 বৎসর অন্তর দেয়) চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর :—

	আসল	সময়	সুদের হার
4.	400 টা.	2 বৎসর	5%
5.	240 টা.	2 বৎসর	4%
6.	500 টা.	$2\frac{1}{2}$ বৎসর	3%
7.	175 টা. 75 পয়সা	2 বৎসর	5%
8.	400 টা.	2 বৎসর	$3\frac{3}{4}$%

আসন্ন পেনি পর্যন্ত (1 বৎসর অন্তর দেয়) চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর :—

	আসল	সময়	সুদের হার
9.	240 পা.	2 বৎসর	4%
10.	328 পা. 10 শি.	3 বৎসর	6%
11.	473 পা.	$2\frac{1}{2}$ বৎসর	6%

আসন্ন সেণ্ট পর্যন্ত (1 বৎসর অন্তর দেয়) চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর :—

12.	400 ডলার 50 সেণ্ট	2 বৎসর	5%
13.	500 ডলার	3 বৎসর	$2\frac{3}{4}$%

14. সুদ 3 মাস অন্তর দেয় হইলে 2% হারে 3000 টাকার 6 মাসের চক্রবৃদ্ধি কত ?

15. সুদ 6 মাস অন্তর দেয় হইলে $4\frac{1}{4}$% হারে 651 টাকার $1\frac{1}{2}$ বৎসরে চক্রবৃদ্ধি কত ?

16. চক্রবৃদ্ধি সুদের হার প্রথম বৎসর 1%, দ্বিতীয় বৎসর 2% এবং তৃতীয় বৎসর 3% হইলে 500 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

17. বৎসরান্তে দেয় 5% চক্রবৃদ্ধিহারে A 5000 টাকা ধার দিল ; B ঐ পরিমাণ টাকা $5\frac{1}{4}$% হারে সরল সুদে ধার দিল। 3 বৎসর পরে তাহারা সুদের টাকা আদায় করিল। তাহাদের মধ্যে কে অধিক লাভবান হইল এবং কি পরিমাণে বেশী পাইল ? [W. B. S. F. 1966]

18. বার্ষিক 5% হার সুদে 2000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর কত হইবে নির্ণয় কর। [ধর যে চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়] [W. B. S. F. 1965]

19. কোন টাকার 4% হারে 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 2448 টাকা। একই হারে ঐ পরিমাণ টাকার 2 বৎসরের সরল সুদ কত হইবে নির্ণয় কর।

[W. B. S. F. 1968]

*20. কোন মূলধনের 2 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি টা. 551·25 এবং 3 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি টা. $578\frac{9}{8}$ টাকা। মূলধন ও সুদের হার নির্ণয় কর।

*21. এক ব্যক্তি বার্ষিক 5% হারে চক্রবৃদ্ধি সুদে কিছু টাকা ধার করিল এবং 882 টাকা করিয়া দুই বার্ষিক কিস্তিতে উহা পরিশোধ করিল। সে কত টাকা ধার করিয়াছিল ?

*22. বার্ষিক $7\frac{1}{2}$% চক্রবৃদ্ধি সুদে 3320 টাকা ধার করিয়া এক ব্যক্তি দুই সমান বার্ষিক কিস্তিতে, প্রথম বৎসরান্তে এবং দ্বিতীয় বৎসরান্তে ঐ টাকা পরিশোধ করিতে চাহিলে, বার্ষিক কিস্তি কত হইবে ? [C. U. 1940]

যদি মনে করা যায় বার্ষিক কিস্তি 100 টাকা সে ক্ষেত্রে প্রথম বৎসরের আসল

$$=100\times\frac{100}{107\frac{1}{2}}=\frac{20000}{215}=\frac{4000}{43} \text{ টাকা.}$$

দ্বিতীয় বৎসরের আসল $=P$ ধরিলে

$$100=P\left(1+\frac{7\frac{1}{2}}{100}\right)^2$$

অর্থাৎ $P=\dfrac{100\times100\times100}{\frac{215}{2}\times\frac{215}{2}}=\dfrac{160000}{43\times43}$.

200 টাকা ধার শোধ করিতে হয় যদি আসল হয়

$$\frac{4000}{43}+\frac{160000}{43\times43}=\frac{332000}{43\times43} \text{ টাকা}$$

$\dfrac{332000}{43\times43}$ টাকা আসল হইলে বার্ষিক কিস্তি হয় $=100$ টাকা

1 „ „ „ „ „ $=\dfrac{100\times43\times43}{332000}$

3320 „ „ „ „ „ $=\dfrac{100\times43\times43}{332000}\times3320$

$=1849$ টাকা (উত্তর)

9

লাভ ও ক্ষতি

Profit and Loss

9·1. কোন দ্রব্যের বিক্রয়মূল্য (Selling price) ক্রয়মূল্য (Cost price) অপেক্ষা বেশী হইলে লাভ (Gain বা Profit) হয়, আর যদি বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্য অপেক্ষা কম হয় তাহা হইলে ক্ষতি বা লোকসান (Loss) হয়। ক্রয়মূল্য, বিক্রয়মূল্য, লাভ বা ক্ষতি ইহাদের মধ্যে পরস্পর সম্বন্ধ নিম্নে প্রদত্ত হইল :

(1) লাভ = বিক্রয়মূল্য − ক্রয়মূল্য।

(2) ক্ষতি = ক্রয়মূল্য − বিক্রয়মূল্য।

(3) বিক্রয়মূল্য = ক্রয়মূল্য + লাভ অথবা, ক্রয়মূল্য − ক্ষতি।

(4) ক্রয়মূল্য = বিক্রয়মূল্য − লাভ অথবা, বিক্রয়মূল্য + ক্ষতি।

9·2. একটি দ্রব্য 100 টাকায় ক্রয় করিয়া 101 টাকায় বিক্রয় করিলে 1 টাকা লাভ হয়, আবার আর একটি দ্রব্য 2 টাকায় কিনিয়া 3 টাকায় বিক্রয় করিলেও 1 টাকা লাভ হয়। উভয়ক্ষেত্রে লাভের পরিমাণ এক হইলেও লাভের হার এক নয়। উভয় লাভের তুলনামূলক বিচার করিতে হইলে শতকরা লাভ বা ক্ষতির হার জানিতে হইবে। প্রথম ক্ষেত্রে 100 টাকায 1 টাকা লাভ।

∴ শতকরা লাভ $=1$ বা, লাভ 1%

2 টাকায় 1 টাকা লাভ ∴ শতকরা লাভ $=(\frac{1}{2}\times 100)$ বা, 50

বা, লাভ $=50\%$

কোন দ্রব্য ক্রয় করিবার পর বিক্রয় করিলে লাভ বা লোকসান বুঝা যায়; সেইজন্য লাভ বা ক্ষতি সর্বদা ক্রয়মূল্যের উপর ধরা হয়। 5% লাভ হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 100 টাকা এবং তাহার উপর লাভ 5 টাকা।

বস্তুর সংখ্যার উপর কখনও শতকরা লাভ বা ক্ষতি ধরা হয় না। 100টি দ্রব্য 20 টাকা লাভে বিক্রয় করা হইয়াছে বলিলে লাভ 20% বলা চলিবে না। 100টি দ্রব্যের ক্রয়মূল্য জানিতে হইবে, তবে শতকরা লাভ বলা চলিবে। মনে করি 100 দ্রব্যের ক্রয়মূল্য 200 টাকা। 200 টাকায় 20 টাকা লাভ।

∴ লাভের হার $=\frac{20}{200}\times 100$ বা 10%.

9·3* 5% লাভ বলিলে বুঝিতে হইবে ক্রয়মূল্য 100 টাকা, লাভ 5 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য 105 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্যের $\frac{105}{100}$ গুণ বা 105% ; আবার 5% ক্ষতি হইলে বুঝিতে হইবে ক্রয়মূল্য 100 টাকা, ক্ষতি 5 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য 95 টাকা এবং বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্যের $\frac{95}{100}$ গুণ বা 95%। পক্ষান্তরে বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্যের 105% বলিলে 5% লাভ হইয়াছে এবং বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্যের 95% বলিলে 5% ক্ষতি হইয়াছে বুঝিতে হইবে।

9·4. কয়েকটি প্রয়োজনীয় সূত্র দেওয়া হইল :

1. শতকরা লাভ $=\frac{\text{লাভ}}{\text{ক্রয়মূল্য}}\times 100.$ 2. শতকরা ক্ষতি $=\frac{\text{ক্ষতি}}{\text{ক্রয়মূল্য}}\times 100.$

3. যদি ক্রয়মূল্য C, শতকরা লাভ বা ক্ষতি r এবং বিক্রয়মূল্য S হয় তবে লাভের বেলায় বিক্রয়মূল্য বা,

$$S=C+\frac{r}{100}\times C \qquad \text{বা, } S=\left(\frac{100+r}{100}\right)C$$

এবং ক্ষতির বেলায় বিক্রয়মূল্য বা, $S=C-\frac{r}{100}\times C.$

বা, $S=\left(\frac{100-r}{100}\right)C$ হইবে।

এই দুই প্রকার সূত্র $S=\frac{100\pm r}{100}\times C$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

প্রশ্নমালা 9

[1 হইতে 20 পর্যন্ত ক্লাসের কাজ এবং বাকীগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. একটি দ্রব্য 200 টাকায় কিনিয়া 220 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

লাভ = 220 টা. − 200 টা. = 20 টা. ∴ লাভ ক্রয়মূল্যের $\frac{20}{200}$ বা $\frac{1}{10}$ অংশ।

∴ শতকরা লাভ $=(\frac{1}{10}\times 100)$ বা 10. 10% লাভ (উত্তর)।

2. 55 পা. মূল্যের একটি দ্রব্য 50 পা.-এ বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হইবে ?

ক্ষতি = 55 পা − 50 পা = 5 পা. ∴ ক্ষতি = ক্রয়মূল্যের $\frac{5}{55}$ বা $\frac{1}{11}$.

∴ শতকরা ক্ষতি $=(\frac{1}{11}\times 100)$ বা $9\frac{1}{11}$. $9\frac{1}{11}$% ক্ষতি (উত্তর

3. একটি দ্রব্য 60 টাকায় ক্রয় করিয়া কি মূল্যে বিক্রয় করিলে 25% লাভ হইবে ?

$$\text{বিক্রয়মূল্য} = 60 \text{ টা.} + 60 \text{ টাকার } 25\% = 60 \text{ টা} + \overset{15}{\cancel{60}} \text{ টা.} \times \frac{\cancel{25}}{\underset{4}{\cancel{100}}}$$

$$= 60 \text{ টা.} + 15 \text{ টা.} = 75 \text{ টা.}$$

4. একটি দ্রব্য 21 শি.-এ বিক্রয় করিয়া এক ব্যবসায়ী 40% লাভ করিল ; দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ?

ক্রয়মূল্য 100 শি. হইলে, লাভ 40 শি. ∴ বিক্রয়মূল্য = 140 শি. ।

$$\therefore \text{ ক্রয়মূল্য} = \text{বিক্রয়মূল্যের } \tfrac{100}{140} \text{ অংশ} = \overset{3}{\cancel{21}} \text{ শি.} \times \frac{\overset{5}{\cancel{100}}}{\underset{7}{\cancel{140}}} = 15 \text{ শি.}$$

5 একখানি বাড়ী 840 টাকায় বিক্রয় করিলে 20% ক্ষতি হয়, বাড়ীখানির ক্রয়মূল্য কত ?

100 টাকা ক্রয়মূল্য হইলে ক্ষতি 20 টাকা ∴ বিক্রয়মূল্য = 80 টাকা ;

$$\therefore \text{ ক্রয়মূল্য} = \text{বিক্রয়মূল্যের } \tfrac{100}{80} \text{ গুণ} = \overset{21}{\cancel{840}} \text{ টা} \times \frac{\overset{50}{\cancel{100}}}{\underset{2}{\cancel{80}}} = 1050 \text{ টা}$$

6. 6টি ডিম 5 সেণ্টে কিনিয়া 5টি ডিম 6 সেণ্টে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

7. কোন্ গুণনীয়ক দ্বারা ক্রয়মূল্যকে গুণ করিলে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে বিক্রয় মূল্য পাওয়া যাইবে ?

(*a*) 10% লাভ, (*b*) 10% ক্ষতি, (*c*) $12\frac{1}{2}$% লাভ, (*d*) $7\frac{1}{2}$% ক্ষতি, (*e*) 5·5% লাভ, (*f*) 7·8% ক্ষতি ।

8. কোন্ গুণনীয়ক দ্বারা বিক্রয়মূল্যকে গুণ করিলে নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে ক্রয়মূল্য পাওয়া যায় ?

(*a*) লাভ 20%, (*b*) ক্ষতি 10%, (*c*) লাভ $6\frac{1}{4}$%, (*d*) ক্ষতি $6\frac{1}{4}$% (*e*) লাভ ·5%, (*f*) ক্ষতি ·25% ।

9. একখানি বাড়ী 1200 টাকায় ক্রয় করিয়া যদি উহা কেহ 1000 টাকায় বিক্রয় করিতে বাধ্য হয় তাহা হইলে তাহার শতকরা কত ক্ষতি হয় ?

10. আলু প্রতি হন্দর 7 শি. দরে ক্রয় করিয়া প্রতি পাউণ্ড 1 পেনি দরে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে ?

11. এক কি.গ্রা. 62 পয়সা দরে 1 কুইণ্টাল আলু ক্রয় করা হইল ; 10 কি.গ্রা. আলু পচিয়া গেল। অবশিষ্ট আলু প্রতি কি. গ্রা. 70 পয়সা দরে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

12. তারকা চিহ্নিত স্থানগুলি পূরণ কর :

	ক্রয়মূল্য	বিক্রয়মূল্য	শতকরা লাভ	শতকরা ক্ষতি
(*a*)	500 টা.		10%	
(*b*)		190 টা.		5%
(*c*)	700 পা.	1050 পা.		
(*d*)	600 টা.	450 টা.		
(*e*)		206 পা.	3%	
(*f*)	300 পা	275 পা.		

13. একটি দ্রব্য 240 টাকায় বিক্রয় করিলে 20% লাভ হয়। ঐ দ্রব্যটি 192 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

ক্রয়মূল্য $= 240$ টা. $\times \frac{100}{120} = 200$ টা.। $\therefore$ ক্ষতি $= 200$টা. $- 192$টা. $= 8$টা.

$\therefore$ শতকরা ক্ষতি $= \frac{\text{ক্ষতি}}{\text{ক্রয়মূল্য}} \times 100 = \frac{8\text{টা.}}{200\text{টা.}} \times 100 = 4$

$\therefore$ **উত্তর 4% ক্ষতি।**

অথবা, 240 টা. = ক্রয়মূল্যের 120% $\therefore$ 1 টা. = ক্রয়মূল্যের $\frac{120}{240}$%

$\therefore$ 192 টা. = ক্রয়মূল্যের $\frac{120}{240} \times 192$% বা 96%

$\therefore$ শতকরা ক্ষতি = (100 − 96) বা 4. $\therefore$ **উত্তর 4% ক্ষতি।**

অথবা, $\because$ 20% লাভ হইয়াছে

∴ বিক্রয়মূল্য 120 টা. হইলে ক্রয়মূল্য 100 টাকা.

∴ „ 240 „ „ „ (100 টা. × 2) বা 200 টাকা,

200 টাকায় ক্ষতি (200 − 192) বা 8 টাকা,

∴ 100 টাকায় ক্ষতি (8 টা. ÷ 2) বা 4 টাকা।

∴ শতকরা ক্ষতি = 4, ∴ উত্তর 4% ক্ষতি।

14. একটি দ্রব্য 48 টাকায় বিক্রয় করিলে 4% ক্ষতি হয়, ঐ দ্রব্য কত টাকায় বিক্রয় করিলে 5% লাভ হইবে ?

ক্রয়মূল্যের 96% = 48 টা. ∴ ক্রয়মূল্যের 1% = $\frac{48}{96}$ টাকা।

∴ „ 105% = $\frac{48}{96} \times 105$ বা $\frac{105}{2}$ বা $52\frac{1}{2}$ টা.

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = 52 টা. 50 পয়সা।

অথবা, ক্রয়মূল্য = 48 টা $\times \frac{100}{96} = 50$ টা

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = 50 টা $\times \frac{105}{100} = \frac{105}{2}$ টা = $52\frac{1}{2}$ টা.

= 52 টা. 50 পয়সা।

15 একটি দ্রব্য 5% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হইল, যদি দ্রব্যটি 60 টাকা অধিক মূল্যে বিক্রয় করা হইত তাহা হইলে 10% লাভ হইত, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত ?

মনে করি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য = 100 টাকা

দ্রব্যটি 5% ক্ষতিতে বিক্রয় করিলে, বিক্রয়মূল্য = 95 টাকা, আবার দ্রব্যটি বিক্রয় করিয়া 10% লাভ হইলে বিক্রয়মূল্য = 110 টা.

∴ বিক্রয়মূল্য (110 − 95) বা 15 টা. বেশী হয় ক্রয়মূল্য 100 টাকা ধরিলে,

∴ 60 টা. „ „ „ (100 × 4)

বা 400 টা. ধরিলে

∴ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য = 400 টা.

অথবা,

দ্রব্যটি বিক্রয় করিয়া 60 টা. বেশী পাইলে 5% ক্ষতিপূরণ হইয়াও 10% লাভ হইত।

∴ ক্রয়মূল্যের (5+10) বা 15% বা $\frac{15}{100}$ = 60 টা.

∴ ক্রয়মূল্য $= \overset{4}{\cancel{60}}$ টা. $\times \frac{100}{\cancel{15}} = 400$ টা.

16 একটি বাড়ী 4500 টাকায় বিক্রয় করায় শতকরা $12\frac{1}{2}$ টা. লাভ হইল। ঐ বাড়ী 3800 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হইত ? [C. U. 1924 ; D. B. 1933]

17. একটি ঘোড়া 880 টাকায় বিক্রয় করায় 12% ক্ষতি হইল, 10% লাভ করিতে হইলে ঘোড়াটি কত মূল্যে বিক্রয় করিতে হইবে ? [C. U. 1947]

18. একটি বাড়ী 490 পাউণ্ডে বিক্রয় করিলে $12\frac{1}{2}$% ক্ষতি হয় ; উহা 596 পা. 8 শি. মূল্যে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

19. টাকায় 12টি লেবু বিক্রয় করিলে 4% ক্ষতি হয়, টাকায় কয়টি করিয়া বিক্রয় করিলে 44% লাভ হইবে ? [Pat. U. 1934]

20. এক ব্যক্তি একটি গাড়ী 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করিলেন ; যদি তিনি আরও 9 টাকা বেশী মূল্যে গাড়ীটি বিক্রয় করিতে পারিতেন তবে তাঁহার $12\frac{1}{2}$% লাভ হইত। গাড়ীটির ক্রয়মূল্য কত ? [C. U. 1944]

21. এক ব্যবসায়ী 240 টাকায় একটি দ্রব্য বিক্রয় করিয়া 25% লাভ করিল ; ঐ দ্রব্য 216 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইত ? [C. U. 1917]

22. 37 গিনিতে একটি ঘোড়া বিক্রয় করায় আমার 7% ক্ষতি হইল ; কত গিনিতে বিক্রয় করিতে পারিলে আমার 12% লাভ হইত ?

23. একটি দ্রব্য 6 শি. 3 পে. মূল্যে বিক্রয় করিলে 35% লাভ হয় ; উহা 8 শি. 6 পে. মূল্যে বিক্রয় করা হইলে শতকরা কত লাভ হইবে ? [D.B. 1928]

24. একটি গাড়ী বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তির $2\frac{1}{2}$% ক্ষতি হইল ; আর যদি তিনি 6 টাকা বেশী পাইতেন, তবে তাঁহার 5% লাভ হইত। গাড়িটির ক্রয়মূল্য কত ? [C. U. 1934]

25. এক ব্যক্তি একটি দ্রব্য ক্রয় করিয়া 6% লাভে বিক্রয় করিলেন ; যদি দ্রব্যটির

ক্রয়মূল্য 4% কম হইত এবং বিক্রয়মূল্য পূর্বাপেক্ষা 2·47 টা. বেশী হইত তবে তাঁহার 12% লাভ হইত। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত? [C. U. 1944]

26. একটি বাড়ী 2576 পাউণ্ডে বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তি 12% লাভ করিলেন। যদি বাড়ীটির ক্রয়মূল্য 100 পাউণ্ড কম হইত, তবে তাঁহার শতকরা কত লাভ হইত? [C. U. 1923]

*27. এক ব্যক্তি প্রতিটি 6450 টা. দরে দুইটি বাড়ী ক্রয় করিলেন। একটি বাড়ী 10% লাভে এবং অপরটি 6% ক্ষতিতে বিক্রয় করিলে মোটের উপর তাঁহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে? [W. B. S F 1957]

28. এক ব্যবসায়ী তাহার দ্রব্যের বিক্রয়মূল্য ক্রয়মূল্য অপেক্ষা 20% অধিক ধার্য করিল; ক্রেতাকে $12\frac{1}{2}$% কমিশন দিলে তাহার শতকরা কত লাভ হইবে? [C. U 1953]

29. এক ব্যক্তি কতকগুলি আম টাকায় 15টি দরে এবং সমানসংখ্যক আম টাকায় 12টি দরে কিনিল। আমগুলি মিশাইয়া টাকায় 13টি দরে বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে? [W B. S. F. 1958, '66]

30. মিথ্যা ওজন ব্যবহার করিয়া এক ব্যবসায়ী ক্রেতা বিক্রেতা উভয়কেই 10% হিসাবে প্রবঞ্চিত করে। এই অসাধু ব্যবহারে তাহার শতকরা কত লাভ হয়? [A U 1920]

31. A 19% ক্ষতি করিয়া একটি বাড়ী B-কে 4860 টাকায় বিক্রয় করিল। B আবার উহা C-কে এমন মূল্যে বিক্রয় করিল যাহা পাইলে A-এর 17% লাভ হইত। B শতকরা কত লাভ করিল?

[C. U. 1929; W B. S. F. 1959]

*32. এক ব্যক্তি 2400 টাকায় 96টি ষাঁড় ক্রয় করিল। সে ইহার 36টি 15% লাভে এবং 48টি $12\frac{1}{2}$% লাভে বিক্রয় করিল। অবশিষ্ট ষাঁড়ের দুইটি মরিয়া গেল এবং যাহা বাকী রহিল তাহা সে ক্রয়মূল্যে বিক্রয় করিলে তাহার কত লাভ হইবে? [W. B. S. F. 1958]

33. সোন-দ্রব্য নির্মাণকারী তাহার মাল 25% লাভে এক পাইকারী ব্যবসায়ীকে বিক্রয় করিল। পাইকারী ব্যবসায়ী 10% লাভে খুচরা বিক্রেতাকে এবং খুচরা বিক্রেতা 5% লাভে ক্রেতাকে ঐ মাল বিক্রয় করিল। যে মালের খুচরা বিক্রয়মূল্য 231 টাকা, তাহার নির্মাণ-খরচ কত? [D. B. 1929]

মনে করি নির্মাণ খরচ $= x$ টাকা।

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে $x \times \frac{125}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{105}{100} = 231$

$$x = 231 \times \frac{100}{125} \times \frac{100}{110} \times \frac{100}{105} = 160$$

$\therefore$ নির্ণেয় নির্মাণ খরচ = 160 টাকা।

34. এক ব্যক্তি 370 টাকায় একটি ঘোড়া ও একটি গরু কিনিয়া 412 টাকায় বিক্রয় করাতে ঘোড়াতে 20% লাভ এবং গরুতে 15% ক্ষতি হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত? [C. U 1951]

*35. এক ব্যক্তি 1500 টাকায় কিছু মাল ক্রয় করিয়া তাহার $\frac{1}{3}$ অংশ 4% ক্ষতিতে বিক্রয় করিল। ঐ বিক্রয়মূল্য শতকরা কি পরিমাণ বৃদ্ধি করিলে অবশিষ্ট মাল বর্ধিতমূল্যে বিক্রয় করিয়া তাহার মোটের উপর 4% লাভ হইবে?

[D. B 1945]

36. 500 টাকায় একটি ঘোড়া ও গাভী ক্রয় করিয়া ঘোড়াটি 20% লাভে এবং গাভিটি 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করায় মোট 2% লাভ হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত? [D B. 1936]

37 4000 টাকায় একটি বাড়ী বিক্রয় করিয়া এক ব্যক্তির কিছু ক্ষতি হইল; কিন্তু উহা 5000 টাকায় বিক্রয় করিলে সেই ক্ষতির $\frac{2}{3}$ লাভ হইত। বাড়ীটির ক্রয়মূল্য কত ছিল? [D B. 1924]

38. কোন ব্যক্তি নগদ মূল্য পাইলে তাহার মালের বিক্রয়মূল্য 10% কমাইয়া দেয় এবং তাহার মালের ক্রয়মূল্য বিক্রয়মূল্যের 60%। নগদ মূল্যে মাল বিক্রয় করিয়া তাহার কত লাভ হয়। [W. B. S. F 1955 Addl.]

*39. এক ব্যক্তি 1500 টাকায় কিছু মাল ক্রয় করিয়া তাহার $\frac{1}{3}$ অংশ 4% ক্ষতিতে বিক্রয় করিল। অবশিষ্ট মাল শতকরা কত লাভে বিক্রয় করিলে মোটের উপর তাহার 4% লাভ হইবে?

[35 এবং 39 অঙ্ক দুইটির পার্থক্য লক্ষ্য কর।]

দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

1

অনুপাত ও সমানুপাত

Ratio and Proportion

A. অনুপাত (Ratio)

1·1. অনুপাত : এক জাতীয় দুইটি রাশির তুলনা করিয়া একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তাহা যাহার দ্বারা প্রকাশ করা হয় তাহাকে রাশি-দ্বয়ের **অনুপাত** (Ratio) বলে। উহাদের মধ্যে প্রথম রাশিকে **পূর্বরাশি** (Antecedent) এবং দ্বিতীয় রাশিকে **উত্তররাশি** (Consequent) বলে।

দ্রষ্টব্য : (*a*) যে দুইটি রাশির অনুপাত লওয়া হয় তাহাদের মধ্যে ':' এইরূপ চিহ্ন দিয়াও লেখা হয়। যেমন 3 : 5 লিখা থাকিলে বুঝিতে হয় 3 এর সহিত 5 এর অনুপাত কত তাহাই বুঝান হইয়াছে। 'আবার' : চিহ্নটি ÷ ভাগ চিহ্নেরই পরিবর্তিত রূপ, মাঝখানের দাঁড়িটি কেবল লুপ্ত হইয়াছে। অতএব $3 : 5 = 3 \div 5 = \frac{3}{5}$, অতএব,

$$\text{অনুপাত} = \frac{\text{পূর্বরাশি}}{\text{উত্তররাশি}}\text{।}$$

ভগ্নাংশ যেমন প্রকৃত ও অপ্রকৃত দুই প্রকার হইয়া থাকে, অনুপাতের রাশিদ্বয়ের মধ্যেও তেমনি পূর্বরাশি উত্তররাশি অপেক্ষা বড় বা ছোট দুই ই হইতে পারে। পূর্বরাশি উত্তররাশি অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে অনুপাতকে **গুরু অনুপাত** (Ratio of greater inequality) এবং ক্ষুদ্র হইলে **লঘু অনুপাত** (Ratio of less inequality) বলে। যেমন, 15 : 7 গুরু অনুপাত এবং 7 : 15 লঘু অনুপাত।

(*b*) অনুপাত ব্যবহারিক ক্ষেত্রে ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হয়। (*c*) অনুপাত রাশিদ্বয় সর্বদাই সমজাতীয় হইবে। (*d*) অনুপাত সর্বদাই শুদ্ধ সংখ্যা। (*e*) ভগ্নাংশের লব ও হরকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন পরিবর্তন হয় না বলিয়া, অনুপাতের রাশিদ্বয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অনুপাতের কোন পরিবর্তন হয় না। যেমন : 3 : 4 = 9 : 12 অথবা $\frac{3}{2}$: 2 ইত্যাদি।

1·2. যদি দুইটি অনুপাত এমন হয় যে, প্রথমটির যাহা পূর্বরাশি, দ্বিতীয়টির তাহা উত্তররাশি এবং দ্বিতীয়টির যাহা পূর্বরাশি প্রথমটির তাহা উত্তররাশি, তবে এই দুই অনুপাতের একটিকে অপরটির **ব্যস্ত অনুপাত** (Inverse Ratio) বলে। যেমন ; 5 : 7, 7 : 5 ইহারা পরস্পর ব্যস্ত অনুপাত।

1·3. একাধিক অনুপাতের পূর্বরাশিগুলির গুণফলকে পূর্বরাশি এবং উত্তর রাশিগুলির গুণফলকে উত্তররাশি ধরিয়া যে অনুপাত করা হয় তাহাকে **মিশ্র** বা **যৌগিক অনুপাত** (Compound Ratio) বলে।

যথা, 2 : 3, 3 : 7, 28 : 15 এবং 5 : 16 এর মিশ্র অনুপাত

$$=2\times3\times28\times5 : 3\times7\times15\times16=1 : 6$$

প্রশ্নমালা 1A

[1—10 অঙ্কগুলি ক্লাসে কর ও বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. 2 টা. 62 পয়সা : 7 টা. 86 পয়সা = কত ?

2 টা. 62 পয়সা = 262 পয়সা

7 টা. 86 পয়সা = 786 পয়সা

$$\therefore \frac{2 \text{ টা. } 62 \text{ পয়সা}}{7 \text{ টা. } 86 \text{ পয়সা}}=\frac{262 \text{ পয়সা}}{786 \text{ পয়সা}}=\frac{\cancel{262}}{\underset{3}{\cancel{786}}}=\frac{1}{3}$$

. নির্ণেয় অনুপাত = 1 : 3,

2. 2 : 3, 3 : 4 এবং 19 : 20 এর মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তম এবং কোন্‌টি ক্ষুদ্রতম নির্ণয় কর।

দ্রষ্টব্য : অনুপাত ভগ্নাংশেরই একটি বিশিষ্ট রূপ বলিয়া যে প্রণালীর সাহায্যে ভগ্নাংশকে মানের ক্রমানুসারে সাজান হইয়াছে, এখানেও ঠিক সেই প্রণালী অবলম্বন করিতে হইবে।

$$2 : 3=2\times20 : 3\times20=40 : 60$$

$$3 : 4=3\times15 : 4\times15=45 : 60$$

$$19 : 20=19\times3 : 20\times3=57 : 60.$$

অনুপাতগুলির উত্তররাশি একই সংখ্যায় পরিণত (অর্থাৎ ভগ্নাংশগুলিকে সাধারণ হরবিশিষ্ট) করিয়া দেখা গেল যে (লবগুলির মধ্যে অর্থাৎ) পূর্বরাশিগুলির মধ্যে 57 বৃহত্তম এবং 40 ক্ষুদ্রতম। অতএব, 19 : 20 বৃহত্তম এবং 2 : 3 ক্ষুদ্রতম।

3. যদি A-এর টাকা : B-এর টাকা = 4 : 5, B-এর টাকা : C-এর টাকা = 6 : 5 হয়, তবে A-এর টাকার সহিত C এর টাকার অনুপাত কত ?

$$\frac{\text{A-এর টাকা}}{\text{B-এর টাকা}}=\frac{4}{5} \text{ এবং } \frac{\text{B এর টাকা}}{\text{C এর টাকা}}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{\text{A-এর টাকা}}{\text{B এর টাকা}}\times\frac{\text{B এর টাকা}}{\text{C-এর টাকা}}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{\text{A এর টাকা}}{\text{C এর টাকা}}=\frac{24}{25}, \quad \therefore \text{ নির্ণেয় অনুপাত} = 24 : 25$$

4 নিম্নলিখিত সরল অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত নির্ণয় কর :

2 : 3, 4 : 5, 5 : 6 ও 6 : 7.

নির্ণেয় যৌগিক অনুপাত $=\frac{2}{3}\times\frac{4}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{6}}\times\frac{\cancel{6}}{7}=8 : 21.$

5 নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির মান লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর :

(*a*) 6 : 9, 24 : 36, 19 : 38, 60 : 150, 150 : 210.

(*b*) $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$, $4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$, $9\frac{1}{11} : 11\frac{1}{11}$, $12\frac{1}{12} : 18\frac{1}{8}$.

(*c*) 2 টা 50 পয়সা : 10 টা 25 পয়সা, 5 কি গ্রা 5 গ্রা : 1 কুইণ্ট্যাল ;
5 পা 5 শি : 5 গিনি, 6 লি : 3 ঘন ডেসিমি,
3 হ 3 কো. : 1 টন, 10 মি 2 ডেসিমি : 5 ডেকামি

(*d*) 2 : 5, ·7 : 21, 42 : 36, 77 : 89.

(*e*) 2 টা 75 পয়সা এর $\frac{5}{8}$: টা 3·85 এর $\frac{9}{11}$,
7 পা 10 শি এর $\frac{9}{10}$: 10 পা 15 শি এর $\frac{1}{5}$।

6 কোনটি বৃহত্তম এবং কোনটি ক্ষুদ্রতম নির্ণয় কর :

(*a*) 1 : 2, 3 : 5, 7 : 9 ও 11 : 21

(*b*) $1 : \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ ও $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$

(*c*) 4 : 5, 25 পয়সা : 30 পয়সা, 6 ডেমি : 50মি এবং 1পা. 5শি : 2পা.

7. নিম্নলিখিত সরল অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত নির্ণয় কর :

(*a*) 3 : 5, 25 : 36 ও 12 : 35, (*b*) 2 : 6, 15 : 28 ও 84 : 125 ;

(*c*) 21 : 32, 5 : 1·5 ও $5\frac{1}{7} : 2\frac{1}{7}$

8. A-এর বয়স : B এর বয়স = 3 : 5, B-এর বয়স : C-এর বয়স = 6 : 7 ; A-এর বয়স : C-এর বয়স = কত ?

9. যদি A=B-এর $\frac{1}{3}$ এবং C=B-এর $\frac{1}{5}$ হয়, তবে A ও C-এর অনুপাত কত ?

10. যদি দুইটি রাশির অনুপাত 5 : 7 হয় এবং পূর্বরাশিটি 25 টাকা হয় তবে উত্তর রাশিটি কত ?

$$5:7=5\times5:7\times5=25:35$$

=25 টা. : 35 টা. ∴ নির্ণেয় রাশি=35 টাকা।

11. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 10 : 21, পূর্বরাশিটি 30 মাইল হইলে, উত্তর-রাশিটি কত ?

12. 165 গ্যালন মদ ও জলের মিশ্রণে মদ ও জলের অনুপাত=9 : 2 ; ঐ মিশ্রণে মদ ও জলের পরিমাণ কত ?

13. যখন A 5 টাকা উপার্জন করে, B তখন 8 টাকা উপার্জন করে ; আবার B যখন 7 টাকা উপার্জন করে C তখন 10 টাকা উপার্জন করে। A এবং C এর উপার্জনের তুলনা কর।

14. P, Q, R, S ইহারা একজাতীয় রাশি, এবং P : Q=3 : 4, Q : R =5 : 7 এবং R : S=8 : 9 ; P এবং S এর অনুপাত নির্ণয় কর।

15. বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত=22 : 7, যে বৃত্তের ব্যাস 10 মি. 5 ডেসিমি. তাহার পরিধি কত ?

16. একটি পাত্রে 15 লিটার বিশুদ্ধ দুগ্ধে 5 লিটার জল মিশ্রিত আছে, আর একটি পাত্রে 12 লিটার বিশুদ্ধ দুগ্ধে 3 লিটার জল মিশ্রিত আছে। ঐ দুই মিশ্র পদার্থে দুগ্ধের পরিমাণের তুলনা কর।

17. 30 লিটার জলমিশ্রিত মদ্যে, মদ্য ও জলের অনুপাত 7 : 3 ; উহাতে আর কত লিটার জল মিশাইলে মদ্য ও জলের অনুপাত 3 : 7 হইবে ?

(7+3) বা 10 ভাগের মধ্যে মদ্য 7 ভাগ এবং জল 3 ভাগ আছে।

∴ মদ্যের পরিমাণ $=\frac{30 \text{ লিটার}\times7}{10}=21$ লিটার

এবং জলের পরিমাণ $=\frac{30 \text{ লিটার}\times3}{10}=9$ লিটার।

অথবা, 30−21=9 লিটার।

নূতন মিশ্রণে জল মিশ্রিত করা হইয়াছে, সুতরাং মদ্যের পরিমাণ পূর্বের মিশ্রণের 21 লিটারই আছে।

এখন নূতন মিশ্রণে মদ্য : জল = 3 : 7 = 21 : 49 = 21 লিটার : 49 লিটার।

নূতন মিশ্রণে 21 লিটার মদ্য থাকিলে 49 লিটার জল আছে।

পূর্বে জল 9 লিটার ছিল, ∴ (49 − 9) বা 40 লিটার জল মিশ্রিত করা হইয়াছে।

18. 20 জন সভ্যের কমিটিতে পুরুষদের সংখ্যা ও স্ত্রীলোক সভ্যের সংখ্যার অনুপাত 3 : 1, কমিটিতে আর কতজন স্ত্রীলোক সভ্য লইলে পুরুষ ও স্ত্রী সভ্যদের অনুপাত 3 : 2 হইবে?

19. 65 গ্যালন জলমিশ্রিত দুগ্ধে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 9 : 4 আছে, ঐ মিশ্রণে আর কত গ্যালন জল মিশ্রিত করিলে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 1 : 1 হইবে?

20. একটি কুকুর একটি শশকের পশ্চাদ্ধাবন করিল। কুকুর যখন 4 লাফ দেয় শশক তখন 5 লাফ দেয়, কিন্তু কুকুর 3 লাফে যতদূর যায় শশক 4 লাফে ততদূর যায়। কুকুর ও শশকের গতিবেগের তুলনা কর। [C. U. 1933]

21. নিউইয়র্ক হইতে 2700 মাইল দূরবর্তী লিভারপুলে যাইতে একখানি জাহাজের 9 দিন 14 ঘণ্টা সময় লাগে, আবার লণ্ডন হইতে 405 মাইল দূরবর্তী এডিনবরা যাইতে একখানি ট্রেনের 18 ঘণ্টা সময় লাগে। জাহাজ ও ট্রেনের গতিবেগের তুলনা কর। [Civil Service]

B. সমানুপাত (Proportion)

1·1. দুইটি অনুপাত যদি সমান হয়, তবে এই অনুপাতদ্বয়ের সমতাকে **সমানুপাত** (Proportion) বলে। এই দুইটি সমান অনুপাত উৎপন্ন করিতে যে চারিটি রাশির প্রয়োজন হয়, সেই রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে। যেমন, 18 টাকা : 21 টাকা = 24 কি গ্রা. : 28 কি. গ্রা. বলিয়া 18, 21, 24 ও 28 এই রাশি চারিটিকে সমানুপাতী রাশি এবং সমানুপাতদ্বয়ের সমতাকে সমানুপাত বলা হয়।

1·2. সমানুপাতের রাশি চারিটির মধ্যে প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **অন্ত্য** বা **প্রান্তীয়** রাশি (Extremes), এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্যরাশি** (Means), চতুর্থরাশিকে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth Proportional) বলে। আবার প্রথম ও তৃতীয় রাশিকে অথবা দ্বিতীয়

বা চতুর্থ রাশিকে **অনুরূপ রাশি** (Corresponding terms) বলে। ": :" চিহ্নের সাহায্যে অনুপাতদ্বয়ের সমতা প্রকাশ করা হয় ; অর্থাৎ দুইটি অনুপাত যদি ': :' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত থাকে, তবে বুঝিতে হইবে অনুপাতদ্বয় পরস্পর সমান এবং ঐ অনুপাতদ্বয়ের রাশি চারিটি সমানুপাতী। যেমন, 4 : 6 : : 20 : 30, এখানে 4 ও 6 এর অনুপাত 20 এর সহিত 30 এর অনুপাতের সমান এবং 4, 6 ও 20, 30 এই রাশি চারিটি সমানুপাতী। ইহাদের মধ্যে 4 ও 30 অন্ত্যরাশি 6 ও 20 মধ্যরাশি, 30 রাশিটি 4, 6 ও 20 এর চতুর্থ সমানুপাতী ; 4 ও 20 অথবা 6 ও 30 অনুরূপ রাশি।

1·3. যদি তিনটি রাশি এমন হয় যে, প্রথমটির সহিত দ্বিতীয়টির অনুপাত, দ্বিতীয়টির সহিত তৃতীয়টির অনুপাতের সমান হয় তবে ঐ রাশি তিনটিকে **ক্রমিক সমানুপাতী** (In Continued Proportion) বলে এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third Proportional) এবং দ্বিতীয়টিকে প্রথম ও তৃতীয় রাশির **মধ্য সমানুপাতী** (Mean Proportional) বলে।

দ্রষ্টব্য ঃ এক জাতীয় তিনটির অধিক রাশিও ক্রমিক সমানুপাতিক হইতে পারে। সেইরূপ স্থলে বুঝিতে হইবে যে, প্রথম : দ্বিতীয় - দ্বিতীয় : তৃতীয় = তৃতীয় : চতুর্থ = চতুর্থ : পঞ্চম ইত্যাদি। যেমন, 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 ইত্যাদি, এবং প্রথম ও তৃতীয়ের গুণফল মধ্য সমানুপাতীর বর্গের সমান হয়। যেমন, $2\times8=4^2$, বা $8\times32=16^2$ ইত্যাদি।

1·4 সমানুপাতী রাশি সম্বন্ধে কয়েকটি জ্ঞাতব্য বিষয় :

(*a*) প্রথম রাশি × চতুর্থ রাশি = দ্বিতীয় রাশি × তৃতীয় রাশি।

(*b*) $\text{প্রথম রাশি}=\dfrac{\text{দ্বিতীয় রাশি}\times\text{তৃতীয় রাশি}}{\text{চতুর্থ রাশি}}$

(*c*) $\text{দ্বিতীয় রাশি}=\dfrac{\text{প্রথম রাশি}\times\text{চতুর্থ রাশি}}{\text{তৃতীয় রাশি}}$

(*d*) $\text{তৃতীয় রাশি}=\dfrac{\text{প্রথম রাশি}\times\text{চতুর্থ রাশি}}{\text{দ্বিতীয় রাশি}}$

(*e*) $\text{চতুর্থ রাশি}=\dfrac{\text{দ্বিতীয় রাশি}\times\text{তৃতীয় রাশি}}{\text{প্রথম রাশি}}$

(*f*) সমানুপাতী রাশিগুলিকে বিপর্যস্ত করিলে, বিপর্যস্ত রাশিগুলিও সমানুপাতী রাশি হইবে।

(*g*) সমানুপাতী রাশিগুলি একজাতীয় শুদ্ধ সংখ্যা হইলে,

$$\frac{\text{প্রথম রাশি}}{\text{তৃতীয় রাশি}}=\frac{\text{দ্বিতীয় রাশি}}{\text{চতুর্থ রাশি}} \text{ বা } \frac{\text{চতুর্থ রাশি}}{\text{দ্বিতীয় রাশি}}=\frac{\text{তৃতীয় রাশি}}{\text{প্রথম রাশি}}.$$

প্রশ্নমালা 1 B

[1—10 অঙ্কগুলি ক্লাসে কর ও বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. 6, 10 ও 12 এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

$$\because \frac{6}{10}=\frac{12}{\text{চতুর্থ রাশি}} \quad \therefore \text{ চতুর্থ রাশি}\times 6=10\times 12$$

$$\therefore \text{ চতুর্থ রাশি}=\frac{10\times 12}{6}=20.$$

2. 5 ও 45 এর মধ্যে সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

$$\frac{5}{\text{মধ্যরাশি}}=\frac{\text{মধ্যরাশি}}{45} \quad \therefore (\text{ মধ্যরাশি })^2=5\times 45$$

$$\therefore \text{ মধ্যরাশি}=\sqrt{5\times 45}=\sqrt{5^2\times 3^2}=5\times 3=15.$$

3. 1·2 ও 1·8 এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

এস্থলে 1·2 প্রথম রাশি এবং 1·8 দ্বিতীয় রাশি

$$\because \frac{\text{প্রথম রাশি}}{\text{দ্বিতীয় রাশি}}=\frac{\text{দ্বিতীয় রাশি}}{\text{তৃতীয় রাশি}}$$

$$\therefore \frac{1\cdot 2}{1\cdot 8}=\frac{1\cdot 8}{\text{তৃতীয় রাশি}} \quad \therefore \text{ তৃতীয় রাশি}=\frac{1\cdot 8\times 1\cdot 8}{1\cdot 2}=2\cdot 7.$$

4. পাঁচটি ক্রমিক সমানুপাতী সংখ্যার প্রথম সংখ্যাটি 2 এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি 3; পঞ্চম সংখ্যাটি কত ?

$$\because \frac{\text{প্রথম সংখ্যা}}{\text{দ্বিতীয় সংখ্যা}}=\frac{\text{দ্বিতীয় সংখ্যা}}{\text{তৃতীয় সংখ্যা}}=\frac{\text{তৃতীয় সংখ্যা}}{\text{চতুর্থ সংখ্যা}}=\frac{\text{চতুর্থ সংখ্যা}}{\text{পঞ্চম সংখ্যা}}$$

$$\frac{\text{প্রথম সংখ্যা}}{\text{পঞ্চম সংখ্যা}}=\frac{\text{প্রথম সংখ্যা}}{\text{দ্বিতীয় সংখ্যা}}\times\frac{\text{দ্বিতীয় সংখ্যা}}{\text{তৃতীয় সংখ্যা}}\times\frac{\text{তৃতীয় সংখ্যা}}{\text{চতুর্থ সংখ্যা}}\times\frac{\text{চতুর্থ সংখ্যা}}{\text{পঞ্চম সংখ্যা}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$

$\therefore \quad \frac{2}{\text{পঞ্চম সংখ্যা}}=\frac{16}{81} \qquad \therefore$ পঞ্চম সংখ্যা $=\frac{2\times81}{16}=\frac{81}{8}=10\frac{1}{8}$.

5. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

(*i*) 6, 9, 16 : (*ii*) 40, 25, 24 ; (*iii*) ·2, ·02, ·002 ;

(*iv*) ·75, ·05, ·15 (*v*) 15 জন বালক, 25 জন বালক ও 30 টাকা

(*vi*) $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, ও 6 গ্রা.

(*vii*) 6 টা. 75 প:, 22 টা. 50 প: ও 12 কি. গ্রা.

(*viii*) 3 শি. 4 পে., 8 শি. 4 পে. ও 4 হন্দর।

6 নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর :—

(*i*) 2 ও 8 ; (*ii*) 8 ও 32 ; (*iii*) 5 ও 125 ; (*iv*) 49 ও 81 ;

(*v*) $2\frac{1}{2}$ ও $5\frac{5}{8}$; (*vi*) ·3 ও ·012.

7. নিম্নলিখিত রাশিদ্বয়ের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :

(*i*) 5 ও 20 ; (*ii*) 9 ও 12 ; (*iii*) ·4 ও 1·6 ; (*iv*) $2\frac{1}{2}$ ও $1\frac{7}{8}$.

8. 7 টা. ও 5 টা. 25 পয়সার যে অনুপাত, কোন্ রাশির সহিত 2 মি. এর সেই অনুপাত ?

9. একটি সমানুপাতের প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় রাশি যথাক্রমে 4 গজ., 7 গজ ও 9 লিটার ; চতুর্থ রাশিটি কত ?

10. একটি সমানুপাতের দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশিটি যথাক্রমে 15 জন, 20 টাকা ও 25 টাকা। প্রথম রাশিটি কত ?

11. একটি সমানুপাতের প্রথম, দ্বিতীয় ও চতুর্থ রাশি যথাক্রমে 1 শি. 8 পে., 2 শি. 4 পে. ও 3 টন 10 হন্দর। তৃতীয় রাশিটি কত ?

12. 8 এর সহিত 12 এর যে অনুপাত, কোন্ রাশির সহিত 72 এর সেই অনুপাত ?

13. A : B=2 : 3, B : C=4 : 5, C : D=7 : 9 হইলে A : B : C : D=কত এবং A : D=কত ?

14. সাতটি সংখ্যা ক্রমিক সমানুপাতী। প্রথম সংখ্যাটি 1 এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি 3 হইলে, সপ্তম সংখ্যাটি কত ?

15 রাম ও শ্যামের বয়সের অনুপাত 2 : 3 , 8 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত 3 : 5 হইলে, রামের বয়স কত ?

***16.** একটি ভোটকেন্দ্রের ভোটদাতার $\frac{3}{4}$ অংশ অপর একটি ভোটকেন্দ্রের $\frac{1}{2}$ অংশের সমান। দ্বিতীয় কেন্দ্রের ভোটদাতার সংখ্যা 10 জন কম হইলে, উভয় কেন্দ্রে ভোটদাতার অনুপাত 5 : 7 হইত। দ্বিতীয় কেন্দ্রে ভোটদাতার সংখ্যা কত ?

17 পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি 55 বৎসর। 5 বৎসর পরে উহাদের বয়সের অনুপাত 4 : 9 হইলে, 5 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত ছিল ?

18. একটি কাজ 3 জন পুরুষে 4 দিনে বা 4 জন স্ত্রীলোকে 5 দিনে বা 5 জন বালক 6 দিনে করিতে পারে। 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালকের কাজের তুলনা কর।

19. দুইটি বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যার অনুপাত 7 : 9 এবং অন্তর 100 , কোন্ বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যা কত ?

20 দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 6 এবং উহাদের ল. সা. গু. 150 , সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

21 পিতার বর্তমান বয়স পুত্রের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ , 8 বৎসর পরে তাদের বয়সের অনুপাত 7 : 4 হইবে। পুত্রের বর্তমান বয়স কত ? [C U. 1932]

22 দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3}$, যদি প্রত্যেক সংখ্যা হইতে $11\frac{1}{2}$ বিয়োগ করা হয় তখন অন্তরফলগুলির অনুপাত $4\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$ হয়। সংখ্যা দুইটি কত ?

***23.** যে সময়ে A 2টা. উপাজন করে, সেই সময়ে B 3টা. উপাজন করে, যে সময়ে B 4টা. উপার্জন করে, সেই সময়ে C 5টা উপার্জন করে , যে সময়ে C 6টা উপার্জন করে, সেই সময়ে D 7টা উপার্জন করে। A, B, C ও D এর সমান সময়ের উপাজনের ক্রমিক অনুপাত স্থির কর।

C ত্রৈরাশিক (Rule of Three)

1 1. তিনটি রাশির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় দ্বারা প্রশ্ন সমাধানের প্রক্রিয়াকে **ত্রৈরাশিক প্রক্রিয়া** (Rule of Three) বলে।

দ্রষ্টব্য ঃ ঐকিক নিয়মের দ্বারা যে-সকল প্রশ্নের সমাধান করা হয়, ত্রৈরাশিকের দ্বারাও সেই সকল প্রশ্নের সমাধান করিতে পারা যায়।

1·2. ত্রৈরাশিকের নিয়ম ঃ

(a) নির্ণেয় রাশি x ধর এবং উহা চতুর্থ স্থানে রাখ।

(b) নির্ণেয় রাশির সমজাতীয় রাশি তৃতীয় স্থানে রাখ।

(c) প্রশ্নের প্রকৃতি অনুযায়ী যদি নির্ণেয় রাশি তৃতীয় রাশি অপেক্ষা অধিক হয়, তাহা হইলে অবশিষ্ট দুইটি রাশির মধ্যে বৃহত্তরটি দ্বিতীয় স্থানে এবং ক্ষুদ্রতরটি প্রথম স্থানে রাখ।

(d) প্রশ্নের প্রকৃতি অনুযায়ী যদি নির্ণেয় রাশি তৃতীয় রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে অবশিষ্ট দুইটি রাশির মধ্যে বৃহত্তরটি প্রথম স্থানে এবং ক্ষুদ্রতরটি দ্বিতীয় স্থানে বসিবে।

(e) এবং $x = \dfrac{\text{দ্বিতীয় রাশি} \times \text{তৃতীয় রাশি}}{\text{প্রথম রাশি}}$

প্রশ্নমালা 1 C

[1—6 অঙ্কগুলি ক্লাসে কর এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1 8. কি. গ্রা. দ্রব্যের মূল্য 16 টাকা হইলে, 24 কি. গ্রা. দ্রব্যের মূল্য **কত ?**

মনে কর যাউক নির্ণেয় মূল্য $= x$ টাকা

প্রথম স্থান		দ্বিতীয় স্থান		তৃতীয় স্থান		চতুর্থ স্থান
8	:	24	: :	16	:	x

$$x = \frac{16 \times \overset{3}{\cancel{24}}}{\cancel{8}} = 48 \quad \therefore \text{ নির্ণেয় মূল্য} = \mathbf{48 \text{ টাকা}}।$$

লক্ষ্য কর, নির্ণেয় রাশি xকে চতুর্থ স্থানে বসান হইয়াছে। x টাকার সমজাতীয় 16 টাকা তৃতীয় স্থানে বসিয়াছে। 8 কি. গ্রা. এর দাম অপেক্ষা 24 কি. গ্রা. এর দাম অধিক হওয়াতে বৃহত্তর রাশি 24 কি. গ্রা. দ্বিতীয় স্থানে এবং ক্ষুদ্রতর রাশি 8 কি গ্রা. প্রথম স্থানে বসিয়াছে।

2. 10 জন বালক একটি কার্য 15 দিনে করে। ঐ কার্য 25 জন বালক কত দিনে করিবে ?

মনে করি, নির্ণেয় দিন সংখ্যা $= x$.

প্রশ্নানুসারে 25 : 10 : : 15 : x

$$\therefore \quad x = \frac{10 \times 15}{25} = 6. \quad \therefore \text{ নির্ণেয় দিন সংখ্যা} = 6.$$

লক্ষ্য কর, প্রদত্ত প্রশ্নে বালকের সংখ্যা অধিক হওয়ায় নির্ণেয় দিনসংখ্যা প্রদত্ত দিনসংখ্যা অপেক্ষা কম। সেইজন্য বৃহত্তর রাশি 25 জন বালক প্রথম স্থানে এবং ক্ষুদ্রতর রাশি 10 জন দ্বিতীয় স্থানে বসিয়াছে অর্থাৎ বিপর্যস্ত বা ব্যস্ত অনুপাত লওয়া হইয়াছে।

মন্তব্য ঃ প্রথম প্রশ্নটি **সরল ত্রৈরাশিক** (Direct Rule of Three) এবং দ্বিতীয় প্রশ্নটি **ব্যস্ত-ত্রৈরাশিক** (Inverse Rule of Three) এর উদাহরণ।

3. এক ব্যক্তি 1948 সালের 3রা ফেব্রুয়ারী ব্যাঙ্কে চাকুরী লইয়াছিল। ঐ মাসে সে 72 টা. 50 পয়সা বেতন পাইলে, তাহার বেতনের দৈনিক হার কত ছিল ?

4. আয়ের $\frac{4}{5}$ অংশ.84 টাকা হইলে উক্ত আয়ের $\frac{3}{7}$ অংশ কত হইবে ?

5. কোন সম্পত্তির $\frac{3}{4}$ অংশের মূল্য 22 টা. 50 পয়সা , ঐ সম্পত্তির $\frac{2}{3}$ অংশের মূল্য কত ?

6. 15 জন লোক 16 দিনে একটি কাজ করিতে পারে , 40 জন লোক ঐ কাজ কত দিনে করিবে ?

7. যদি 60 জন লোক 30 দিনে একটি কাজ করিতে পারে তবে ঐ সময়ের দুই-তৃতীয়াংশ সময়ে কাজটি শেষ করিতে কত জন লোকের প্রয়োজন ?

8. যদি 12 জন পুরুষ বা 16 জন স্ত্রীলোক 20 দিনে একটি কার্য করে, তবে 15 জন পুরুষ ও 20 জন স্ত্রীলোক ঐ কার্য কতদিনে করিবে ?

9. যদি 5 জন পুরুষ বা 10 জন স্ত্রীলোক বা 15 জন বালক একটি পরিখা 26 দিনে খনন করিতে পারে, তবে 2 জন পুরুষ, 2 জন স্ত্রীলোক ও 4 জন বালক ঐ পরিখা কত দিনে খনন করিবে ?

10. যদি 4 জন পুরুষ এবং 2 জন স্ত্রীলোক একটি কার্য 30 দিনে করিতে পারে, তবে 5 জন পুরুষ ও 13 জন স্ত্রীলোক ঐ কার্য কতদিনে করিতে পারিবে ? (1 জন পুরুষ, 3 জন স্ত্রীলোকের সমান কাজ করে)

11. একটি দুর্গে 1200 লোক আছে এবং তাহাদের 70 দিনের খাদ্য আছে। যদি 25 দিন পরে 300 লোক দুর্গ ছাড়িয়া চলিয়া যায়, তবে অবশিষ্ট খাদ্যদ্রব্যে অবশিষ্ট লোকের কতদিন চলিবে ?

12. 27 জন লোক একটি কার্য 15 দিনে করিতে পারে ; অতিরিক্ত আর কত জন লোক নিযুক্ত করিলে ঐ সময়ের $\frac{1}{3}$ সময়ে কাজটি সম্পন্ন হইবে ? [C. U. 1885]

13. 17 জন লোক একটি কার্য 72 দিনে করিতে পারে। 9 দিন পরে আরও 4 জন লোক তাহাদের সহিত যোগদান করিলে কার্যটি মোট কতদিনে সম্পন্ন হইবে? [C. U. 1890]

14. 5টি ষাঁড অথবা 7টি ঘোড়া একটি মাঠের ঘাস 87 দিনে খায়, 2টি ষাঁড ও 3টি ঘোড়া ঐ পরিমাণ ঘাস কতদিনে খাইবে? [Civil Service]

15. একটি ঘড়িতে 5টা বাজিতে $3\frac{1}{3}$ সেকেণ্ড সময় লাগে, ঐ ঘড়িতে 9টা বাজিতে কত সেকেণ্ড সময় লাগিবে? [Civil Service D. B. 1942]

D. বহুরাশিক (Double Rule of Three)

1·1 একাধিকবার ত্রৈরাশিক প্রক্রিয়া অবলম্বন না করিয়া যে সংক্ষিপ্ত প্রক্রিয়ার সাহায্যে জটিল প্রশ্নসমূহের সমাধান একেবারেই করা যায়, তাহাকে **বহুরাশিক প্রক্রিয়া** (Double Rule of Three) বলে।

1·2. নিয়ম ঃ

(a) প্রশ্নটিকে দুইটি অংশে বিভক্ত করিয়া প্রত্যেক অংশ হইতে একজাতীয় রাশি লইয়া যতগুলি সম্ভব দল গঠন কর।

(b) যে দলে অজ্ঞাত রাশি থাকিবে সেই দলের অজ্ঞাত রাশিকে x ধরিয়া চতুর্থ স্থানে রাখ এবং ঐ দলের অপরটিকে তৃতীয় স্থানে রাখ।

(c) প্রত্যেক দলের দুইটি রাশির মধ্যে কোন্‌টি প্রথম স্থানে বসিবে এবং কোন্‌টি দ্বিতীয় স্থানে বসিবে তাহা পূর্বে বর্ণিত ত্রৈরাশিকের নিয়ম অনুসারে বসাও।

(d) যৌগিক অনুপাতের নিয়ম অনুসারে

প্রথম স্থানের রাশিগুলির গুণফল ঃ দ্বিতীয় স্থানের রাশিগুলির গুণফল ঃ তৃতীয় রাশি ঃ x – এইরূপে লিখ।

$$\text{এবং } x = \frac{\text{দ্বিতীয় রাশিগুলির গুণফল} \times \text{তৃতীয় রাশি}}{\text{প্রথম রাশিগুলির গুণফল}}$$

দ্রষ্টব্য ঃ যখন কোন দলের দুইটি রাশির মধ্যে কোন্‌টি প্রথম স্থানে বসিবে এবং কোন্‌টি দ্বিতীয় স্থানে বসিবে বিবেচনা করিবে, তখন অন্যান্য দলগুলি অপরিবর্তিত আছে এইরূপ কল্পনা করিতে হইবে।

প্রশ্নমালা 1 D

[1—10 অঙ্কগুলি ক্লাসে কর এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. যদি 10 জন লোক 6 হেক্টেয়র জমির শস্য 24 দিনে কাটিতে পারে, তবে 12 জন লোক 9 হেক্টেয়র জমির শস্য কত দিনে কাটিবে ?

প্রশ্নটির দুইটি ভাগ :

(a) 10 জন লোক 6 হেক্টেয়র জমি 24 দিনে কাটে,

(b) 12 জন লোক 9 হেক্টেয়র জমি (?) দিনে কাটে।

লক্ষ্য করিয়া দেখ, এক জাতীয় দুইটি রাশিকে লইয়া দল বাঁধিয়া তিনটি দল হইয়াছে। প্রথম দল 10 জন ও 12 জন লইয়া, দ্বিতীয় দল 6 হেক্টেয়র ও 9 হেক্টেয়র লইয়া এবং তৃতীয় দলটি দিন লইয়া গঠিত এবং তৃতীয় দলের দুইটি রাশির মধ্যে একটি অজ্ঞাত। এই প্রশ্নে সেই অজ্ঞাত দিনসংখ্যাটি নির্ণয় করিতে হইবে। অতএব,

(1)	(2)	(3)
10 জন	6 হেক্টেয়র	24 দিন
12 „	9 „	(?) „

যদি হেক্টেয়র জাতীয় রাশিদ্বয়কে স্থির রাশি ধরা হয় অর্থাৎ হেক্টেয়র জাতীয় কোন রাশি নাই মনে করা হয়, তাহা হইলে দিনের সহিত লোকের ব্যস্ত অনুপাত হয়। অর্থাৎ

12 জন : 10 জন : : 24 দিন : নির্ণেয় দিন সংখ্যা।

আবার যদি লোকজাতীয় রাশিদ্বয়কে স্থির রাশি ধরা হয় অর্থাৎ লোক জাতীয় রাশি নাই মনে করা হয়, তাহা হইলে হেক্টেয়রের সহিত দিনের সরল অনুপাত লইতে পারি। সুতরাং

6 হেক্টেয়র : 9 হেক্টেয়র : : 24 দিন : নির্ণেয় দিনসংখ্যা।

দুইটি সমানুপাত একত্রিত করিলে আমরা পাই,

$$\left.\begin{array}{l}12 \text{ জন} : 10 \text{ জন} \\ 6 \text{ হেক্টেয়র} : 9 \text{ হেক্টেয়র}\end{array}\right\} : : 24 \text{ দিন} : \text{নির্ণেয় দিন}$$

যৌগিক অনুপাতের নিয়মানুসারে, $12 \times 6 : 10 \times 9 : : 24$ দিন : নির্ণেয় দিন

$$\text{নির্ণেয় দিন সংখ্যা} = \frac{10 \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{2}{\cancel{24}}}{\cancel{12} \times \cancel{6}} = 30 \text{ দিন।}$$

2. যদি 10 জন লোক দৈনিক 12 ঘণ্টা হিসাবে কাজ করিয়া 20 দিনে একটি কাজ করে, তাহা হইলে 30 জন লোক দৈনিক 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া কত দিনে ঐ কাজের চারিগুণ কাজ করিবে ?

10 জন	12 ঘণ্টা	1 গুণ কাজ	20 দিন
30 জন	8 ঘণ্টা	4 গুণ কাজ	নির্ণেয় দিন

$$\left.\begin{array}{r}30 : 10\\ 8 : 12\\ 1 : \ \ 4\end{array}\right\} :: 20 \text{ দিন} : \text{নির্ণেয় দিন।}$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় দিনসংখ্যা} = \frac{\overset{}{\cancel{10}} \times \overset{2}{\cancel{12}} \times \overset{4}{\cancel{4}} \times 20}{\underset{3}{\cancel{30}} \times \underset{2}{\cancel{8}} \times 1} = 40.$$

3. একজন কন্‌ট্রাক্‌টর 6 মাইল দীর্ঘ একটি রেলপথ 200 দিনে করিবার চুক্তি করিল। 140 জন লোক 60 দিন খাটাইবার পর সে দেখিল যে কেবলমাত্র $1\frac{1}{2}$ মাইল পথ প্রস্তুত হইয়াছে। আর কতজন লোক নিযুক্ত করিলে নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে পথটি প্রস্তুত হইবে? [C. U. 1910]

4. যদি 15 জন লোক কোন কাজ 12 দিনে করিতে পারে, তবে কতজন লোক ঐ কাজের $3\frac{1}{5}$ গুণ কাজ 8 দিনে করিতে পারিবে ?

5. যদি প্রতি 5 মিনিটে 6 বার তোপ দাগিয়া 1 ঘণ্টায় 16টি কামান 2500 সৈন্য মারিতে পারে, তবে প্রতি 4 মিনিটে 3 বার তোপ দাগিয়া 1 ঘণ্টা 20 মিনিটে কতগুলি কামান 3125 জন সৈন্য মারিবে ?

6. যদি 12 জন লোক প্রতিদিন 9 ঘণ্টা খাটিয়া 30 দিনে একটি কাজ করিতে পারে, তবে কতজন লোক প্রতিদিন 5 ঘণ্টা খাটিয়া উহার 10 গুণ একটি কাজ 24 দিনে করিবে ? [C. U. 1948]

7. যদি 40টি কামান প্রতি 5 মিনিটে 6 বার গোলা ছুঁড়িয়া 15 মিনিটে 450 জন লোক মারিতে পারে, তবে 12টি কামান প্রতি 3 মিনিটে 4 বার গোলা ছুঁড়িয়া 1 ঘণ্টায় কত লোক মারিবে ?

8. প্রতি 5 মিনিটে 3 বার তোপ দাগিয়া 5টি কামান 1 ঘণ্টা 30 মিনিটে 270 জন লোক মারিলে প্রতি 12 মিনিটে 10 বার কামান দাগিয়া কয়টি কামান 1 ঘণ্টায় 500 লোক মারিবে ?

9. যখন চাউল টাকায় 10 কি. গ্রা. তখন যে ব্যয়ে 9 জন লোকের 30 দিন

চলিতে পারে, যখন টাকায় 14 কি. গ্রা. চাউল পাওয়া যায় তখন ঐ ব্যয়ে 6 জন লোকের কত দিন চলিবে ?

10. যদি দৈনিক 16 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া 50 জন লোক একটি কাজ 12 দিনে করিতে পারে, তবে দৈনিক 14 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া ঐ কাজের দ্বিগুণ একটি কাজ 30 জন লোক কতদিনে করিবে ?

11. দৈনিক 8 ঘণ্টা খাটিয়া 50 জন লোক একটি কাজ 12 দিনে শেষ করিতে পারে, উহার দ্বিগুণ কাজ 16 দিনে করিতে 60 জন লোকের কত ঘণ্টা খাটিতে হইবে ? [D B. 1930]

12. এক বুশেল গমের দাম 15 শিলিং হইলে যদি 1 পাউণ্ড ওজনের রুটির দাম $7\frac{1}{2}$ পেনি হয়, তবে এক বুশেল গমের দাম কত হইলে 6 আউন্স রুটির দাম 2 পেনি হইবে ?

13 প্রতি রাত্রে 6 ঘণ্টা করিয়া জ্বালাইলে যদি 6টা আলোর জন্য 16 দিনে 9 টাকা খরচ হয়, তবে কয়টা আলো প্রতি রাত্রে 5 ঘণ্টা করিয়া জ্বালাইলে 20 দিনে 12 টাকা 50 পয়সা খরচ হইবে ?

14 30 গজ দীর্ঘ, 24 গজ বিস্তৃত এবং 5 গজ গভীর একটি পুকুর কাটিতে যদি 450 টাকা লাগে, তবে 36 গজ দীর্ঘ, 18 গজ বিস্তৃত ও 4 গজ গভীর একটি পুকুর কাটিতে কত টাকা লাগিবে ?

15 যদি 72 জন লোক প্রত্যহ 12 ঘণ্টা খাটিয়া 9 দিনে 324 গজ দীর্ঘ, 12 গজ প্রশস্ত ও 8 ফুট গভীর একটি পরিখা খনন করিতে পারে, তবে দৈনিক 9 ঘণ্টা খাটিয়া 36 দিনে কতজন লোক 1458 গজ দীর্ঘ, 40 গজ প্রশস্ত ও 3 গজ গভীর একটি পরিখা খনন করিবে ? [D. B. 1925]

16 যদি 5 জন কুলি প্রত্যহ 12 ঘণ্টা খাটিয়া 6 দিনে 105 গজ দীর্ঘ, 4 গজ প্রশস্ত ও 2 গজ গভীর একটি বাঁধ তৈয়ারী করিতে পারে, তবে 264 জন কুলি প্রত্যহ কত ঘণ্টা খাটিয়া 5 দিনে 126 গজ দীর্ঘ, 20 গজ প্রশস্ত ও $3\frac{1}{2}$ গজ গভীর একটি বাঁধ তৈয়ারী করিবে ?

17. প্রতি জনের দৈনিক খাদ্য 13 আউন্স হইলে কোন দুর্গে 4500 লোকের খাদ্য 15 সপ্তাহ চলে। প্রতি জনের দৈনিক খাদ্য 10 আউন্স হইলে ঐ খাদ্যে 27 সপ্তাহ চালাইতে হইলে কত জন লোককে দুর্গ ত্যাগ করিতে হইবে ?

[Civil Service]

18 একজন ঠিকাদার 350 দিনে 12 মাইল দীর্ঘ একটি খাল কাটাইয়া দিবার চুক্তি করিয়া ঐ কাজের জন্য 45 জন লোক নিযুক্ত করিল , 200 দিন পরে সে দেখিল যে $4\frac{1}{2}$ মাইল মাত্র কাটা হইয়াছে। আর কতজন লোক নিযুক্ত করিলে চুক্তিমত নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে ঐ কাজটি শেষ হইবে ? [W. B. S F. 1966]

E. সমানুপাতিক ভাগ

(Division into Proportional Parts)

1·1 যদি একটি রাশি এইরূপ কয়েকটি অংশে বিভক্ত হয় যে অংশগুলি কয়েকটি নির্দিষ্ট সংখ্যার সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে ঐরূপ বিভাগকে **সমানুপাতিক ভাগহার** বলে। এইরূপ স্থলে অংশগুলির ধারাবাহিক অনুপাত যাহা হইবে সংখ্যাগুলির ধারাবাহিক অনুপাতও তাহা হইবে।

1·2 অংশগুলি বাহির করিবার নিয়ম ঃ

বিভক্ত অংশগুলি যে সকল সংখ্যার সমানুপাতী, সেই সংখ্যাগুলি যোগ করিয়া যত হয় তাহা দ্বারা যে রাশি বিভক্ত করিতে হইবে তাহাকে প্রথমে ভাগ কর। প্রাপ্ত ভাগফলকে সংখ্যাগুলি দিয়া গুণ করিলেই অংশগুলি কত জানিতে পারিবে।

প্রশ্নমালা 1 E

[1—12 বাদে কর এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1 12 টাকা A B, C এর মধ্যে 1 : 2 : 3 অনুপাতে বিভক্ত কর।

(1+2+3) বা 6 ভাগের মধ্যে A 1 ভাগ, B 2 ভাগ, C 3 ভাগ পাইবে।

$$\therefore \text{A এর অংশ} = \frac{12 \text{ টা.}}{6} \times 1 = 2 \text{ টাকা}$$

$$\text{B এর অংশ} = \frac{12 \text{ টা.}}{6} \times 2 = 4 \text{ টাকা}$$

$$\text{C এর অংশ} = \frac{12 \text{ টা.}}{6} \times 3 = 6 \text{ টাকা।}$$

2. 15 টাকা A ও B এর মধ্যে $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ অনুপাতে বিভক্ত কর।

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$ (6 দ্বারা গুণ করিয়া)

এক্ষণে, (3+2) বা 5 ভাগের মধ্যে A 3 ভাগ এবং B 2 ভাগ পাইবে।

$$\therefore \text{A এর অংশ} = \frac{15 \text{ টা.}}{5} \times 3 \text{ বা } 9 \text{ টাকা}$$

$$\text{B এর অংশ} = \frac{15 \text{ টা}}{5} \times 2 \text{ বা } 6 \text{ টাকা।}$$

3. 100 টাকা A, B, C এর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন B এর অংশ A এর অংশের $1\frac{1}{2}$ গুণ এবং C এর অংশ A ও B এর অংশদ্বয়ের সমষ্টির $\frac{2}{3}$ অংশ হয়।

দেওয়া আছে, $B = 1\frac{1}{2}A$ এবং $C = \frac{2}{3}(A+B)$

এখন $C = \frac{2}{3}A + \frac{2}{3}B = \frac{2}{3}A + \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}A = \frac{2}{3}A + A = \frac{5}{3}A.$

$\therefore\ A : B : C = A : \frac{3}{2}A : \frac{5}{3}A = 1 : \frac{3}{2} : \frac{5}{3}$ (A দ্বারা ভাগ করিয়া)

$= 6 : 9 : 10$ (হরগুলির ল. সা. গু. 6 দ্বারা গুণ করিয়া)

(6+9+10) বা 25 ভাগের মধ্যে A 6 ভাগ, B 9 ভাগ এবং C 10 ভাগ পাইবে।

$\therefore$ A এর অংশ $= \frac{100 \text{ টা}}{25} \times 6$ বা **24 টাকা**

B এর অংশ $= \frac{100 \text{ টা}}{25} \times 9$ বা **36 টাকা**

C এর অংশ $= \frac{100 \text{ টা}}{25} \times 10$ বা **40 টাকা**।

দ্রষ্টব্য : B ও C এর অংশ A-এর অংশের কতগুণ তাহা প্রথমে বাহির করা হইয়াছে।

4. (a) টাকা, পঞ্চাশ পয়সা ও পঁচিশ পয়সা মুদ্রার মোট সংখ্যা 70, টাকার মূল্য, পঞ্চাশ পয়সার মূল্য ও পঁচিশ পয়সার মূল্যের অনুপাত 2 : 3 : 5 হইলে, টাকার সংখ্যা কত ?

$\because$ টাকার মূল্য : পঞ্চাশ পয়সার মূল্য : পঁচিশ পয়সার মূল্য

= 2 টা : 3 টা. : 5 টাকা।

$\therefore$ টাকার সংখ্যা : পঞ্চাশ পয়সার সংখ্যা : পঁচিশ পয়সার সংখ্যা

$= 2 : 6 : 20 = 1 : 3 : 10$

(1+3+10) বা 14 ভাগের মধ্যে টাকার সংখ্যা 1 ভাগ।

$\therefore$ টাকার সংখ্যা $= \frac{70 \times 1}{14}$ বা 5.

4 (b) কয়েকটি আম A B, C এই তিন জনকে 5, 6 ও 9 এর অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল ; A 90টি আম পাইল। সবশুদ্ধ কয়টি আম ভাগ করা হইল ?

$\because$ সমস্ত আম (5+6+9) বা 20 ভাগ করিলে A পাইত 5 ভাগ

$\therefore$ সমস্ত আম A এর ভাগের $(20 \div 5) = 4$ গুণ। A 90টি আম পাইয়াছে

$\therefore$ আমের সংখ্যা $= 90 \times 4 =$ **360.**

5. 730 পাউণ্ড A, B, C ও Dকে এরূপভাবে ভাগ করিয়া দাও যে, A এর অংশ : B এর অংশ = 2 : 3, B এর অংশ : C এর অংশ = 4 : 5 এবং C এর অংশ : D এর অংশ = 7 : 8 হইবে।

$A : B = 2 : 3$; $B : C = 4 : 5 = 1 : \frac{5}{4} = 3 : \frac{15}{4}$

$C : D = 7 : 8 = 1 : \frac{8}{7} = \frac{15}{4} : \frac{30}{7}$.

$\therefore$ $A : B : C : D = 2 : 3 : \frac{15}{4} : \frac{30}{7} = 56 : 84 : 105 : 120$

(56+84+105+120) বা 365 ভাগের মধ্যে A 56 ভাগ, B 84 ভাগ, C 105 ভাগ এবং D 120 ভাগ পাইবে,

$$\therefore \text{ A এর অংশ } = \frac{730 \text{ পা}}{365} \times 56 = \mathbf{112} \text{ পা.}$$

$$\text{B এর অংশ } = \frac{730 \text{ পা.}}{365} \times 84 = \mathbf{168} \text{ পা.}$$

$$\text{C এর অংশ } = \frac{730 \text{ পা.}}{365} \times 105 = \mathbf{210} \text{ পা.}$$

$$\text{D এর অংশ } = \frac{730 \text{ পা}}{365} \times 120 = \mathbf{240} \text{ পা.}$$

6. 27কে 4 : 5 এরূপে ভাগ কর।

7. 30 টাকাকে 1 : 2 : 3 এইরূপ 3 ভাগে ভাগ কর।

8. 60কে 2 : 3 : 4 : 5 : 6 এইরূপ 5 ভাগে ভাগ কর।

9. 24কে $2\frac{1}{4} : 3\frac{3}{4}$ অনুপাতে বিভক্ত কর।

10. 302 টাকাকে $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{3} : 2\frac{1}{3}$ এইরূপ অংশে ভাগ কর।

11. 216 টাকা এমন করিয়া তিন অংশে ভাগ কর যে, প্রথম ভাগের অর্ধেক দ্বিতীয় ভাগের এক তৃতীয়াংশ ও তৃতীয় ভাগের এক চতুর্থাংশ সমান হয়।

12. কোন অর্থ A, B ও C এর মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যাহাতে উহাদের অংশগুলির অনুপাত যথাক্রমে 4, 5, 7 হয়। B 80 টাকা পাইলে ঐ অর্থের পরিমাণ কত ?

13. 112 টা 50 পয়সা A B, C এর মধ্যে এইরূপে ভাগ করা হইল যে A 1 টাকা পাইলে B 75 পয়সা এবং C 50 পয়সা পায়। কে কত পাইল ?

14. 52 পা. A, B C এর মধ্যে এইরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন A B এর অর্ধেক এবং B, A ও C এর সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ পায়।

15. 116 টাকা A, B, C এর মধ্যে এইরূপে ভাগ কর যেন, A এর অংশ : B এর অংশ = 4 : 5 এবং B এর অংশ ; C এর অংশ = 10 : 11 হয়।

16. ক্রিকেট খেলায় A ও B'র রাণের এবং B ও C'র রাণের অনুপাত উভয় ক্ষেত্রেই 3 : 2 ; A, B, C মোট 342 রাণ করিয়া থাকিলে, প্রত্যেকে কত রাণ করিয়াছিল ?

17. A, B ও C এর মধ্যে কিছু টাকা 2 : 5 : 7 এর অনুপাতে ভাগ করিয়া দেখা গেল যে, A অপেক্ষা C 60 টাকা বেশী পাইয়াছে। মোট কত টাকা ছিল এবং প্রত্যেকে কত টাকা পাইল ?

18. একজন পুরুষ, একজন স্ত্রীলোক ও একজন বালক একত্রে কাজ করিয়া 92 পা. 2 শি. পাইল ; পুরুষ 9 দিন, স্ত্রীলোক 10 দিন এবং বালক 12 দিন কাজ করিলে এবং প্রতিদিনে তাহাদের কাজের অনুপাত $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$ হইলে, প্রত্যেকে কত পাইবে ?

19. টাকা, পঞ্চাশ পয়সা ও পঁচিশ পয়সা এই তিনপ্রকার মুদ্রার মোট সংখ্যা 210 ; যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত 1 : 2 : 4 হয়, টাকার সংখ্যা কত ?

20. তিনজন বালকের মধ্যে প্রথম বালকের 4 খানি এবং দ্বিতীয় বালকের 3 খানি রুটি ছিল ; তৃতীয় বালকের কিছু ছিল না। তাহারা তিনজনে সমস্ত রুটি সমান ভাগ করিয়া খাইল। তৃতীয় বালক যদি তাহার অংশের রুটির মূল্য 56 পয়সা দেয়, তবে অন্য বালক দুইটি উহা কিরূপে ভাগ করিয়া লইবে ?

21. তাম্র, দস্তা সীসক ও রাঙ মিশ্রিত করিয়া পিত্তল প্রস্তুত হইল। ঐ পিত্তলে তাম্র : দস্তা = 1 : 2 , সীসক : দস্তা = 3 : 5 এবং সীসক : রাঙ = 7 : 8 হইলে 71 হন্দর পিত্তলে কত দস্তা আছে ?

*22. 330 পাউণ্ড A, B, C ও D এর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন A, B এর দ্বিগুণ , B, C এর দ্বিগুণ এবং A ও C একত্রে যাহা পায় B ও D একত্রে যেন তাহা পায়।

23. তিনজন লোককে একটি সম্পত্তি 7 : 8 : 10 অনুপাতে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। যে সর্বাপেক্ষা অধিক পাইল, তাহার অংশে 2500 টাকা যোগ করিলে সমস্ত সম্পত্তির অর্ধেকের সমান হয়। ঐ সম্পত্তির মূল্য কত ?

24. বৃত্তসমূহের ক্ষেত্রফল তাহাদের ব্যাসার্ধসমূহের বর্গের সমানুপাতী। 1 মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তকে এক কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় দ্বারা সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

*25. দুই ব্যক্তি 8 হন্দর মাল লইয়া একস্থান হইতে অন্য স্থানে যাইতেছিল। মালের দরুণ একজনকে 8 টাকা এবং অন্যজনকে 4 টাকা অতিরিক্ত ভাড়া দিতে হইল। যদি সমস্ত মাল একজনের হইত তাহা হইলে তাহাকে মালের দরুণ অতিরিক্ত 14 টাকা দিতে হইত। কাহার কত মাল ছিল এবং কত মাল বিনা ভাড়ায় বহনযোগ্য ? [B C. S.]

*26. দৈনিক সমহারে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত কোন মাঠের ঘাস 30টি গরু 160 দিনে খাইতে পারে। আবার 36টি গরু 120 দিন খাইয়া শেষ করিতে পারে। কতগুলি গরু ইহা 72 দিনে খাইয়া শেষ করিতে পারিবে ?

*27. এক ব্যক্তি 4টা ও 5টার মধ্যে গৃহ হইতে বাহির হইয়া 7টা ও 8টার মধ্যে ফিরিয়া আসিয়া দেখিলেন যে তাহার ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। কখন তিনি বাহিরে গিয়াছিলেন ?

*28. একজন ফটোগ্রাফার 3 কপি ফটোর দাম 12 টাকা এবং 12 কপি ফটোর দাম 30 টাকা আদায় করে এবং ইহাতে তাহার লাভ যথাক্রমে 4 টাকা এবং 9 টাকা হয়। 39 কপি ফটো কত দামে বিক্রয় করিলে তাহার লাভ 18 টাকা হইবে ?

29. কোন স্কুলে তিনটি শ্রেণীর মোট ছাত্র সংখ্যা 333 ; প্রথম ও দ্বিতীয় শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার অনুপাত 3 : 5 এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যার অনুপাত 7 : 11 ; প্রত্যেক শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর। [W. B. S F. '65]

30. তিন প্রকার পদার্থের আয়তনের অনুপাত 3 : 4 : 7 এবং সম আয়তনের ঐ পদার্থত্রয়ের ওজনের অনুপাত 5 : 2 : 6. ঐ পদার্থ তিনটি মিশ্রিত করিলে 52 কি. গ্রা মিশ্রিত পদার্থে তৃতীয় পদার্থের ওজন কত হইবে ?

31. দুইটি লোক 28 টাকা মজুরীতে একটি কাজ করিয়া দিবার চুক্তি করিল। একজন 9 ঘণ্টা করিয়া 3 দিন এবং অপর জন 8 ঘণ্টা করিয়া 3 দিন কাজ করিল। একজন 3 ঘণ্টায় যে কাজ করে অপর জন 2 ঘণ্টায় সেই কাজ করে। লোক দুইটির কে কত পাইবে ? [C. U. 1934]

একজন $3 \times 9 = 27$ ঘণ্টা এবং অপর জন $3 \times 8 = 24$ ঘণ্টা কাজ করে।

একজনের 27 ঘণ্টা অপর জনের $27 \times \frac{2}{3} = 18$ ঘণ্টার সমান।

সুতরাং 28 টাকা 18 : 24 বা 3 : 4 এই অনুপাতে বিভক্ত হইবে।

∴ একজন পায় $28 \times \frac{3}{7} = 12$ টাকা

অপর জন পায় $= 28 \times \frac{4}{7} = 16$ টাকা।

1 F

সম্ভুয়-সমুত্থান

Fellowship or Partnership

1·1. যদি দুই বা ততোধিক ব্যক্তি কোন ব্যবসায়ে অংশীদার হিসাবে কাজ আরম্ভ করে, তাহা হইলে ঐ সকল ব্যক্তি প্রত্যেকে ঐ ব্যবসায় চালাইবার জন্য মূলধন নিয়োজিত করে। যে প্রক্রিয়ার সাহায্যে কোন ব্যবসায়ের অংশীদারদের মধ্যে তাহাদের স্ব স্ব মূলধন অনুসারে নির্দিষ্ট সময় অন্তে লাভ বা ক্ষতির টাকা বিভক্ত করা হয়, তাহাকে **সম্ভুয়-সমুত্থান** বলে।

1·2. সম্ভুয় সমুত্থান দুই প্রকার :—(1) **সরল** ও (2) **মিশ্র**। যখন বিভিন্ন অংশীদারের মূলধন **সমকাল** ব্যাপিয়া থাটে তখন লাভ বা ক্ষতির টাকা বিভাগ করার প্রক্রিয়াকে **সরল-সম্ভুয়-সমুত্থান** বলে।

আবার বিভিন্ন অংশীদারের মূলধন যদি **ভিন্নকাল** ব্যাপিয়া থাটে তাহা হইলে মূলধন ও সময় অনুসারে লাভ বা ক্ষতির টাকা বণ্টনের প্রক্রিয়াকে **মিশ্র সম্ভুয়-সমুত্থান** বলে।

প্রশ্নমালা 1 F

[1 12 অঙ্কগুলি ক্লাসে কর এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. A, B ও C যথাক্রমে 200 টাকা, 300 টাকা ও 500 টাকা মূলধন লইয়া ব্যবসায় আরম্ভ করিয়া 100 টাকা লাভ করিল। লভ্যাংশ কিরূপে বণ্টন করা হইবে?

A এর মূলধন : B এর মূলধন : C এর মূলধন

= 200 টা. : 300 টা. : 500 টা = 2 : 3 : 5

$\because$ লভ্যাংশের অনুপাত মূলধনের অনুপাতের সমান

$\therefore$ A এর লভ্যাংশ : B এর লভ্যাংশ : C এর লভ্যাংশ = 2 : 3 : 5 ; (2+3+5) বা 10 ভাগের মধ্যে A এর লভ্যাংশ 2 ভাগ, B এর লভ্যাংশ 3 ভাগ ও C এর লভ্যাংশ 5 ভাগ হইবে।

$\therefore$ A এর লভ্যাংশ $= \frac{100 \text{ টা.}}{10} \times 2$ বা 20 টাকা

B এর লভ্যাংশ $= \frac{100 \text{ টা.}}{10} \times 3$ বা 30 টাকা

C এর লভ্যাংশ $= \frac{100 \text{ টা.}}{10} \times 5$ বা 50 টাকা।

2. কোন ব্যবসায়ে A এর 200 টাকা মূলধন 2 মাস, B-এর 300 টাকা মূলধন 3 মাস ও C এর 400 টাকা মূলধন 5 মাস খাটিল, 5 মাস পরে 330 টাকা লাভ তিনজনের মধ্যে কিরূপে বণ্টন করা হইবে?

200 টাকার 2 মাসের লাভ $=(200\times2)$ বা 400 টাকার 1 মাসের লাভ

300 টাকার 3 মাসের লাভ $=(300\times3)$ বা 900 টাকার 1 মাসের লাভ

400 টাকার 5 মাসের লাভ $=(400\times5)$ বা 2000 টাকার 1 মাসের লাভ

$\therefore$ A এর মূলধন : B এর মূলধন : C এর মূলধন

= 400 টাকা : 900 টাকা : 2000 টাকা $=4:9:20$

এবং $\because$ লভ্যাংশের অনুপাত মূলধনের অনুপাতের সমান

$\therefore$ A এর লভ্যাংশ : B-এর লভ্যাংশ : C এর লভ্যাংশ $=4:9:20$

$(4+9+20)$ বা 33 ভাগের মধ্যে A এর লভ্যাংশ 4 ভাগ, B এর লভ্যাংশ 9 ভাগ এবং C এর লভ্যাংশ 20 ভাগ হইবে।

$$\therefore \text{ A এর লভ্যাংশ } = \frac{330 \text{ টা.}}{33} \times 4 \text{ বা } \mathbf{40} \text{ টা.}$$

$$\text{B এর লভ্যাংশ } = \frac{330 \text{ টা.}}{33} \times 9 \text{ বা } \mathbf{90} \text{ টা.}$$

$$\text{C এর লভ্যাংশ } = \frac{330 \text{ টা.}}{33} \times 20 \text{ বা } \mathbf{200} \text{ টা.}$$

3. A, B ও C 500 টা. 600 টা. ও 700টা. লইয়া একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিয়া বৎসরান্তে 180 টাকা লাভ করিল। লভ্যাংশ কিরূপে বণ্টন করা হইবে?

4. A, B ও C তিনজনে একত্রে 2200 টাকা মূলধন লইয়া ব্যবসায় আরম্ভ করিল। A এর মূলধন B এর মূলধনের দ্বিগুণ এবং C এর মূলধনের তিনগুণ। বৎসরান্তে 110 টাকা লাভ হইলে তিনজনের মধ্যে উহা কিরূপে বিভক্ত হইবে?

5. কোন ব্যবসায়ে A, B ও C একত্রে 2950 পাউণ্ড মূলধন নিয়োজিত করিল। A এর মূলধন, B-এর মূলধন অপেক্ষা 100 পাউণ্ড অধিক এবং B-এর মূলধন C-এর মূলধন অপেক্ষা 150 পা. অধিক। বৎসরান্তে 236 পাউণ্ড লাভ তিন জনের মধ্যে কিরূপে বণ্টন করা হইবে?

6. কোন দেউলিয়ার নিকট A, B ও C এর পাওনা টাকার পরিমাণ যথাক্রমে 1000 টাকা, 1500 টাকা ও 2000 টাকা; যদি ঐ দেউলিয়ার সম্পত্তির মূল্য মোট 3600 টাকা হয়, তাহা হইলে কোন্ পাওনাদারের ক্ষতি সর্বাপেক্ষা বেশী হইল?

7. A, B, C, D, একত্রে 50000 টাকা লইয়া ব্যবসায় আরম্ভ করিয়া বৎসরান্তে যথাক্রমে 100 টাকা, 200 টাকা, 300 টাকা ও 400 টাকা লভ্যাংশ হিসাবে পাইল। A কত টাকা মূলধন দিয়াছিল ?

8. কোন ব্যবসায়ে A 400 টাকা 6 মাসের জন্য, B 500 টাকা 7 মাসের জন্য এবং C 600 টাকা 5 মাসের জন্য নিয়োজিত করিল। বৎসরান্তে 2670 টাকা লভ্যাংশ A, B ও C এর মধ্যে কিরূপে বিভক্ত হইবে ?

9. কোন ব্যবসায়ে A ও B যথাক্রমে $\frac{3}{4}$ ও $\frac{1}{4}$ অংশের মালিক। C-এর কোন মূলধন নাই কিন্তু কর্মচারী হিসাবে সে লভ্যাংশের 5% পাইবে। 500 টাকা মোট লাভ হইলে A ও B এর লাভ কত হইবে বাহির কর।

10. A, B এবং C তিনজনে যথাক্রমে 500 টাকা, 200 টাকা এবং 300 মূলধন লইয়া একত্রে ব্যবসায় আরম্ভ করিল। যদি ব্যবসায়ে 750 টাকা লাভ হয় তবে ঐ লাভের টাকা কে কত পাইবে ? [W. B S. F 1954]

11. A, B, C যথাক্রমে 12000 টাকা, 16000 টাকা এবং 20000 টাকা মূলধন লইয়া একত্রে ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ঐ ব্যবসায়ে মোট 7200 টাকা লাভ হইলে লাভের টাকা কে কত পাইবে ? [D. B 1952]

12. তিন ব্যক্তি যথাক্রমে 713 পা. 3 শি, 964 পা 17 শি. এবং 2391 পা. 3 শি. মূলধন লইয়া একত্রে ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ঐ ব্যবসায়ে বৎসরান্তে 2231 পাউণ্ড লাভ হইলে প্রত্যেকের লাভের পরিমাণ নির্ণয় কর। [P U 1895]

13. 1লা জানুয়ারী তারিখে 800 পাউণ্ড মূলধন লইয়া A কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 3 মাস পরে B কে অংশীদাররূপে লইল। B এর মূলধন কত হইলে উভয়ে বৎসরান্তে সমান লভ্যাংশ পাইবে ? [Civil Service]

14. বৎসরের প্রথমেই A 3000 টাকা মূলধন লইয়া একটি ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 1লা মার্চ তারিখে সে Bকে অংশীদাররূপে লইল এবং B 4000 টাকা মূলধন দিল। 1লা জুন তারিখে পুনরায় সে Cকে অংশীদাররূপে লইল এবং C 5000 টাকা মূলধন ঐ ব্যবসায়ে নিয়োজিত করিল। বৎসরান্তে 1480 টাকা লাভ হইলে লাভের অংশ কে কত পাইবে ? [M. U. 1884]

15. A, B এবং C তিনজনে একত্রে 75000 টাকা মূলধন লইয়া ব্যবসায় আরম্ভ করিল। ঐ মূলধনে A 36000 টাকা দিল, B 30000 টাকা দিল এবং অবশিষ্ট টাকা C দিল ; বৎসরান্তে 16791 টাকা লাভ হইলে এবং C কে

ম্যানেজার হিসাবে মাসিক 800 টাকা করিয়া বেতন দিতে হইলে লাভের টাকা কে কত পাইবে ? [B. U. 1864]

*16. A, B এবং C তিনজনে একটি ব্যবসায়ে অংশীদার এবং তাহাদের মূলধনের অনুপাত যথাক্রমে $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ । 4 মাস পরে A তাহার মূলধন অর্ধেক তুলিয়া লয় এবং আরও 8 মাস পর ব্যবসায়ে মোট লাভ 2024 টাকা তাহাদের তিনজনের মধ্যে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। A কত পাইল ? [P. U. 1910]

17. A ও B 54 পাউণ্ডে একটি পশুচারণ মাঠ ভাড়া লইল। ঐ মাঠে A 23টি ঘোড়া 27 দিনের জন্য এবং B 21টি ঘোড়া 39 দিনের জন্য চরাইল। কাহাকে কত ভাড়া দিতে হইবে ? [Civil Service]

18. A 300 পাউণ্ড এবং B 500 পাউণ্ড মূলধন দিয়া একত্রে ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 6 মাস পরে A আরও 400 পাউণ্ড দিল, কিন্তু B 100 পাউণ্ড তুলিয়া লইল। এক বৎসর ব্যবসায় করিয়া যদি 61 পা. 15 শি. লাভ হইয়া থাকে, তবে কে কত লভ্যাংশ পাইবে ? [M. U. 1934].

A এর মূলধন 300 পাউণ্ড 6 মাস এবং (300+400) বা 700 পাউণ্ড মূলধন (12−6) বা 6 মাস খাটিল।

∴ A এর মূলধন 1 মাসে $(300\times6+700\times6)$ বা $(1800+4200)$ বা **6000 পাউণ্ড** খাটিল।

আবার B এর মূলধন 500 পাউণ্ড 6 মাস এবং (500−100) বা 400 পাউণ্ড 6 মাস খাটিল।

∴ B এর মূলধন 1 মাসে $(500\times6+400\times6)$ বা $(3000+2400)$ বা **5400 পাউণ্ড** খাটিল।

∴ 61 পা. 15 শি. বা $61\frac{3}{4}$ পা. লাভ A ও B এর মধ্যে 6000 পা. : 5400 পা. বা 10 : 9 অনুপাতে বিভক্ত হইবে।

$$A \text{ এর লভ্যাংশ} = \frac{\overset{13}{\cancel{247}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{19}}\times\overset{5}{\cancel{10}} \text{ পা.} = \frac{65}{2} \text{ পা.} = 32\tfrac{1}{2} \text{ পা.} = 32 \text{ পা. } 10 \text{ শি.}$$

$$B \text{ এর লভ্যাংশ} = \frac{\overset{13}{\cancel{247}}\times9}{4\times\cancel{19}} \text{ পা.} = \frac{117}{4} \text{ পা.} = 29\tfrac{1}{4} \text{ পা.} = 29 \text{ পা. } 5 \text{ শি.}$$

19. এক যৌথ ব্যবসায়ে B এর মূলধন A এর মূলধনের দেড়গুণ ছিল। 8 মাস পরে B তাহার মূলধনের অর্ধাংশ এবং আরও 2 মাস পরে A তাহার মূলধনের এক চতুর্থাংশ তুলিয়া লইল। বৎসরান্তে 530 পাউণ্ড লাভ লইলে কে কত লভ্যাংশ পাইবে? [Civil Service]

20. A ও B এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। A 500 টাকা 9 মাসের জন্য এবং B তাহার মূলধন 6 মাসের জন্য ঐ ব্যবসায়ে নিয়োজিত করিল। উহাতে মোট 69 টাকা লাভ হইল এবং B 46 টাকা লাভ পাইল। তাহার মূলধন কত ছিল?

[B U. 1925]

21. A, B ও C কোন যৌথ ব্যবসায় করিয়া 1000 টাকা লাভ করিল। যদি A ও B মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং B ও C এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5 হয় তবে লাভের টাকা কে কত পাইবে?

22. A, B এবং C কোন ব্যবসায়ে অংশীদার। A মোট লাভের $\frac{2}{3}$ অংশ এবং B ও C অবশিষ্ট লাভ সমানভাবে বণ্টন করিয়া পাইবে, যদি লাভের হার 5% হইতে 7% বৃদ্ধি পায়, তাহা হইলে A এর আয় 800 টাকা বর্ধিত হয়। ব্যবসায়ে C কত টাকা নিয়োজিত করিয়াছে? [C. U. Addl. 1946]

23. A, B, C, D কোন ব্যবসায় আরম্ভ করিল, 1লা জানুয়ারী A 1200 টাকা, 1লা এপ্রিল B 1500 টাকা, 1লা জুলাই C 1800 টাকা এবং 1লা অক্টোবর D 2100 টাকা মূলধন নিয়োজিত করিয়াছিল। বৎসরান্তে 900 টাকা লাভ উহাদের মধ্যে কিরূপে বিভক্ত হইবে? [D. B Addl. 1932)

1 G

মিশ্রণ

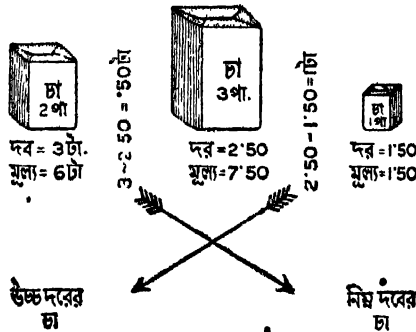
Alligation

1·1. অধিক মূল্যের কোন দ্রব্যের সহিত কম মূল্যের দ্রব্য মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের মূল্য উভয় মূল্যের মধ্যবর্তী হয়। সেইজন্য মিশ্রণের দরকে **মধ্য দর (Mean Price)** বলে। যে প্রক্রিয়ার দ্বারা বিভিন্ন মূল্যের দ্রব্য মিশ্রিত করিয়া মিশ্রণের দর বা মধ্য দর বাহির করা হয় তাহাকে **মিশ্রণ (Alligation)** বলে।

প্রশ্নমালা 1G

[1—10 অঙ্কগুলি ক্লাসে কর এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ]

1. 3 টাকা পাউণ্ড দরের চায়ের সহিত 1 টা. 50 পয়সা পাউণ্ড দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে প্রতি পাউণ্ড মিশ্রিত চায়ের মূল্য 2 টা. 50 পয়সা হইবে ?

মিশ্রিত চায়ের পাউণ্ড 2 টা. 50 পয়সা হইলে প্রতি পাউণ্ড বেশী মূল্যের চা হইতে (3টা −2টা. 50 পয়সা) বা 50 পয়সা ক্ষতি হয় এবং প্রতি পাউণ্ড কম মূল্যের চা হইতে (2 টা. 50 পয়সা - 1 টাকা 50 পয়সা) বা 1 টাকা লাভ হয়। এখানে লক্ষ্য

কর যে, বেশী মূল্যের চা 2 পাউণ্ড হইলে (50 পয়সা × 2) বা 1 টাকা ক্ষতি হয় এবং কম মূল্যের চা 1 পাউণ্ড হইলে 1 টাকা লাভ হয় অর্থাৎ লাভ ও ক্ষতির পরিমাণ একই হয়। সুতরাং অধিক মূল্যের 2 পাউণ্ড চায়ের সহিত কম মূল্যের 1 পাউণ্ড চা মিশ্রিত করিতে হইবে ; অর্থাৎ নির্ণেয় অনুপাত = 2 : 1

নিয়ম ঃ

যে দুইটি বস্তু মিশ্রিত করিতে হইবে তাহাদের মধ্যে যে বস্তুটির দাম আগে দেওয়া আছে তাহাকে 'প্রথম দর' এবং যেটির দাম পরে দেওয়া আছে তাহাকে 'দ্বিতীয় দর' এবং মিশ্রণের দর 'মধ্য দর' ধরিয়া নিম্নলিখিত সূত্র প্রয়োগ করিলে মিশ্রণের অনুপাত পাওয়া যাইবে।

নির্ণেয় অনুপাত, 1ম প্রকার : 2য় প্রকার = (মধ্যদর ~ দ্বিতীয় দর) : (প্রথম দর ~ মধ্যদর)

দ্রষ্টব্য ঃ '~' চিহ্নটিকে ইংরাজীতে Sign of Difference বলে। কোন দুইটি রাশির মধ্যে এই চিহ্ন দেওয়া থাকিলে বুঝিতে হইবে যে বৃহত্তর রাশি হইতে ক্ষুদ্রতর

রাশি বিয়োগ করিতে হইবে। মনে রাখিবে, দুইটি দ্রব্য মিশ্রিত করিয়া মিশ্রণের যে দর পাওয়া যায় সেই দামে কোন বস্তু বিক্রয় করিলে লাভ বা ক্ষতি কিছুই হইবে না।

2. 2 শিলিং 5 পেন্স ও 3 শিলিং 4 পেন্স পাউণ্ড দরের দুই প্রকার চা কি অনুপাতে মিশাইলে প্রতি পাউণ্ড মিশ্রিত চা-এর মূল্য 2 শি. 9 পে. হইবে?

[D. B. 1930]

প্রথম দর	মধ্য দর	দ্বিতীয় দর
2 শি. 5 পে.	2 শি. 9 পে.	3 শি. 4 পে.

∴ নির্ণেয় অনুপাত (১ম প্রকার : ২য় প্রকার)

= (দ্বিতীয় দর − মধ্য দর) : (মধ্য দর − প্রথম দর)

= (3 শি. 4 পে. − 2 শি. 9 পে.) : (2 শি. 9 পে. − 2 শি. 5 পে.)

7 পে. : 4 পে. = 7 : 4.

3. 5 টাকা প্রতি কি. গ্রা. দরের সহিত 1 টাকা প্রতি কি. গ্রা. চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিতে হইবে যাহাতে মিশ্রিত চা 4 টা. কি. গ্রা. দরে বিক্রয় করিয়া মূলধনের 20% লাভ হয়?

মধ্য দরের ক্রয়মূল্যের শতকরা (100+20) বা 120% বা $\frac{120}{100}$ অংশ

বা ক্রয়মূল্যের $\frac{6}{5}$ অংশ = 4 টাকা (বিক্রয়মূল্য)

$$\therefore \text{ মধ্যদর (ক্রয়মূল্য)} = \overset{2}{\cancel{4}} \text{ টা.} \times \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{10}{3} \text{ টা.}$$

প্রথম দর	মধ্যদর	দ্বিতীয় দর
5 টাকা	$\frac{10}{3}$ টাকা	1 টাকা

∴ নির্ণেয় অনুপাত ১ম প্রকার : দ্বিতীয় প্রকার

= (মধ্যদর − দ্বিতীয় দর) : (প্রথম দর − মধ্যদর)

= ($\frac{10}{3}$ টা. − 1 টা.) : (5 টা − $\frac{10}{3}$ টা.)

= $2\frac{1}{3}$ টা : $1\frac{2}{3}$ টা = $\frac{7}{3}$: $\frac{5}{3}$ = 7 : 5.

4 একজন দোকানদার দুই প্রকারের 60 কুইণ্টাল চাউল 153 টা. 75 পয়সা দিয়া ক্রয় করিল, একপ্রকার চাউলের মূল্য প্রতি কুইণ্টাল 3 টাকা এবং অন্য প্রকারের মূল্য প্রতি কুইণ্টাল 2 টা. .5 পয়সা, সে কোন প্রকারের কত কুইণ্টাল চাউল ক্রয় করিল ?

60 কুইণ্টাল চাউলের মূল্য = 153 টা. 75 পয়সা

∴ 1 „ „ „ = 153 টা 75 পয়সা ÷ 60

$$= 153\tfrac{3}{4} \text{ টা} \div 60 = \frac{\overset{41}{\cancel{615}}}{4 \times \underset{4}{\cancel{60}}} = \frac{41}{16} \text{ টা.}$$

প্রথম দর	মধ্যদর	দ্বিতীয় দর
3 টা.	$\frac{41}{16}$ টা.	$2\frac{1}{4}$ টা.

$$\therefore \text{ অনুপাত} = \left(\frac{41}{16} - \frac{9}{4}\right) \text{ টা.} : \left(3 - \frac{41}{16}\right) \text{ টা.} = \frac{5}{16} \text{ টা.} : \frac{7}{16} \text{ টা.} = 5 : 7.$$

∴ 60 কুইণ্টাল দুইপ্রকারের চাউল 5 : 7 অনুপাতে মিশ্রিত আছে।

$$\therefore \text{ প্রথম প্রকার চাউলের পরিমাণ} = \frac{60 \text{ কুইণ্টাল} \times 5}{12} = 25 \text{ কুইণ্টাল}$$

$$\therefore \text{ দ্বিতীয় প্রকার চাউলের পরিমাণ} = \frac{60 \text{ কুইণ্টাল} \times 7}{12} = 35 \text{ কুইণ্টাল।}$$

5. প্রতি পাউণ্ড 2 শি. 6 পে. দরের চা-এর সহিত 4 শি. 2 পে. দরের চা

মিশ্রিত করিয়া 3 শি. 9 পে. দরের চা প্রস্তুত হইল ; দুই প্রকারের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত হইল ?

6. 28 টাকা কুইণ্টাল দরের চিনির সহিত 40 টাকা কুইণ্টাল দরের চিনি কি অনুপাতে মিশাইলে মিশ্রিত চিনি 36 টাকা কুইণ্টাল দরে বিক্রয় করিলে শতকরা 20 টাকা লাভ হইবে ?

7 3- শি. 6 পে. পাউণ্ড দরের চায়ের সহিত 4 শি. 6 পে. পাউণ্ড দরের চা কি অনুপাতে মিশাইলে মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ডের মূল্য 4 শি. $1\frac{1}{2}$ পে. হইবে ?

[B C. S 1951]

8. 4 শিলিং ও 3 শিলিং 6 পেন্স পাউণ্ড দরের দুই প্রকারের চা সমপরিমাণে মিশানো হইল। ঐ মিশ্রিত চা প্রতি পাউণ্ড কি দরে বিক্রয় করিলে 20% লাভ হইবে ? [C. U 1930]

9. প্রতি আউন্স স্বর্ণের মূল্য 3 পা. 17 শি $10\frac{1}{2}$ পে. এবং প্রতি আউন্স রৌপ্যের মূল্য 5 শি 6 পে. হইলে স্বর্ণের সহিত রৌপ্য কি অনুপাতে মিশাইলে মিশ্রিত ধাতুর মূল্য প্রতি পাউণ্ড 32 পা 5 শি হইবে ? (1 পা = 12 আউন্স)

[M. U. 1874]

10. জনৈক ব্যবসায়ী 2 শি. 8 পে. পাউণ্ড দরের চায়ের সহিত 4 শি. 6 পে. পাউণ্ড দরের চা মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চা প্রতি পাউণ্ড 4 শি দরে বিক্রয় করিয়া মূলধনের উপর 20% লাভ করে, সে দুই প্রকারের চা কি অনুপাতে মিশাইয়াছিল ?

[D. B. 1949]

11. $1\frac{1}{8}$ টাকা পাউণ্ড দরের 34 পাউণ্ড চায়ের সহিত 75 পয়সা পাউণ্ড দরের 29 পাউণ্ড চা মিশাইয়া মিশ্রিত চায়ের প্রতি পাউণ্ড কত করিয়া বিক্রয় করিলে মূলধনের উপর শতকরা 5 টাকা লাভ হইবে ?

12. এক ব্যক্তি দুধ কিনিয়া জল মিশাইল এবং জল মিশান দুধ ক্রয়মূল্যেই বিক্রয় করিল। তাহাতে তাহার 20% লাভ হইলে জল মিশানো দুধের প্রতিলিটারে কত ডেসিলিটার জল ছিল ?

13. সমান মাপের তিনটি পাত্র জলমিশ্রিত মদে পূর্ণ আছে। পাত্র তিনটিতে মদ ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 2 : 3, 3 : 4 ও 4 : 5 ; উহাদিগকে ঢালিয়া যদি অন্য একটি পাত্রে মিশ্রিত করা যায় তবে তাহাতে মদ ও জলের অনুপাত কত হইবে ?

[W. B. S. F. '63] [C. U. 1929]

14. একটি পূর্ণ পাত্রে 3 ভাগ দুধ ও 1 ভাগ জল মিশ্রিত ছিল। ঐ মিশ্রিত

দুগ্ধের কত অংশ তুলিয়া লইয়া সেই পরিমাণ জল ঢালিলে ঐ পাত্রের অর্ধেক দুধ ও অর্ধেক জল হইবে ?

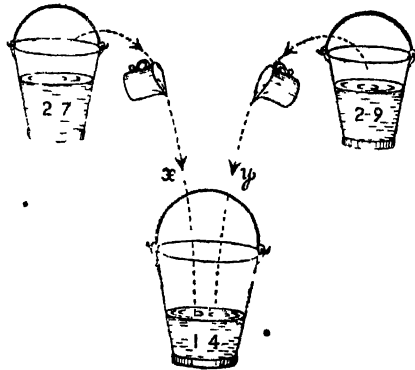
15 একটি পাত্রে 3 ভাগ জল ও 5 ভাগ সিরাপ মিশ্রিত করা আছে। ঐ মিশ্রণের কত অংশ তুলিয়া লইয়া সেই পরিমাণ জল ঢালিয়া দিলে জল ও সিরাপের পরিমাণ সমান হইবে ? [M. U. 1924]

16. একটি তরল পদার্থে শতকরা $22\frac{1}{2}$ ভাগ জল আর একটি তরল পদার্থে 27% জল আছে। প্রথম প্রকারের 5 ভাগের সহিত দ্বিতীয় প্রকারের 7 ভাগ মিশ্রিত করিলে উৎপন্ন মিশ্রিত পদার্থে শতকরা কত ভাগ জল থাকিবে ?

[Civil Service]

17. তিনটি সমান গ্লাসে জলমিশ্রিত দুগ্ধ আছে। দুগ্ধ ও জলের অনুপাত প্রথম গ্লাসে 3 : 1, দ্বিতীয়টিতে 5 : 3 এবং তৃতীয়টিতে 9 : 7 ; ঐ তিনটি গ্লাসের জল-মিশ্রিত দুগ্ধ আর একটি পাত্রে ঢালা হইল। প্রমাণ কর যে, নূতন পাত্রে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 31 : 17 হইয়াছে।

18. দুইটি পাত্রে জলমিশ্রিত দুধ আছে। জল ও দুধের অনুপাত একটিতে 2 : 7 এবং অপরটিতে 2 : 9 ; পাত্র দুইটিতে মিশ্রিত দ্রব্য কি অনুপাতে লইয়া একত্র মিশাইলে নূতন মিশ্রণে জল ও দুধের অনুপাত 1 : 4 হইবে ? [C. U. 1944]

মনে করি নির্ণেয় অনুপাত $= x : y$

অর্থাৎ প্রথম পাত্রের x লিটারের সহিত দ্বিতীয় পাত্রের y লিটার মিশ্রিত করা হইয়াছে।

∴ প্রথম পাত্রের x লিটার মিশ্রণে জল ও দুধের অনুপাত 2 : 7

∴ জলের পরিমাণ $=\frac{2x}{9}$ লিটার এবং দুধের পরিমাণ $=\frac{7x}{9}$ লিটার।

আবার ∵ দ্বিতীয় পাত্রের y লিটার মিশ্রণে জল ও দুধের অনুপাত $=2:9$

∴ জলের পরিমাণ $=\frac{2y}{11}$ লিটার এবং দুধের পরিমাণ $=\frac{9y}{11}$ লিটার। নূতন মিশ্রণে জল $\left(\frac{2x}{9}+\frac{2y}{11}\right)$ লিটার এবং দুধ $\left(\frac{7x}{9}+\frac{9y}{11}\right)$ লিটার আছে এবং উহাদের অনুপাত $\left(\frac{2x}{9}+\frac{2y}{11}\right):\left(\frac{7x}{9}+\frac{9y}{11}\right)$ প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{\frac{2x}{9}+\frac{2y}{11}}{\frac{7x}{9}+\frac{9y}{11}}=\frac{1}{4}$

বা, $\frac{8x}{9}+\frac{8y}{11}=\frac{7x}{9}+\frac{9y}{11}$ বা, $\frac{8x}{9}-\frac{7x}{9}=\frac{9y}{11}-\frac{8y}{11}$ বা, $\frac{x}{9}=\frac{y}{11}$

∴ $x:y=9:11$, নির্ণেয় অনুপাত $=9:11$

(২য় প্রকার):—প্রথম পাত্রে দুধ আছে $\frac{7}{9}$ অংশ এবং দ্বিতীয় পাত্রে দুধ আছে $\frac{9}{11}$ অংশ। নূতন মিশ্রণে দুধের পরিমাণ $\frac{4}{5}$ অংশ হবে।

প্রথম পাত্রে দুধ কম আছে $\frac{4}{5}-\frac{7}{9}=\frac{1}{45}$ অংশ।

২য় পাত্রে দুধ বেশী আছে $=\frac{9}{11}-\frac{4}{5}=\frac{1}{55}$ অংশ।

∴ প্রথম পাত্র : ২য় পাত্র $=\frac{1}{55}:\frac{1}{45}$ বা $45:55$ বা $9:11$ অনুপাতে মিশ্রিত করিতে হবে।

19 18 পাউণ্ড ওজনের রৌপ্য মিশ্রিত স্বর্ণের মূল্য 637 পা. 7 শিলিং। উহাতে স্বর্ণ ও রৌপ্য যে অনুপাতে মিশ্রিত আছে যদি সেই অনুপাতে রৌপ্য ও স্বর্ণ মিশ্রিত থাকিত, তবে উহার মূল্য 259 পা. 1 শিলিং হইত। প্রতি আউন্স স্বর্ণের মূল্য 3 পা. 17 শি. $10\frac{1}{2}$ পে. হইলে ঐ ধাতুখণ্ডে স্বর্ণ ও রৌপ্যের অনুপাত এবং প্রতি আউন্স রৌপ্যের মূল্য কত? [B. U. 1887]

20. এক ব্যক্তি পূর্ণ এক গ্লাস ঔষধ লইয়া তাহার $\frac{1}{4}$ অংশ পান করিল এবং গ্লাসটি তখন জল দিয়া পূর্ণ করিয়া আবার $\frac{1}{3}$ অংশ পান করিল। পুনরায় গ্লাসটি জল দিয়া পূর্ণ করিয়া তাহার অর্ধেক পান করিল। ঐ ব্যক্তি সমস্ত ঔষধের কত অংশ এবং প্রতিবারে উহার কত অংশ পান করিল? [Civil Service]

21. মদ্যপূর্ণ একটি পাত্র হইতে 9 গ্যালন মদ্য তুলিয়া লইয়া পাত্রে ঐ পরিমাণ জল ঢালা হইল। ঐ জলমিশ্রিত মদ্য হইতে আবার 9 গ্যালন লইয়া তৎপরিবর্তে জল মিশান হইল। এখন যদি ঐ পাত্রে মদ্য ও জলের অনুপাত 16 : 9 হয় তবে ঐ পাত্রে কত গ্যালন মদ ধরে ? [P. U. 1891]

22. 200 টাকা, 300 টাকা ও 450 টাকা কুইন্টাল দরের তিন প্রকারের (প্রথম দুই দরের চাউল সমভাগে লইয়া) কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে 400 টাকা কুইন্টাল দরের চাউল উৎপন্ন হইবে ?

*23. প্রতি পাউণ্ড 4 শিলিং, 6 শিলিং, 7 শিলিং ও 8 শিলিং দরের চা কিরূপে মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চা প্রতি পাউণ্ড 6 শি. 8 পে. দরে বিক্রয় করিলে প্রাপ্ত মূল্যের $\frac{1}{20}$ অংশ লাভ থাকিবে ? (মনে কর, প্রথম দুই দরের চা 2 ও 3 এর অনুপাত এবং শেষ দুই দরের চা 3 ও 4 এর অনুপাতে মিশ্রিত হইবে)।

24. একটি পাত্রে 11 গ্যালন জল এবং অন্য একটি পাত্রে 6 গ্যালন মদ আছে। যদি প্রথম পাত্র হইতে 1 গ্যালন লইয়া দ্বিতীয় পাত্রে ঢালিবার পর দ্বিতীয় পাত্র হইতে 1 গ্যালন লইয়া প্রথম পাত্রে ঢালা হয় এবং এইরূপ প্রক্রিয়া আর একবার করা হয়, তাহা হইলে শেষে প্রতি পাত্রে কত জল ও মদ থাকিবে ?

[M. U. 1925]

25. প্রতি তোলা 50 টাকা মূল্যের বিশুদ্ধ সোনার সহিত প্রতি তোলা 24 টাকা মূল্যের অন্য এক নিকৃষ্ট ধাতু কি অনুপাতে মিশাইলে, মিশ্রিত ধাতু $39\frac{1}{6}$ টাকা তোলা দরে বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইবে ? [C. U. 1943]

26. 9 টা 60 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা এর সহিত 13 টা. 44 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা কি অনুপাতে মিশাইয়া মিশ্রিত চা'র প্রতি কিলোগ্রাম 13 টা. 20 পয়সা দরে বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইবে ? [W. B. S. F. 1968]

2

ঐকিক নিয়ম

Unitary Method

A. আয়কর বিষয়ক প্রশ্ন (Problems on Income Tax)

2.1. জনসাধারণ কোন দেশের সরকারকে যে অর্থ দেয় তাহাকে **কর** বা **খাজনা** (**Tax**) বলে।

2·2. সরকার কোন ব্যক্তির বার্ষিক আয়ের উপর যে কর ধার্য করেন তাহাকে **আয়কর** (Income-tax) বলে। এই কর দরিদ্র ব্যক্তিকে দিতে হয় না। বার্ষিক একটি নির্দিষ্ট টাকার উপর আয় হইলে তবেই আয়কর দিতে হয়। সাধারণতঃ টাকা প্রতি বা পাউণ্ড প্রতি কোন নির্দিষ্ট হারে আয়কর ধার্য হইয়া থাকে। যদি সরকার স্থির করেন যে বার্ষিক 3000 টাকার উপরে যাহাদের আয় তাহাদের নির্দিষ্ট হারে আয়কর দিতে হইবে, তাহা হইলে যাহাদের আয় বার্ষিক 3000 টাকার কম তাহাদের আয়কর দিতে হইবে না। কিন্তু যদি আয় 3000 টাকার অধিক হয় তাহা হইলে 3000 টাকা হইতে যত টাকা অধিক তাহার উপর নির্দিষ্ট হারে আয়কর দিতে হইবে। মোট আয় (Gross income) হইতে আয়কর বাদ দিলে প্রকৃত আয় (Net income) পাওয়া যায়।

2·3. যে ব্যক্তির ঋণ, তাহার নগদ অর্থ এবং সম্পত্তির মূল্যের সমষ্টি অপেক্ষা অধিক, তাহাকে **দেউলিয়া** (Bankrupt) বলে। যে ঋণ দেয় তাহাকে **পাওনাদার** বা **উত্তমর্ণ** (Creditor) বলে। যে ঋণ গ্রহণ করে তাহাকে **দেনাদার** বা **অধমর্ণ** (Debtor) বলে। সমগ্র ঋণের পরিমাণকে দেনা (Liabilities) বলে। নগদ অর্থ, স্থাবর ও অস্থাবর সম্পত্তির মূল্য ও অধমর্ণের নিকট হইতে পাওনা অর্থের মোট সমষ্টিকে মোট **সম্পত্তি** (Assets) বলে। কোন দেউলিয়া তাহার পাওনাদারকে যে পরিমাণ অর্থ পরিশোধ করিতে পারে তাহাকে **লভ্যাংশ** (Dividend) বলে। ইহা ঋণের প্রতি টাকা বা প্রতি পাউণ্ড হিসাবে নির্ধারিত হয়।

প্রশ্নমালা 2 A

[1—10 অঙ্কগুলি ক্লাসে কর এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. প্রতি টাকায় 5 পয়সা আয়কর হইলে যে ব্যক্তির বার্ষিক আয় 3000 টাকা তাহাকে কত আয়কর দিতে হইবে।

1 টাকার আয়কর 5 পয়সা

∴ 3000 „ „ 5 পয়সা $\times$ 3000 = 15000 পয়সা = **150 টাকা।**

2. প্রতি পাউণ্ডে 5 পে. আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 940 পাউণ্ড অবশিষ্ট থাকে, তাহার মোট আয় কত?

আয়ের প্রতি পাউণ্ডে 5 পে. আয়কর দিলে (1 পা − 5 পে) বা (240 − 5) বা 235 পে. থাকে।

∴ 235 পে. থাকে যখন আয় 1 পাউণ্ড ∴ 1 পে থাকে যখন আয় $\frac{1}{235}$ পাউণ্ড।

∴ 940 পা. বা 940 $\times$ 20 $\times$ 12 পে থাকিবে যখন আয়

$$\frac{1 \times 940 \times 20 \times 12}{235}$$ বা 960 পাউণ্ড।

∴ নির্ণেয় আয় = 960 পা.

3. এক ব্যক্তি টাকায় 5 পয়সা আয়কর দেয়; টাকায় 6 পয়সা করিয়া আয়কর দিতে হইলে তাহাকে 25 টাকা বেশী আয়কর দিতে হয়। তাহার আয় কত?

(6 − 5) বা 1 পয়সা বেশী আয়কর দিতে হয় 1 টাকা আয়ে।

∴ 25 টা. বা 25 $\times$ 100 পয়সা বেশী আয়কর দিতে হয় 1 $\times$ 25 $\times$ 100 বা 2500 টাকা আয়ে।

∴ নির্ণেয় আয় = **2500 টাকা।**

4. বেতনের প্রতি টাকায় 5 পয়সা হারে আয়কর এবং 6 পয়সা হারে প্রাভিডেণ্ট ফণ্ডে দিয়া এক ব্যক্তির 890 টাকা অবশিষ্ট থাকিলে তাহার বেতন কত?

1 টাকা আয় হইলে (6 + 5) বা 11 পয়সা বাদ দিয়া এক ব্যক্তির (1টা. − 11 পয়সা) বা (100 − 11) বা 89 পয়সা থাকে।

∴ 89 পয়সা থাকে যখন 1 টাকা বেতন। ∴ 1 পয়সা থাকে যখন $\frac{1}{89}$ টাকা বেতন।

∴ 890 টা. বা 890×100 পয়সা থাকিবে যখন $\frac{1}{89} \times 890 \times 100$

বা 1000 টাকা বেতন।

∴ নির্ণেয় বেতন = 1000 টাকা।

5. 150 পাউণ্ড পর্যন্ত আয়ের উপর কোন আয়কর দিতে হয় না ; কিন্তু 150 পা. অপেক্ষা অধিক আয়ের উপর প্রতি পাউণ্ডে 2 শিলিং আয়কর দিতে হয়। 400 পাউণ্ড আয়ের উপর কত আয়কর দিতে হইবে ?

1 পা. এ 2 শি. আয়কর দিতে হয়।

∴ (400 − 150) বা 250 পা. এ $\frac{2 \times 250}{20}$ বা 25 পা. আয়কর দিতে হয়।

∴ নির্ণেয় আয়কর = 25 পা.

6. এক জমিদারের বার্ষিক আয় 25000 টাকা এবং আয়কর দিয়া তাঁহার থাকে 23437 টাকা 50 পয়সা ; প্রতি টাকায় কত করিয়া তিনি আয়কর দেন ?

7. টাকায় 5 পয়সা হিসাবে এক ব্যক্তিকে তাহার আয়ের উপর 480 টাকা আয়কর দিতে হইলে তাহার আয় কত ?

(8.) প্রতি টাকায় 5 পয়সা হারে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 7714 টাকা রহিল। প্রতি টাকায় 25 পয়সা হারে আয়কর দিতে হইলে তাহার কত টাকা থাকিবে ?

9. প্রতি পাউণ্ডে 10 পেন্স হিসাবে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 2484 পাউণ্ড রহিল ; তাহার আয় কত ?

10. এক ব্যক্তি প্রতি পাউণ্ডে 1 শিলিং হিসাবে আয়কর দেন ; কর যদি প্রতি পাউণ্ডে 9 পেনি হইত তবে তাহার কর 80 পাউণ্ড কম হইত ; ঐ ব্যক্তির মোট আয় কত ?

11. প্রতি পাউণ্ডে 7 পেন্স হিসাবে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 1632 পা. 8 শি. 10 পে. থাকিলে, তাহার আয় কত ? [P. U. 1948]

12. এক ব্যক্তির আয় 150 পাউণ্ড কমিয়া গিয়াছে ; কিন্তু আয়কর প্রতি

পাউণ্ডে 6 পে. স্থলে 7 পে. হওয়াতে, পূর্বে তাঁহার যত কর দিতে হইত, এখনও তত কর দিতে হয়। তাঁহার বর্তমান আয় কত ?

মনে করি, ঐ ব্যক্তির বর্তমান আয় $= x$ পাউণ্ড।

$\therefore$ পূর্ব আয় $= (x+150)$ পা.।

প্রতি পাউণ্ডে 6 পে. হিসাবে $(x+150)$ পা. এর আয়কর $= 6\ (x+150)$ পেন্স।

$\therefore$ প্রশ্নের সর্তানুসারে $7x = 6(x+150)$ বা $7x = 6x+900$

বা $7x - 6x = 900$

$\therefore \quad x = 900 \quad \therefore$ ঐ ব্যক্তির নির্ণেয় বর্তমান আয় $= 900$ পা.

২য় প্রকার :—150 পা.-এ আয়কর দিতে হ'ত 150×6 পে. $= 900$ পে.। 150 পা. আয় কম হওয়ায় এবং আয়কর পাউণ্ডে $(7-6) = 1$ পেনি. বৃদ্ধি হওয়া সত্ত্বেও আয়কর সমান রহিল।

$\therefore \quad 900 \div 1 = 900$ পা. বর্তমান আয়।

(13) এক ব্যক্তির আয় 750 টাকা কমিয়া গেল, কিন্তু আয়কর টাকায় 5 পয়সা হইতে বাড়িয়া 6 পয়সা হওয়ায় তাহাকে পূর্বের সমান আয়কর দিতে হইল। প্রথমে তাহার কত আয় ছিল ?

14. প্রতি টাকায় 5 পয়সা হিসাবে যত আয়কর দিতে হয়, টাকায় 7 পয়সা হিসাবে তাহা অপেক্ষা 31 টা. 25 পয়সা বেশী হয় ; তাহার আয় কত ?

*15. যাহার বার্ষিক আয় 150 পাউণ্ডের কম তাহাকে প্রতি পাউণ্ডে 5 পেন্স হিসাবে এবং যাহার আয় 150 পাউণ্ডের অধিক তাহাকে প্রতি পাউণ্ডে 7 পে. হিসাবে আয়কর দিতে হয়। এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 149 পা. 10 শি. এবং অপর ব্যক্তির বার্ষিক আয় 150 পা. 15 শি. ; আয়কর বাদে প্রথম ব্যক্তির আয় অপেক্ষা দ্বিতীয় ব্যক্তির আয় কত কম ?

(*16) মাসিক 200 টাকা আয় পর্যন্ত প্রতি টাকার আয়কর 6 পয়সা, কিন্তু মাসিক 200 টাকার আয়ের উপর আয়কর প্রতি টাকায় 9 পয়সা। এক ব্যক্তির মাসিক আয় 199 টাকা এবং দ্বিতীয় এক ব্যক্তির মাসিক আয় 200 টাকার উপরে। আয়কর বাদ দিলে দ্বিতীয় ব্যক্তি প্রথম ব্যক্তি অপেক্ষা মাসিক 51 পয়সা কম পায় ; দ্বিতীয় ব্যক্তির মাসিক আয় কত ?

17. এক ব্যক্তি তাঁহার মোট আয়ের তিন্-চতুর্থাংশের উপর প্রতি টাকায় 4 পয়সা করিয়া আয়কর দেন ; ইহাতে তাঁহার মোট আয়ের উপর টাকা-প্রতি কত পড়ে ?

18. একজন দেউলিয়ার ঋণ 3750 টাকা এবং সে ঋণের প্রতি টাকায় 75 পয়সা করিয়া দিল, তাঁহার সম্পত্তির মূল্য কত ?

19. 3000 পাউণ্ডের অতিরিক্ত যে আয় তাহার উপর 5% হারে এক ব্যক্তিকে 320 পাউণ্ড আয়কর দিতে হইল। ঐ ব্যক্তির মোট আয় কত ?

20. কোন ভদ্রলোকের মাসিক বেতন 625 টাকা; মোট বার্ষিক আয়ের প্রথম 3,000 টাকার উপর তাঁহাকে কোন আয়কর দিতে হয় না। পরবর্তী 2,000 টাকার উপর আয়করের হার টাকা প্রতি 7 প. এবং তদূর্ধ্বে টাকা প্রতি 9 প। তাঁহাকে একবৎসরে আয়কর বাবদ মোট কত টাকা দিতে হয় ?

[W. B. S. F. 1965]

21. এক ব্যক্তির মোট আয় 15000 টাকা। ঐ আয়ের 2500 টাকা বাদে বাকি আয়ের উপর প্রতি টাকায় 27 পয়সা হারে আয়কর দিতে হইল; আয়কর দেওয়ার পর তাহার কত টাকা রহিল ?

2 B. শৃঙ্খল নিয়ম (Chain Rule)

2·1. এমন অনেক প্রশ্ন আছে যেগুলির সমাধান বার বার ঐকিক নিয়মের সাহায্য না লইয়া ঐ প্রশ্নের বিষয়গুলি শৃঙ্খলাকারে সাজাইয়া অতি সহজে সমাধান করা যায়। এই সংক্ষিপ্ত পদ্ধতির নাম শৃঙ্খল নিয়ম (Chain Rule)।

2·2 শৃঙ্খল নিয়ম ঃ

প্রশ্নের প্রদত্ত সম্বন্ধগুলি সমীকরণের ন্যায় এমনভাবে সাজাইতে হইবে যেন একই স্তম্ভে একজাতীয় রাশি দুইবার না পড়ে। একজাতীয় রাশির একটি ডান স্তম্ভে বসিলে অপরটি ঠিক পরের সমীকরণের বাম স্তম্ভে বসিবে। প্রথম সমীকরণের বাম পার্শ্বের রাশি এবং সর্বশেষ সমীকরণের ডান পাশের রাশি সর্বদা একজাতীয় হইবে। যে স্তম্ভে নির্ণেয় রাশি থাকিবে সেই স্তম্ভের অন্যান্য রাশির গুণফল দ্বারা অপর স্তম্ভের রাশিগুলির গুণফলকে ভাগ করিলে নির্ণেয় রাশির সাংখ্যমান নির্ণয় করা যাইবে।

প্রশ্নমালা 2 B

[1—7 ক্লাসের কাজ এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ]

1. যদি 6টি ঘোড়ার মূল্য 24টি গরুর মূল্যের সমান হয়, 10টি গরুর মূল্য 8টি মহিষের মূল্যের সমান হয়, 4টি মহিষের মূল্য 15টি গাধার মূল্যের সমান হয়, 8টি

গাধার মূল্য 32টি মেষের মূল্যের সমান হয় এবং 9টি মেষের মূল্য 75 টাকা হয়. তবে একটি ঘোড়ার মূল্য কত ?

মনে করি একটি ঘোড়ার মূল্য $= x$ টাকা।

মূল্য হিসাবে
6টি ঘোড়া = 24টি গরু
10টি গরু = 8টি মহিষ
4টি মহিষ = 15টি গাধা
8টি গাধা = 32টি মেষ
9টি মেষ = 75 টাকা
x টাকা = 1টি ঘোড়া

$$\therefore \quad x = \frac{24 \times 8 \times 15 \times 32 \times 75 \times 1}{6 \times 10 \times 4 \times 8 \times 9} = 400.$$

$\therefore$ একটি ঘোড়ার মূল্য = 400 টাকা।

2 A 3 ঘণ্টায় যত পথ যায় B $1\frac{3}{4}$ ঘণ্টায় তত পথ যায়, B $1\frac{1}{4}$ ঘণ্টায় যত পথ যায় C 2 ঘণ্টায় তত পথ যায় এবং C 4 ঘণ্টায় যত পথ যায় D $3\frac{1}{3}$ ঘণ্টায় তত পথ যায়। D $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় যত পথ যায় A এর তত পথ যাইতে কত সময় লাগিবে ?

মনে করি A এর নির্ণেয় সময় $= x$ ঘণ্টা,
A-এর 3 ঘণ্টার পথ = B-এর $1\frac{3}{4}$ ঘণ্টার পথ
B এর $1\frac{1}{4}$ ঘণ্টার পথ = C এর 2 ঘণ্টার পথ
C-এর 4 ঘণ্টার পথ = D এর $3\frac{1}{3}$ ঘণ্টার পথ
D-এর $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টার পথ = A-এর x ঘণ্টার পথ।

$$\therefore \quad x = \frac{3 \times 1\frac{1}{4} \times 4 \times 3\frac{1}{2}}{1\frac{3}{4} \times 2 \times 3\frac{1}{3}} = \frac{3 \times \frac{5}{4} \times 4 \times \frac{7}{2}}{\frac{7}{4} \times 2 \times \frac{10}{3}} = \frac{3 \times 5 \times 4 \times 7 \times 4 \times 3}{4 \times 2 \times 7 \times 2 \times 10}$$

$= \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ $\therefore$ নির্ণেয় সময় $= 4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

3. 32টি আতাফলের মূল্য 50টি আমের মূল্যের সমান, 10টি আমের মূল্য 3টি কলার মূল্যের সমান, 30টি কলার মূল্য 8 টাকা হইলে একটি আতাফলের মূল্য কত ?

4. যদি 6টি ঘোড়ার মূল্য 24টি গরুর মূল্যের, 20টি গরুর মূল্য 8টি মহিষের মূল্যের, 4টি মহিষের মূল্য 15টি গাধার মূল্যের এবং 8টি গাধার মূল্য 32টি ভেড়ার মূল্যের সমান হয় এবং যদি 9টি ভেড়ার মূল্য 25 টাকা হয়, তবে একটি ঘোড়ার মূল্য কত ?

5. A যে কাজ $6\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় করে B তাহা $4\frac{2}{3}$ ঘণ্টায় করে, B যে কাজ ৪ ঘণ্টায় করে C তাহা 15 ঘণ্টায় করে, এবং C যে কাজ $10\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় করে D তাহা 16 ঘণ্টায় করে, A যে কাজ 3 ঘণ্টায় করে D সেই কাজ কয় ঘণ্টায় করিতে পারিবে ?

6. 9 পাউণ্ড চাউলের মূল্য = 4 পাউণ্ড চিনির মূল্য, 14 পাউণ্ড চিনির মূল্য = $1\frac{1}{2}$ পাউণ্ড চা-এর মূল্য, 2 পা চা-এর মূল্য = 5 পাউণ্ড কফির মূল্য, $2\frac{1}{2}$ পাউণ্ড চাউলের মূল্য $6\frac{1}{4}$ পেনি হইলে 11 পাউণ্ড কফির মূল্য কত ? [B U. 188৪]

7. A 3 দিনে যে কাজের $\frac{1}{4}$ অংশ করে, B 4 দিনে তাহার $\frac{1}{4}$ অংশ করে এবং B 3 দিনে যে কাজের $\frac{1}{3}$ অংশ করে, C 6 দিনে তাহার $\frac{1}{6}$ অংশ করিতে পারে। A যে কাজ 30 দিনে করে. C তাহা কত দিনে করিবে ?

8. 8 টাকা = 1 পা. 10 শি, 6 পা = 40 থেলার এবং 25 থেলার = 95 ফ্রাঙ্ক, 1 ফ্রাঙ্ক = ভারতীয় মুদ্রায় কত ?

*9. যদি 2টি ভেড়ার মূল্য = 185 ফ্রাঙ্ক হয় 2টি বাছুরের মূল্য = 1টি ষাঁড়ের মূল্যের $\frac{1}{3}$ হয়, 15টি ভেড়ার মূল্য = 2টি ষাঁড়ের মূল্য হয় এবং যদি 55 50 ফ্রাঙ্ক = 2 পাউণ্ড হয়, তবে 25 পাউণ্ডে কয়টি বাছুর পাওয়া যাইবে ?

[Civil Service]

10. যদি 6 জন পুরুষ 10 জন স্ত্রীলোকের সমান কাজ করে, 3 জন স্ত্রীলোক 4 জন বালকের সমান কাজ করে, এবং 12 জন বালক 27 জন বালিকার সমান কাজ করে, তাহা হইলে কতজন বালিকা 10 জন পুরুষের সমান কাজ করে ?

11. B যতক্ষণে কোন কাজের $\frac{1}{4}$ অংশ সম্পন্ন করে, A ততক্ষণে কোন কাজের $\frac{1}{3}$ অংশ সম্পন্ন করে এবং B যতক্ষণে $\frac{1}{3}$ অংশ সম্পন্ন করে, C ততক্ষণে $\frac{1}{6}$ অংশ সম্পন্ন করে, A যে কাজ 10 ঘণ্টায় সম্পন্ন করিল, C তাহা কত ঘণ্টায় সম্পন্ন করিবে ?

12. A যখন 1000 কি. মি. যায় B তখন 800 কি. মি. যায় এবং B যখন 25 মি. যায় C তখন 20 মি. যায়, A যখন 100 ডে. মি. যায়, C তখন কত মিটার যায় ?

2 C. বৈদেশিক মুদ্রা বিনিময় ও ব্যাঙ্কের আদেশপত্র
(Foreign Exchange and Draft)

21 বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন প্রকার মুদ্রা প্রচলিত হয়। এক দেশীয় মুদ্রার পরিবর্তে অন্য দেশের মুদ্রা লওয়াকে **মুদ্রা-বিনিময়** (Exchange of currency) বা (Exchange) বলে, এবং এক দেশের মুদ্রার সহিত অন্য দেশের মুদ্রার প্রকৃত মূল্যের অনুপাতকে **বিনিময়ের সমতা** (Par of exchange) বলে, আর, এক দেশের মুদ্রার মূল্যের সহিত অন্য দেশের মুদ্রার মূল্যের যে অনুপাত, তাহাকে **বিনিময়ের হার** (Rate of Exchange) বলে। কতকগুলি দেশের মুদ্রার পরস্পর বিনিময়ের হার জানা থাকিলে তাহার সাহায্যে কোন একটি নির্দিষ্ট দেশের সহিত অন্যান্য যে-কোন দেশের মুদ্রার বিনিময়ের হার নির্ণয় করাকে **বিনিময় নির্ণয়** (Arbitrated rate of Exchange) বলে। বিভিন্ন দেশের মধ্যে দেনা-পাওনার আদান প্রদান সাধারণতঃ **হুণ্ডি** বা **বিল** এর (Bill of Exchange) সাহায্যে হয়। সচরাচর বিলের দলিল বা হুণ্ডি ব্যাঙ্কের সাহায্যে এই রকম বেচাকেনা হয়। বিনিময়ের হার বিনিময়ের সমতা অপেক্ষা কম হইলে তাহাকে **ডিস্কাউন্ট** (Discount) বলে এবং বেশী হইলে **প্রিমিয়াম** (Premium) বলে।

22. বিল বা হুণ্ডি (Bill of Exchange) বা ব্যাঙ্কের আদেশপত্র (Draft) :

কলিকাতার কোন ব্যবসায়ী যদি লণ্ডনের কোন ব্যবসায়ীকে 2000 পাউণ্ড পাঠাইতে চান তাহা হইলে 2000 পাউণ্ডের সমমূল্য ভারতীয় টাকা সেখানে পাঠাইলে কোন লাভ হইবে না, কারণ লণ্ডনে ভারতীয় টাকা চলিবে না। আবার 2000 পাউণ্ডের সমমূল্য স্বর্ণ বা রৌপ্য পাঠাইলে কাজ চলিবে বটে, কিন্তু নানা কারণে স্বর্ণ ও রৌপ্য পাঠানও বিশেষ অসুবিধাজনক। এইজন্য কলিকাতার ব্যবসায়ীকে স্থানীয় বড় কোন ব্যাঙ্কে 2000 পাউণ্ডের সমমূল্যের টাকা এবং খরচ বাবদ কিছু জমা দিয়া ঐ ব্যাঙ্কের নিকট হইতে 2000 পাউণ্ডের একটি বৈদেশিক **বিল** বা **হুণ্ডি** বা **ড্রাফ্‌ট** কিনিয়া নিজে বা ঐ ব্যাঙ্কের মাধ্যমে লণ্ডনের ব্যবসায়ীর নিকট পাঠাইতে হইবে। লণ্ডনের কোন্ ব্যাঙ্কে ঐ বিল ভাঙান যাইবে তাহা বিলে উল্লেখ থাকে।

দুই দেশের মধ্যে আর্থিক বিনিময় সরাসরি এইভাবে হইতে পারে কিংবা একাধিক অন্য দেশের মাধ্যমেও হইতে পারে। কলিকাতার ব্যবসায়ী বিনিময়ের হার তুলনা করিয়া যদি দেখেন কলিকাতা হইতে সোজাসুজি লণ্ডনের হুণ্ডি না

কিনিয়া পশ্চিম জার্মানি হইতে লণ্ডনের হুণ্ডি কিনিয়া অর্থ পাঠাইলে অধিকতর লাভজনক হইবে তবে তিনি তাহাও কিনিতে পারেন। স্বর্ণের ও রৌপ্যের মূল্যের হ্রাস-বৃদ্ধির সহিত বিভিন্ন দেশের মুদ্রা বিনিময়ের হারেরও তারতম্য হয়। সেইজন্য বিভিন্ন দেশের ব্যবসায়ী মহলকে বিদেশে অর্থ পাঠাইবার সময় এই সকল বিষয় বিবেচনা করিতে হয়।

2·3. নিম্নে কয়েকটি প্রধান দেশের মুদ্রার সহিত ইংলণ্ডীয় মুদ্রার বর্তমান বিনিময়ের হার দেওয়া হইল :

দেশ	মুদ্রা	ইংলণ্ডীয় মুদ্রার মূল্য
ভারতবর্ষ	টাকা (Rupee)	1 শি. 6 পে.
চীন	টেল (Tæl)	6 শি.
জাপান	ইয়েন (Yen)	4 শি.
ফ্রান্স	ফ্রাঙ্ক (Franc)	$9\frac{1}{2}$ পে.
রাশিয়া	রুব্‌ল (Rouble)	3 শি. 2 পে.
ইটালি	লিরা (Lira)	$2\frac{1}{2}$ পে.
জার্মানী	মার্ক (Mark)	$11\frac{3}{4}$ পে.
অষ্ট্রিয়া	ক্রোন (Krone)	1 শি. $1\frac{1}{4}$ পে.
হল্যাণ্ড	ফ্লোরিন (Florine)	1 শি. 8 পে.
আমেরিকা যুক্তরাষ্ট্র	ডলার (Dollar)	4 শি. $1\frac{1}{4}$ পে.
গ্রীস	ড্রাকমা (Drachma)	$9\frac{1}{2}$ পে.
আর্জেন্টিনা	পিসো (Peso)	3 শি. $11\frac{1}{2}$ পে.
বেলজিয়ম	বেলজা (Belga)	$8\frac{1}{2}$ পে.
তুরস্ক	লিরা (Lira) বা তুরস্কীয় পাউণ্ড (Turkish Pound)	18 শি. $0\frac{3}{4}$ পে.
অষ্ট্রেলিয়া	পাউণ্ড (Pound A)	20 শি.
দক্ষিণ আফ্রিকা	পাউণ্ড (Pound S)	20 শি.
কানাডা	ডলার (Dollar C)	4 শি. $3\frac{1}{4}$ পে.
সিংহল	রুপি (Rupee)	1 শি. 6 পে.

এক টেল = 4 টাকা, এক ইয়েন = 2·67 টাকা, এক রুব্‌ল্ = 2·1 টাকা।

দ্রষ্টব্য : (a) উপরিউক্ত বিনিময়ের হার পরিবর্তনশীল।

(b) বিনিময় সংক্রান্ত প্রশ্নের সমাধান শৃঙ্খল নিয়মে অতি সহজে করা যায়।

প্রশ্নমালা 2 C

[1—10 ক্লাসের কাজ এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. যখন বিনিময়ের হার 1 টাকায় 1 শি. 6 পে. তখন 5760 টাকায় কত পাউণ্ড পাওয়া যাইবে ?

1 শি. 6 পে. $= \frac{3}{40}$ পা. ∴ 1 টাকা $= \frac{3}{40}$ পা.

∴ 5760 টাকা $= \frac{3}{40} \times 5760$ পা. $= 432$ পা.

2. যদি ভারতীয় 1 টাকার বিনিময়ে ইংলণ্ডীয় 1 শি. 6 পে. পাইলে 10% ক্ষতি হয়, তবে বিনিময়ের সমতা কত ?

∵ 10% ক্ষতি হয়

∴ 90 পে. যখন পাই তখন প্রকৃত মূল্য 100 পে.

∴ 1 পে. যখন পাই তখন প্রকৃত মূল্য $\frac{100}{90}$ পে.

∴ 18 পে. যখন পাই তখন প্রকৃত মূল্য $= \frac{100}{90} \times 18$ পে. $= 20$ পে. $= 1$ শি. 8 পে.

∴ 1 টাকা = 1 শি 8 পে.

*3. মাদ্রাজের এক ব্যবসায়ী লণ্ডনের এক ব্যবসায়ীর নিকট 398 পা. 5 শি. 9 পে. পাঠাইতে গিয়া দেখিল যে সে যদি সোজা লণ্ডনে টাকা না পাঠাইয়া প্যারিসের ব্যাঙ্ক মাধ্যমে টাকা পাঠায় তবে তাহার 58 টাকা 50 পয়সা বাঁচে. মাদ্রাজ ও প্যারিসের মধ্যে বিনিময়ের হার টাকায় 1·71 ফ্রাঙ্ক এবং প্যারিস ও লণ্ডনের মধ্যে বিনিময়ের হার পাউণ্ডে 25·2 ফ্রাঙ্ক হইলে, লণ্ডন ও মাদ্রাজের মধ্যে বিনিময়ের হার কত ? [M. U. 1926]

398 পা. 5 শি. 9 পে. $= 398\frac{23}{80}$ পা. $= \frac{31863}{80}$ পা.

এখন শৃঙ্খল নিয়মানুসারে—

1 পা. $= \frac{252}{10}$ ফ্রাঙ্ক

$\frac{171}{100}$ ফ্রাঙ্ক $= 1$ টাকা

নির্ণেয় টাকা $= \frac{31863}{80}$ পা.।

∴ নির্ণেয় টাকা $=\dfrac{31863\times1\times252\times100}{80\times10\times1\times171}=5869$ টা. 50 পয়সা

∴ মাদ্রাজ ও লণ্ডনের বিনিময় হার অনুসারে

$\dfrac{31863}{80}$ পা. $=5869$ টা. 50 প. $+53$ টা. 50 প. $=5928$ টা.।

∴ টাকা $=\dfrac{31863\times20\times12}{80\times5928}$ পে. $=16\frac{1}{8}$ পে. $=1$ শি. $4\frac{1}{8}$ পে.

4. বিনিময়ের হার 1 টাকা $=1$ শি. 6 পে. হইলে, 1 প. 2 শি 6 পে. কত টাকার সমান ?

5. 1 টাকা $=1$ শি. 4 পে হইলে, 225 পাউণ্ড বিলের দাম কত টাকা ?

6. 1 টাকা $=1$ শি. $10\frac{1}{2}$ পে. হইলে, 6750 টাকায় কত পাউণ্ড, শিলিং ইত্যাদি হইবে ?

7. যদি বিনিময়ের সমতা 1 টাকায় 1 শি. 6 পে. হয় এবং ইংলণ্ডের মুদ্রার সহিত ভারতীয় মুদ্রার 20% ডিস্‌কাউন্ট হয়, তবে বিনিময়ের হার কত ?

8. ভারতবর্ষের 1 টাকার বিনিময়ে ইংলণ্ডের 1 শি. 9 পে. পাইলে যদি $16\frac{2}{3}$% লাভ হয়, তবে বিনিময়ের সমতা কত ?

9. যদি 1 টাকার বিনিময়ে 1 শি. 6 পে. পাওয়া যায়, তবে 100000 টাকার বিনিময়ে কত পাউণ্ড ইত্যাদি পাওয়া যাইবে ? [C. U. 1889]

10. যদি 1 টা. $=1$ শি. $6\frac{3}{4}$ পে. হয়, তবে 1 সভ্‌রেন্ কত টাকার সমান ? ঐ হারে 250 সভ্‌রেন্ ক্রয় করিলাম এবং যখন 1 টাকা $=1$ শি. 6 পে. তখন বিক্রয় করিলাম, আমার কত ক্ষতি বা লাভ হইল ? [C U. 1886]

11. লণ্ডনে কোন এজেন্টকে পাঠাইবার জন্য 45900 টাকা একটি ব্যাঙ্কে জমা দিলাম। বিনিময়ের হার 1 টাকা $=1$ শি. 4 পে., লণ্ডনে এজেন্ট যত পাইবে তাহার উপর 2% হারে ব্যাঙ্কে দিতে হইল। লণ্ডনের এজেন্ট কত পাইল ?

[C U. 1904]

12. ইংলণ্ড হইতে প্রেরিত একখানি পুস্তকের জন্য $1\frac{1}{8}$ টাকা ডাকমাশুল সমেত মোট $12\frac{1}{16}$ টাকা আমার খরচ হইল। পুস্তক প্রকাশক মুদ্রিত মূল্যের উপর প্রতি শিলিং-এ 2 পেনি করিয়া বাটা দিয়াছিল। বিনিময়ের হার 1 টাকা $=1$ শি. হইলে, প্রকাশকের মুদ্রিত মূল্য ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় প্রকাশ কর। [C. U. 1906]

*13 বোম্বাই হইতে কোন ব্যবসায়ী লণ্ডনে অপর এক ব্যবসায়ীর নিকট 1000 পাউণ্ড পাঠাইতে গিয়া দেখিলেন যে সোজা লণ্ডনে টাকা না পাঠাইয়া প্যারিসের কোন ব্যাঙ্কের মারফত টাকা পাঠাইলে 200 টাকা বাঁচে। বোম্বাই ও প্যারিসের বিনিময়ের হার 2016 ফ্রাঙ্ক = 617 টাকা ও প্যারিসের বিনিময়ের হার 50·40 ফ্রাঙ্ক = 1 পাউণ্ড। লণ্ডন ও বোম্বাই-এর বিনিময়ের হার কত ?

14. নিউইয়র্কের এক ব্যবসায়ী লণ্ডনে 5000 ডলার মূল্যের মাল কিনিল। 1 ডলার = 4 শি 6 পে. এবং লণ্ডনে বিলের মূল্য $9\frac{1}{2}\%$ অধিহার হইলে, তাহাকে ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় দাম দিতে হইলে কত মূল্যের বিল ক্রয় করিতে হইবে ?

[C. U. 1945]

15. 19 ডলার = 80 মার্ক, 16·1 মার্ক = 100 ফ্রাঙ্ক, 25 ফ্রাঙ্ক = 1 পাউণ্ড, 1 শি. 4 পে = 1 টাকা, কত টাকা 3059 ডলারের সমান ? [P. U. 1916]

16. বোম্বাই এ এক বণিকের বার্লিনের এক বণিকের নিকট 1410 টাকা ঋণ আছে। সে লণ্ডনের ব্যাঙ্কের মারফত উহা পরিশোধ করিল। যদি বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি 4 পে এবং 1 মার্ক = $11\frac{3}{4}$ পেন্স হয়, তবে বার্লিনের বণিক কত পাইল ? [I. I. B]

17. যদি 1 টাকা = 1 শি. $3\frac{7}{8}$ পেন্স হয়, তবে লণ্ডনের কোন ব্যাঙ্কের উপর 1,030 পা 7 শি 6 পে. এর একটি Bank Draft কিনিতে কত খরচ লাগিবে ?

[W. B. S F. 1965]

3

মেট্রিক প্রণালী

Metric System

3·1. মেট্রিক প্রণালীর এককাবলীর সহিত তোমরা পূর্বেই পরিচিত হইয়াছ। এখন মেট্রিক প্রণালীর এককাবলীর বিভিন্ন এককে পরিবর্তন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে। নিম্নে মেট্রিক ও বৃটিশ প্রণালীর পরিমাপের তুলনামূলক তালিকা দেওয়া হইতেছে :—

(a) মেট্রিক একক হইতে বৃটিশ একক

1 সে. মি. = ·3937079 ইঞ্চি
1 মি. = 39·37 ইঞ্চি
= 1·093633 গজ
1 কি. মি. = ·6213824 মাইল
= $\frac{5}{8}$ মাইল
1 ব. মি. = 1·196033 ব. গ.
= 1550 ব. ইঞ্চি
1 হেক্টর = 2·47114 একর

1 ঘ মি. = 1·3080215 ঘ. গ.
1 গ্রাম = 15·4323487 গ্রেণ
1 কি. গ্রা. = 2·20162125 পাউণ্ড
1 মেট্রিক টন = ·984206 টন
1 লিটার = 1·7607734 পাইট

1 কুইন্টাল = 1·97 হন্দর

(b) বৃটিশ একক হইতে মেট্রিক একক

1 ইঞ্চি = 2·5399541 সে. মি
1 গজ = ·9143835 মি.
1 মাইল = 1·60931 কি মি
1 ব. ইঞ্চি = 6·45 ব. সে. মি
1 ব. গ. = ·836097 ব. মি
1 একর = ·40467 হেক্টর
1 ব মাইল = 258·98945 হেক্টর
1 গ্যালন = 4·543457 লিটার।

1 ঘন গজ = ·7645134 ঘ. মি.
1 পাউণ্ড = ·4535926 কি.গ্রা.
1 আউন্স = 28·34954 গ্রাম
1 গ্রেণ = ·0648 গ্রাম
1 আউন্স (ট্রয় = 31·103496 গ্রাম
1 টন = 1·0160475 মেঃ টন

3·2. ফরাসী মুদ্রার একককে ফ্রাঁ (Franc) বলে এবং উহা 100 সাঁতিম (Centimes) এর সমান। বৃটিশ (£) = 87·45 ফ্রাঁ।

প্রশ্নমালা 3

[1—12 অঙ্কগুলি ক্লাসের কাজ এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ]

1. এক ব্যক্তি 4 ঘণ্টায় 17·4 কি. মি পথ যায়; প্রতি সেকেণ্ডে তাহার গতিবেগ কত ?

ঐ ব্যক্তি 4 ঘণ্টা বা $4 \times 60 \times 60$ সেকেণ্ডে 17 4 কি. মি বা 17400 মি. পথ যায়

$$\therefore \quad 1 \text{ সেকেণ্ডে } \frac{\overset{290}{7400}}{4 \times 60 \times 60} = \frac{29}{24} \text{ মি}$$

$= 1·2083$ মি. যায়।

2. একটি চক্রের পরিধি 3 মি. 6 সে. মি, চক্রটি 1000 বার ঘুরিলে কত পথ যাইবে ?

3 1 গ্রাম = 15·43 গ্রেণ হইলে 1 পা (এভ) গ্রামে প্রকাশ কর।

1 পা. (এভ) = 7000 গ্রেণ $= \frac{7000}{15\ 43}$ গ্রাম $= \frac{700000}{1543}$ গ্রাম $= 453·661\cdots$ **গ্রাম।**

4. একটি চাপমান যন্ত্রের উচ্চতা 29 5 ইঞ্চি, ঐ উচ্চতা মি. মি. এ প্রকাশ কর। (1 মি. = 39·37 ইঞ্চি)

5 প্রতি কিলোগ্রাম চিনির মূল্য 4 ফ্রাঁ, যদি 1 পা = 24 ফ্রাঁ. 25 সাঁতিম হয় এবং 1. কি গ্রা. = $2\frac{1}{5}$ পা, (এভ.) হয়, তবে বৃটিশ মুদ্রায় 1 পাউণ্ড চিনির মূল্য কত ?

6. 1 ঘন ইঞ্চি গ্যাসের ওজন ·123 গ্রেণ, 1 লিটার গ্যাসের ওজন = কত গ্রাম ? (1 ঘ. মি. = 35 3 ঘ. ফু., 1 গ্রাম = 15·43 গ্রেণ)

7. যদি 1 গ্যালন = 277·27 ঘন ইঞ্চি, 1 মি. = 39 37 ইঞ্চি এবং 1 কি. গ্রা. = $2\frac{1}{5}$ পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে 1 গ্যালন জলের ওজন কত পাউণ্ড ?

8. 1 ঘন ইঞ্চি জলের ওজন 253 17 গ্রেণ এবং 1 ঘন ইঞ্চি বাতাসের ওজন ·31 গ্রেণ, 1 ঘন ফুট বাতাসের ওজন কত ঘন ইঞ্চি জলের ওজনের সমান হইবে ? (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত উত্তর দিতে হইবে) [C. U 1910]

9. পারদ সমপরিমাণ জলের 13 6 গুণ ভারী, 1 ঘ. ফু. জলের ওজন 62·5 পা. (এভ.) : (1 পাউণ্ড = ·4536 কি. গ্রা.) এবং 1 লিটার = ·035 ঘন ফুট হইলে 1 লিটার পারদের ওজন কত গ্রাম ?

10. 1 লিটার খাঁটি দুগ্ধের ওজন 1·032 কি গ্রা. ; 6 লিটার দুগ্ধ ক্রয় করিয়া দেখিলাম উহার ওজন মাত্র 6·128 কি. গ্রা.। গোয়ালা কত ঘন-সেণ্টিমিটার জল মিশ্রিত করিয়াছিল ? [C. S. 1931]।

11. 1 মিটার $39\frac{3}{8}$ ইঞ্চির সমান হইলে, 1 ঘন ফুটে কত আসন্ন অখণ্ড লিটার আছে নির্ণয় কর। [C. U. 1911]

12. ·04375 কি. গ্রা.+·3775 গ্রা.+·72 মিলি. গ্রা কে 1 পাউণ্ড (এভ.) এর দশমিকে প্রকাশ কর। [1 গ্রাম=15·432 গ্রেণ এবং 1 পা. (এভ.) =7000 গ্রেণ।] [C. U. 1916]

13. প্রতি বর্গ ইঞ্চিতে বায়ুমণ্ডলের চাপ 15 পা (এভ) হইলে, প্রতি বর্গ-সেণ্টিমিটারে বায়ুমণ্ডলের চাপ কত গ্রাম হইবে নির্ণয় কর (1 ইঞ্চি=2 54 সে মি. এবং 1 কি. গ্রা =2·2 পাউণ্ড)। [D. B. 1928]

14. পারদ জলের 13·6 গুণ ভারী , 1 ঘন সে মি. জলের ওজন 1 গ্রাম হইলে 525 ঘন সে. মি. পারদের ওজন কত কিলোগ্রাম ? [C U 1935]

15. কোন দ্রব্যের 1 কি. গ্রা এর মূল্য 23·57 পাউণ্ড হইলে, 47 কি. গ্রা. 8 ডে. গ্রা. 4 গ্রা. দ্রব্যের মূল্য কত হইবে পাউণ্ড, শিলিং এবং পেন্সে নির্ণয় কর। [C S.]

. 16. চীনের মহাপ্রাচীর 2400 কি. মি. দীর্ঘ এবং তলদেশ 7625 মিলি মি. বিস্তৃত। প্রাচীরের তলদেশের ক্ষেত্রফল আসন্ন বর্গফুটে নির্ণয় কর। (1 মি.= 39·37 ইঞ্চি) [P. U. 1920]

*17. তৃতীয় শ্রেণীর রেলের ভাড়া ফ্রান্সে প্রতি কি. মি.-এ ·05 ফ্রাঁ, এবং ইংলণ্ডে প্রতি মাইলে 1 পেনি , 1 গজ=·9144 মি. এবং 1 পাউণ্ড=25·17 ফ্রাঁ. হইলে, উভয় দেশের 100 মাইলের ভাড়ার পার্থক্য কত হইবে আসন্ন ফার্দিং-এ নির্ণয় কর। [C. U. '51]

18. 1 মি.=39 37 ইঞ্চি হইলে 5 মাইল এবং 8 কি. মি-এর পার্থক্য গজে প্রকাশ কর।

19. যদি 1 পাউণ্ড=25 ফ্রাঙ্ক, 5 ফ্রাঙ্ক=4 মার্ক, 3 মার্ক=2 টাকা, 8 টাকা =1 ডলার হয় তবে 100 পাউণ্ডে কত ডলার পাওয়া যাইবে ?

*20. বর্গাকৃতি তলদেশবিশিষ্ট 2·5 মি. উচ্চ একটি খোলা চৌবাচ্চায় 28900 লিটার জল ধরে। প্রতি বর্গ মিটার 5 টাকা হিসাবে চৌবাচ্চার ভিতরের পৃষ্ঠদেশ সীসা দ্বারা মোড়াই করিতে কত খরচ পড়িবে ? [D. B. 1934]

21. 1 গ্যালন জলের ওজন 10 পাউণ্ড, 1 কি. গ্রা. = $2\frac{1}{5}$ পাউণ্ড হইলে ঐ জলের ঘনফল কত ঘন সে. মি. হইবে ? [1 ঘন সে. মি. পরিস্রুত জলের ওজন = 1 গ্রাম।] [C. U. Addl. 1948]

22. 1 ঘ. ফু. জলের ওজন 1,000 আউন্স এবং 1 ইঞ্চি = 2·54 সে. মি. হইলে 1 পাউণ্ডে কত আসন্ন অখণ্ড গ্রাম হইবে ? [C. U. Addl. 1949]

***23.** 8 ডেসিলিটার বাতাসের ওজন 1293 গ্রাম, 1 ঘন ইঞ্চি বাতাসের ওজন কত গ্রেণ ? (ফল আসন্ন চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।)

1 ফুট = 30·4 সে. মি এবং 1 গ্রাম = 15 435 গ্রেণ দেওয়া আছে।

[C. U. Addl. 1950]

***24.** $2\cdot5\dot{6}$ মিটার গভীর একটি ট্যাঙ্কে 300000 লিটার জল ধরে। ঐ ট্যাঙ্কের দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিনগুণ হইলে দৈর্ঘ্য কত ফুট হইবে নির্ণয় কর। (1 লিটার = 39·37 ইঞ্চি) C. U Addl. 1950]

25. যদি 1 গজ = 0 914 মিটার হয় তবে 1 ঘনফুট কত ঘন সেন্টিমিটারের সমান হইবে তাহা দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধরূপে নির্ণয় কর।

[W. B. S F 1965]

26. এক সেন্টিমিটার = ·3937 ইঞ্চি। যে ঘরের দৈর্ঘ্য 21 ফুট এবং প্রস্থ 10 ফুট 8 ইঞ্চি তাহার মেঝের ক্ষেত্রফল বর্গমিটারে প্রকাশ কর।

[W. B. S F. 1965 (Comp.)]

4

চেক্

Cheque

4·1. ব্যাঙ্কের উপর লিখিত বিলকে **চেক্** (Cheque) বলে। যে বিলে কোন ব্যক্তিকে বা ঐ ব্যক্তি দ্বারা নির্দিষ্ট অপর কোন ব্যক্তিকে বা বিলের বাহককে কোন নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ দেওয়ার জন্য কোন ব্যাঙ্কের উপর উহার কোন আমানতকারীর হুকুম বা নির্দেশ থাকে তাহাই হইল চেক্।

কোন ব্যাঙ্কে হিসাব খুলিলে আমানতকারীকে ঐ ব্যাঙ্ক একখানি **চেক্ বই** (Cheque book) দিয়া থাকে। টাকা দিবার সময় ব্যাঙ্ক চেক্‌টি লইয়া প্রদেয় টাকা দিবার পূর্বে ব্যাঙ্ক-আমানতকারীর হিসাব দেখিয়া লয় যে প্রদেয় টাকা দিবার মত টাকা ব্যাঙ্কে জমা আছে কিনা। চেক্ লেখায় যদি কোন ত্রুটি থাকে বা চেক্ লেখকের স্বাক্ষর (Signature) যদি ব্যাঙ্কে রক্ষিত তাহার নমুনা স্বাক্ষরের সহিত না মিলে অথবা চেকে লিখিত টাকা চেক্ লেখকের নামে জমা না থাকে তবে ব্যাঙ্ক সেই চেকের টাকা দেয় না। তখন **চেক্ অসম্মানিত** (Cheque Dishonoured) হওয়া বলে।

4·2. চেকে তিনটি পক্ষ থাকে: (*a*) **চেক্ গ্রাহক** (Drawee), (*b*) **চেক্ লেখক** (Drawer) এবং (*c*) **চেক্ প্রাপক** (Payee).

(*a*) যে ব্যাঙ্কের উপর চেক্ লেখা হয় উহা **চেক্ গ্রাহক**।

(*b*) যে ব্যক্তি ঐ চেক্ লেখে সে **চেক্ লেখক**।

(*c*) যাহার নামে অর্থাৎ যাহাকে টাকা দেওয়ার জন্য চেক্ লেখা হয় সে **চেক্ প্রাপক**।

4·3. চেক্ দুই প্রকার: (*i*) **বাহক চেক্** (Bearer Cheque) এবং (*ii*) **অর্ডার চেক্** (Order Cheque)।

(*i*) যে চেকে কোন পক্ষবিশেষকে বা ঐ চেকের বাহককে টাকা দেওয়ার কথা উল্লেখ থাকে তাহাকে **বাহক চেক্** বলে।

(*ii*) যে চেকে "কোন পক্ষ বিশেষকে অথবা ঐ পক্ষ দ্বারা আদিষ্ট অপর কোন ব্যক্তিকে" টাকা দেওয়ার কথা উল্লেখ থাকে তাহাকে **অর্ডার চেক্** বলে।

চেকের নমুনা

No. G. 14758	Calcutta, 10 6 66
Central Bank of India Ltd Bhowanipore Branch Pay Sri Netai Kumar Ganguly or Bearer Rupees Two Thousand only Rs 2000/-	
S. B A/C 575	Bhairab Ghatak.

উপরের চেকখানি বাহক চেক্। উহা Bhairab Ghatak দ্বারা Central Bank of India Ltd-এর Bhowanipore Branch-এর উপর Netai Kumar Ganguly-র অনুকূলে 10 6. 66 তারিখে লিখিত। Bhairab Ghatak-এর সঞ্চয় হিসাবের (S B. A/c) নম্বর 575 Netai Kumar Ganguly অথবা চেকখানির যে কোন বাহক উক্ত ব্যাঙ্কের Bhowanipore Branch-এ চেক্খানি জমা দিয়া টাকা তুলিতে পারে। যদি Netai Kumar Ganguly টাকা তোলে, তবে তাহার নাম যে ভাবে এবং যে বানানে চেকে লিখিত আছে, ঠিক সেই ভাবে এবং সেই বানানে তাহাকে চেকের পিঠে সই করিয়া টাকা তুলিতে হইবে। যদি ঐ চেকের কোন বাহক ঐ চেকের টাকা তোলে তবে সে যথেচ্ছভাবে তাহার নাম চেকের পিঠে সই করিয়া তুলিতে পারে।

চেক্ বই-এর প্রত্যেক পাতার বা ফর্মের দুইটি অংশ থাকে। একটি অংশ চেক্দাতার (Drawer-এর) নিকট থাকে। উহাকে **Counterfoil** বলে। অপর অংশ চেক্ প্রাপককে (Payee-কে) দেওয়া হয়। উহারই নাম চেক্। সুবিধার জন্য Bhairab Ghatak কোন তারিখে কত নম্বর চেকে কাহার অনুকূলে কত টাকার চেক্ লিখিয়া দিয়াছে এবং চেকের টাকা তুলিবার পর তাহার হিসাবে আর কত টাকা জমা থাকিবে তাহা চেকের Counterfoil-এ লিখিয়া রাখিবে।

চেক্ লেখক যদি নিজেই টাকা তোলেন তবে Pay কথাটির পর অন্য কাহারও নাম না লিখিয়া 'Self' কথাটি লিখিতে হয়।

চেক্ লেখক Bhairab Ghatak চেক্খানির Bearer শব্দটি কাটিয়া Order শব্দটি লিখিয়া দিলে উহা একখানি Order চেক হইবে। ঐ Order চেকের টাকা কেবল Netai Ganguly তুলিতে পারিবে। কিন্তু Netai Ganguly যদি চেকের টাকা অপর কাহাকেও দেওয়ার জন্য নির্দেশ দিয়া পিঠসই Endorse) করে, তবে যাহার অনুকূলে পিঠসই করিবে সেই শুধু টাকা তুলিতে পারিবে। আর যদি

Netai Gangaly কোন নির্দেশ না দিয়া শুধু পিঠসই করে (Endorse in blank), তবে ঐ অর্ডার-চেক্ বাহক-চেকে পরিণত হইবে এবং যে কোন বাহক ঐ চেকের টাকা তুলিতে পারিবে।

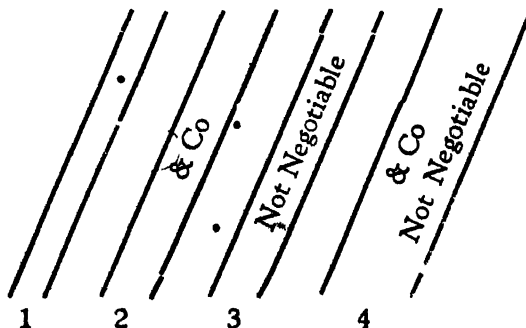
4·4. খোলা চেক্ (Open Cheque)

বাহক চেক্ ও অর্ডার চেকের সাধারণ নাম খোলা চেক্। খোলা চেকের আর একটি নাম **অরেখাঙ্কিত চেক্** (Uncrossed Cheque)। খোলা চেক্ নিরাপদ নহে। খোলা চেক্ যদি হারাইয়া যায় অথবা উহা যদি কোন প্রতারকের হাতে গিয়া পড়ে, তবে অনায়াসে সে চেকের টাকা তুলিয়া লইতে পারে। কোন খোলা চেক্ হারাইয়া যাওয়ার সঙ্গে সঙ্গে যদি চেক প্রেরক Drawer) ঐ চেক্ বাতিল করিয়া এবং ঐ চেকের টাকা দিতে নিষেধ করিয়া তাহার Bank-কে লেখেন, তবে অর্ডার চেকের বেলায় কোন কোন স্থানে প্রতিকার পাওয়া গেলেও, বাহক চেকের বেলায় কোন প্রতিকার আইনতঃ পাওয়া যায় না।

4·5. রেখাঙ্কিত চেক্ (Crossed Cheque)

সাধারণ চেকের উপর বাম কোণে দুইটি সমান্তরাল রেখা টানিলে উহাকে **রেখাঙ্কিত চেক্** বলা হয়। রেখাঙ্কিত চেক্ ব্যাঙ্কের Account মারফত ছাড়া কখনই ভাঙ্গান যায় না। কাজেই কোন রেখাঙ্কিত চেক্ প্রকৃত মালিক ভিন্ন অন্য কাহারও হাতে পড়িলেও সে সহজে উহা ভাঙ্গাইয়া টাকা তুলিতে পারিবে না।

. মনে কর, কোন ব্যাক্ত United Bank of India Ltd-এর উপর তোমার নামে একখানি Crossed Cheque দিয়াছে। তুমি United Bank of India Ltd এ গিয়া ঐ চেক্ জমা দিলেই টাকা পাইবে না। ঐ চেক্ ভাঙ্গাইতে হইলে তোমার যদি কোন ব্যাঙ্কে Account থাকে সেখানে জমা দিতে হইবে। তোমার ব্যাঙ্ক United Bank of India Ltd-এর নিকট ঐ চেক্ ভাঙ্গাইলে তোমার Account-এ টাকা জমা করিবে।.

Crossed Cheque নানা প্রকারের হইতে পারে। নিম্নে নমুনা দেওয়া হইল :—

1 নং ও 2 নং চেকের একই অর্থ। এইভাবে রেখাঙ্কিত চেক্গুলি অন্যের নামে endorse করা যায়।

3 নং ও 4 নং চেকের অর্থ একই। এইভাবে রেখাঙ্কিত চেক্গুলি অন্যের নামে endorse করা যায় না। কাজেই কোন ব্যক্তি চেকখানি পাইয়া অন্যের নামে পিঠসই করিয়া হস্তান্তর করিয়া দিতে পারে না। 'Not Negotiable' কথা দুইটি এই কারণেই লিখিয়া দেওয়া হয়।

উপরিউক্ত চারি প্রকারের চেক্গুলিকে "সাধারণভাবে রেখাঙ্কিত চেক্" (Generally Crossed Cheque) বলা হয়।

কোন Crossed Cheque এর উপর কোন ব্যাঙ্কের নাম উল্লেখ থাকিলে উহা "বিশেষভাবে রেখাঙ্কিত চেক্" (Specially Crossed Cheque)-এ পরিণত হয়।

Specially crossed cheque-এর নমুনা :—

Central Bank of India Ltd & Co
Lloyds Bank of India Ltd. Not Negotiable
State Bank of India A c Payee only
Allahabad Bank Ltd Under Rupees Hundred only

5 6 7 8

উপরের চেক্গুলির টাকা সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে যে ব্যাঙ্কের নাম লেখা আছে সেই ব্যাঙ্কেই পাওয়া যাইবে।

7 নং চেক্টি লক্ষ্য কর। উহাতে A/c Payee only লেখা আছে। এইরূপ লেখা থাকিলে চেকের টাকা শুধু চেকে লিখিত ব্যক্তির হিসাবে জমা দেওয়া চলিবে।

8 নং চেকটি লক্ষ্য কর। উহাতে "Under Rupees Hundred only" কথা কয়টি লেখা আছে। উহা লেখা থাকিলে কোন প্রতারক সহজে চেকে লিখিত টাকার পরিবর্তন করিতে পারে না।

4 A.

হুণ্ডি ও বিল

Drafts and Bills

4A·1. সাধারণতঃ নগদ টাকায় দেনাপাওনা মিটান হয় কিন্তু স্থান বিশেষে বিল বা হুণ্ডি বা ড্রাফট, হ্যাণ্ড নোট (Promissory note) এবং চেক্ দ্বারা দেনাপাওনা মিটান হয়। ইহাদের সাধারণ নাম সম্প্রদেয় পত্র (Négotiable Instrument)। চেকের সম্বন্ধে আমরা পূর্বে আলোচনা করিয়াছি।

4A 2. বিল দুই প্রকার—দেশীয (Inland) এবং বৈদেশিক (Foreign)। যে বিল একই দেশে লিখিত (Drawn) এবং দেয় (Payable) তাহা দেশীয় বিল (Inland Bill) এবং যে বিল এক দেশে লিখিত এবং অপর কোন দেশে দেয় তাহা বৈদেশিক বিল।

4A·3. দেশীয় বিলের নমুনা এবং ব্যাখ্যা :—

Stamp		Calcutta
Rs 100		25. 10 62.
Six months after date pay to me or order one hundred rupees only value being received		
To	accepted.	
Binajak Roy	B Roy	Raj Kumar Khaitan
Calcutta.	25 10. 62.	

অনেক সময় পণ্য ধারে ক্রয় বা বিক্রয় করা হইয়া থাকে। ধারে পণ্যদ্রব্য বিক্রয়ের সময় Creditor, Debtor এর উপর একখানি লিখিত নির্দেশপত্র জারি করেন (নির্দেশপত্রের একটি নমুনা উপরে দেখান হইয়াছে)। এই নির্দেশনামা প্রেরণ্‌ করাকে Drawing of the bill, যিনি নির্দেশনামা প্রেরণ করেন তাঁহাকে

Drawer of the bill (এখানে রাজকুমার খৈতান) এবং যাহার উপর হুকুম জারি করা হয় তাহাকে Drawee (এখানে বিনায়ক রায়) বলা হয়। হুণ্ডি বা বিলের উপর ক্রেতা "Accepted" কথাটি লিখিয়া নাম সহি করিয়া দিলে তিনি নির্দিষ্ট সময় পরে হুণ্ডির উপর উল্লিখিত টাকা নির্দেশিত ব্যক্তিকে দিতে বাধ্য থাকিবেন।

সুতরাং বিল বা হুণ্ডি বলিতে Creditor কর্তৃক Debtor-এর উপর লিখিত নির্দেশপত্র বুঝিতে হইবে। যিনি হুণ্ডির টাকা পাইবেন তাঁহার কাছে ইহা "Bills receivable" বা 'প্রাপ্য হুণ্ডি' এবং যিনি টাকা পরিশোধ করিবেন তাঁহার কাছে ইহা 'Bills payable', বা 'দেয় হুণ্ডি'। প্রাপ্য হুণ্ডি একটি সম্পত্তি এবং দেয় হুণ্ডি একটি দায়।

হুণ্ডির টাকা যেদিন দেয় (এখানে 1963 সালের April মাসের 25 তারিখ) সেদিন হইতে তিন দিন অতিরিক্ত সময় পাওয়া যাইবে। এখানে 1963 সালের April মাসের 24 তারিখে টাকা শোধ করিতে হইবে।

4A·4 বৈদেশিক বিল (Foreign Bill) এর নমুনা ও ব্যাখ্যা :—

Stamp   Calcutta
$ 100   25 10 68.

Six months after sight of this 1st of exchange (2nd and 3rd of the same tenor and date being unpaid) pay to Mr Btown or order, one hundred dollars, value being received

To	Accepted	Prodip Roy
M /s. Brown & Co	Brown	for Roy & Co
Chicago. U. S A.	5 11 68	

বৈদেশিক হুণ্ডিও দেশী হুণ্ডির মতই Creditor কর্তৃক Debtor-এর উপর নির্দেশনামা। তবে এখানে Creditor ও Debtor দুইটি পৃথক দেশে থাকেন বলিয়া সাধারণতঃ তিন প্রস্থ একই হুণ্ডি জারি করা হইয়া থাকে। এই প্রস্থগুলি আলাদা আলাদা ডাকে পাঠান হইয়া থাকে : ইহার উদ্দেশ্য, যদি কোন প্রস্থ পথে খোয়া যায় তবে অপর প্রস্থ দ্বারা কার্যসিদ্ধি হইবে, এতগুলি প্রস্থের মধ্যে এক প্রস্থ

নিশ্চয়ই Debtor পাইয়া থাকিবে। Debtor যে কোন প্রস্থ প্রথম পাইবে তাহাই কার্যকরী হইবে, তখন, অপরগুলি আইনতঃ সিদ্ধ হইবে না।

4A·5. অঙ্গীকার পত্র (Promissory Note) এর নমুনা ও ব্যাখ্যা :—

Stamp	Calcutta
Rs. 1000	25. 10. 66.

Three months after date I promise to pay to Sri Bisweswar Agarwalla or order one thousand rupees, value being received.

Nirmal Ghosh.

অঙ্গীকার-পত্র একটি লিখিত পত্র যাহা দ্বারা Maker বা অঙ্গীকারকারী নির্দিষ্ট সময় অন্তে কোন ব্যক্তিকে বা ঐ ব্যক্তির নির্দেশিত অপর কাহাকেও বিনাসর্তে উল্লিখিত টাকা দিতে অঙ্গীকার করিয়া থাকে।

4A·6. ব্যাঙ্ক ড্রাফট্ (Bank Draft) এর নমুনা ও ব্যাখ্যা :

£ 100	Calcutta
	25 10. 66.

Pay to Mr John Brown or order one hundred pound.

To	General Manager
London Branch,	Calcutta Bank Ltd
Calcutta Bank Ltd	

ব্যাঙ্ক ড্রাফট্ এমন একটি আদেশনামা যাহা কোন ব্যাঙ্ক উহার শাখা ব্যাঙ্কের উপর বা অপর কোন ব্যাঙ্কের উপর জারি করিয়া থাকে। যাহার উপর উহা জারি করা হইয়া থাকে তিনি ইহাতে উল্লিখিত ব্যক্তিকে উল্লিখিত অর্থ দিতে বাধ্য থাকিবেন।

1

বিবিধ প্রশ্নমালা

প্রশ্নপত্র 1

সময়—30 মিনিট

1. একটি বালক ভুলক্রমে 2928×978 এর পরিবর্তে 2978×978 এর গুণ করিল। ইহাতে তাহার উত্তর কত বেশী হইল ?

2. ক্ষুদ্রতম কোন্ সংখ্যার উৎপাদক 135, 126, 432 এবং 255 ?

***3.** 3·05425 পা., 2 পা. 5 শি. এর $12\cdot\dot{1}\dot{2}$ এবং এক গিনির $7\cdot\dot{2}8571\dot{4}$ যোগ কর।

4. সরল কর :

$$\left\{2\tfrac{3}{4} + \tfrac{5}{2} \text{ এর } \frac{7}{3\frac{4}{5}} - \frac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}\right\} \div 1\frac{77}{228}.$$

5. প্রমাণ কর :

$$95785^2 - 94340^2 = 16575^2.$$

প্রশ্নপত্র 2

সময়—35 মিনিট

1. এক ব্যক্তি 1924 খৃষ্টাব্দে 343 পা. 2 শি. 6 পে. বেতন পাইল। সেই বৎসর তাঁহার দৈনিক আয় কত ছিল ?

2. 2 কি. মি. 33 ডেকা. মি. 91 ডেসি. মি· পথ যাইতে যে চাকা 1130 বার আবর্তন করে, তাহার পরিধি কত ?

3. এক ব্যক্তি মোট ভ্রমণ পথের $\frac{3}{7}$ নৌকায়, $\frac{2}{5}$ রেলগাড়ীতে ও 12 মাইল হাঁটিয়া গেল। সে কত মাইল ভ্রমণ করিল ?

4. এক টনের মূল্য 1 পা. 3 শি. 4 পে. হইলে 3 টন 3 হং. 3 কো. 14 পা. এর মূল্য কত ?

5. কোন বৈজ্ঞানিক গবেষণায় নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলি পাওয়া গেল :—

2·0204, 2·0209, 2·0192, 2·0184, 2·0180, 2·0197, 2·0199.

সংখ্যাগুলির গড় কত ?

6. $\frac{1000\cdot60009}{10^3}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

প্রশ্নপত্র 3

সময়—30 মিনিট

1. প্রত্যেকটি জিনিসের মূল্য 2 পা 15 শি. $10\frac{1}{4}$ পে. হইলে 1286টি দ্রব্যের মূল্য কত ?

2. কোনও একটি পরীক্ষায় পাশ করিতে কমপক্ষে 35% নম্বর পাইতে হয়। একটি বালক 48 নম্বর পাইয়া শুনিল যে যদি আর 2 নম্বর কম পাইত তাহা হইলেই ফেল করিত। পাশের নম্বরের নিম্নতম সংখ্যা একটি পূর্ণ সংখ্যা হইলে ঐ পরীক্ষায় পুরা নম্বর কত ?

3. বার্ষিক (সরল) সুদের হার 2% হইতে $2\frac{1}{2}$% হওয়ায় এক ব্যক্তির ব্যাঙ্কে স্থায়ীভাবে গচ্ছিত টাকার মোট বার্ষিক সুদ টা 42·50 বাড়িয়া গেল। তাহার গচ্ছিত টাকার পরিমাণ কত ?

4. এক ব্যক্তি একটি একশত টাকার নোট ভাঙ্গাইয়া দুই টাকা ও পাঁচ টাকার মোট 38টি নোট পাইল। সে পাঁচ টাকার নোট কয়টি পাইল ?

5. সুদে আসলে 5 বৎসরে যদি 2200 টাকা হয় এবং সুদের পরিমাণ আসলের $\frac{3}{8}$ হয়, তাহা হইলে আসল কত এবং বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত ?

প্রশ্নপত্র 4

সময়—40 মিনিট

1. সরল কর :

$$15-\cfrac{2}{4-\cfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}+\frac{(\frac{3}{5}-\frac{1}{6})\div\frac{1}{30}}{3\frac{1}{4}\times 1\frac{1}{2}\div 7\frac{1}{4}\text{ এর } 4\frac{1}{2}}$$

2. কোন সপ্তাহে গড়ে দৈনিক 0·25 ইঞ্চি বৃষ্টি হইয়াছিল। প্রথম 6 দিনে ইঞ্চির হিসাবে বৃষ্টিপাত এইরূপ :—রবিবার কিছুই না, সোমবার 0·40, মঙ্গল 0·02, বুধ 0·45, বৃহস্পতি 0·28, শুক্র 0·58, শনিবারে বৃষ্টিপাত কত ছিল ?

3. এক মুদি 15 পাউণ্ড চীনা চা, 20 পাউণ্ড সিংহলী চা এবং 25 পা. ভারতীয় চা কিনিয়া বেশ করিয়া একত্রে মিশ্রিত করিল। ঐ মিশ্রিত চা-এর 24 পাউণ্ডের মধ্যে বিভিন্ন প্রকারের চা কয় পাউণ্ড করিয়া মিশ্রিত আছে ?

4. এক ব্যক্তি 5500 টাকায় একটি মোটর গাড়ী কিনিয়া তখনই 1500 টাকা দিল। বাকী টাকা 5% বাড়াইয়া 12টি সমান মাসিক কিস্তিতে পরিশোধ করিতে হইলে, এক একটি মাসিক কিস্তির পরিমাণ কত হইবে ?

5. শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত হইলে $2\frac{1}{2}$ বৎসরে 956 টাকা সুদে আসলে টা. 1075·50 হইবে ?

6. 2 টা ও 3 টার মধ্যে কখন ঘড়ির কাঁটা দুইটি একত্র সমান হইবে ?

প্রশ্নপত্র 5

সময়—35 মিনিট

1. এক ব্যক্তি টাকায় 10টি দরে 100টি ডিম কিনিল। 10টি ডিম ভাঙিয়া গেল। সে বাকী ডিমগুলি টাকায় 8টি দরে বিক্রয় করিল। তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল বাহির কর।

2. যদি সমুদ্রজল বিশুদ্ধ জলের 1.027 গুণ ভারী হয়, এবং এক ঘনফুট বিশুদ্ধ জলের ওজন 62·43 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে এক ঘনফুট সমুদ্র জলের ওজন কত হইবে ?

3. 5% হার সুদে 3 বৎসরে 2000 টাকায় চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর কত হয় ?

4. রৌপ্য ও নিকেলের মিশ্র ধাতুর 40% রৌপ্য এবং 60% নিকেল আছে। এইরূপ 120 পাউণ্ড মিশ্রধাতুতে কতটা রৌপ্য আরও মিশাইলে রৌপ্যের পরিমাণ 46% হইবে ?

5. একটা ঘরের দৈর্ঘ্য 16 ফুট, প্রস্থ 12 ফুট, উচ্চতা 10 ফুট। যদি চুণকাম করিতে প্রতি 100 বর্গ ফুটের জন্য টা. 2·25 লাগে তাহা হইলে ইহার ভিতরের চারি দেওয়াল চুণকাম করার খরচ কত ? ঘরের দুইটি দরজা প্রত্যেকটি উচ্চতায় 6 ফুট এবং প্রস্থে 4 ফুট এবং ছয়টি জানালা প্রত্যেকটি উচ্চতায় 5 ফুট এবং প্রস্থে 3 ফুট—এই দরজা জানালাগুলি চুণকাম হইবে না।

প্রশ্নপত্র 6

সময়—30 মিনিট

1. 18 ফুট দীর্ঘ একটি ঘরের মেঝেতে কার্পেট বিছাইবার খরচ 72 টাকা। যদি ঘরের বিস্তার 4 ফুট কম হয় তাহা হইলে 54 টাকা খরচ পড়ে। ঘরের বিস্তার কত ?

2. 40 জন লোক কোন কার্য নির্দিষ্ট দিনে করিতে পারে। যদি ঐ কার্য সম্পাদন করিতে 30 জন লোক নিযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে আরও 6 দিন অধিক

সময়ে ঐ কার্য সম্পন্ন হয়। 60 জন লোক নিযুক্ত হইলে ঐ কার্য কতদিনে সম্পন্ন হইবে ?

3. A, B কে কিছু টাকা ধার দেয়। A, C কে ঐ টাকা অপেক্ষা আরও 800 টাকা অধিক ধার দেয়। B শতকরা 5 টাকা এবং C শতকরা 7 টাকা সুদ দিতে রাজী হয়। উভয়েই 5 বৎসর পরে তাহাদের ঋণ সুদ সমেত পরিশোধ করে। যদি C এর সবৃদ্ধিমূল B এর সবৃদ্ধিমূল অপেক্ষা 1240 টাকা অধিক হয়, তাহা হইলে উহাদের ঋণ কাহার কত ?

4. এক ব্যক্তি 9টি ঘোড়া এবং 8টি গরু 93 পা. 10 শি. এ ক্রয় করিয়াছিল। যদি একটি ঘোড়ার মূল্য 4টি গরুর মূল্যের সমান হয়, তাহা হইলে একটি ঘোড়ার মূল্য কত ?

5. সরল কর :—

$$\frac{3\frac{1}{4} \div 2\frac{1}{4} \text{ এর } 1\frac{1}{3}}{4{\cdot}25 - 3{\cdot}5 + 1{\cdot}3} + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}$$

প্রশ্নপত্র 7

সময়—35 মিনিট

1. শতকরা বার্ষিক 4 পাউণ্ড হার সুদে কত মূলধনের 2 বৎসরের সমূল চক্রবৃদ্ধি 811 পা 5 শিলিং হইবে ?

2 A যতক্ষণে 8 গজ দৌড়াইতে পারে, B ততক্ষণে 9 গজ দৌড়াইতে পারে। উভয়ে একত্র দৌড়াইতে আরম্ভ করিয়া যখন B 252 গজ দৌড়াইয়াছে, তখন A তাহার কত পশ্চাতে থাকিবে ?

3. একটি ঘর 20 মিটার দীর্ঘ এবং 10 মিটার প্রশস্ত। এক মিটার যদি 39 37 ইঞ্চির সমান হয় তবে ঘরটির ক্ষেত্রফল কত বর্গগজ হইবে ?

4 চাউলের দর যখন টাকায় 8 সের তখন অন্যান্য খরচ সহ এক পরিবারের মাসিক 40 টাকা খরচ হয়। আর চাউলের দর যখন টাকায় 10 সের তখন ঐ পরিবারের মাসিক 37 টাকা খরচ হয়। টাকায় 12 সের চাউল পাওয়া গেলে ঐ পরিবারের মাসিক খরচ কত হইবে ?

5 36 দিনের জন্য এক মজুর এই চুক্তিতে নিযুক্ত হইল যে, সে যে দিন কাজ করিবে সেই দিন 2 শি. 6 পে পাইবে এবং যে দিন কাজে অনুপস্থিত থাকিবে সে 1 শি. 6 পে. জরিমানা দিবে। 36 দিন পরে সে 2 পা. 18 শি. পাইল, সে কয়দিন কাজ করিয়াছিল ?

প্রশ্নপত্র 8

সময়—40 মিনিট।

1. 20 ফুট দীর্ঘ ও 15 ফুট বিস্তৃত একটি চৌবাচ্চায় 2400 ঘনফুট জল আছে; জলের গভীরতা কত?

2. এক ব্যক্তিকে তাহার মোট আয়ের $\frac{3}{4}$ অংশের উপর প্রতি টাকায় 8 পয়সা আয়কর দিতে হয়। মোট আয়ের প্রতি টাকায় তাহাকে কত আয়কর দিতে হয়?

3. চিনির মূল্য শতকরা 20 টাকা বৃদ্ধি পাওয়ায় এক ব্যক্তি চিনির ব্যবহার এইভাবে কমাইলেন যে তাহাতে তাঁহার সাংসারিক ব্যয় পূর্ববৎ রহিল। চিনির পরিমাণ তিনি শতকরা কত কমাইলেন?

4. এক বালক প্রতি 2 মিনিটে 3 লিটার এবং একটি বালিকা প্রতি 3 মিনিটে 2 লিটার জল আনিয়া একটি জালায় ঢালিতে লাগিল। যদি জালাটিতে 30 লিটার জল ধরে, তবে ঐ জালা পূর্ণ করিতে তাহাদের কত সময় লাগিবে?

5. 90 গ্যালন জলমিশ্রিত মদে, মদ ও জলের অনুপাত 7 : 2; উহাতে আর কত গ্যালন জল মিশাইলে মদ ও জলের অনুপাত 5 : 3 হইবে?

প্রশ্নপত্র 9

সময়—30 মিনিট

1. অপরাহ্ণ 4টা ও 5টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন সমকোণে থাকিবে?

2. টাকায় 10 কি. গ্রা. চাউল পাওয়া গেলে যে খরচে 9 জন লোকের 30 দিন চলে, টাকায় 14 কি. গ্রা. চাউল পাওয়া গেলে সেই খরচে 6 জন লোকের কত দিন চলিবে?

3. যে কাজ 5 জন পুরুষ ও 2 জন বালক একত্রে 2 দিনে করিতে পারে, সেই কাজ 2 জন পুরুষ ও 4 জন বালক একত্রে 3 দিনে করিতে পারে। 1 জন পুরুষ ও 1 জন বালকের কাজের তুলনা কর।

4. 500 টাকা মূলধন লইয়া A এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। $2\frac{1}{2}$ মাস পরে B 400 টাকা মূলধন লইয়া A এর সহিত যোগ দিল। ব্যবসায় আরম্ভ করিবার 8 মাস পরে 372 টাকা লাভ হইল। লাভের টাকা কে কত পাইবে?

5. 6 ঘন ইঞ্চি একটি রৌপ্য মিশ্রিত স্বর্ণের তালের ওজন 100 আউন্স। যদি এক ঘন ইঞ্চি স্বর্ণের ওজন 20 আউন্স এবং এক ঘন ইঞ্চি রৌপ্যের ওজন 12 আউন্স হয়, তবে ঐ তালে কত ওজনের স্বর্ণ আছে?

প্রশ্নপত্র 10

সময়—35 মিনিট

1. যদি 450 টাকা 4 বৎসরে সুদেমূলে 540 টাকা হয়, তবে কত টাকা 5 বৎসরে সুদেমূলে 637 টাকা 50 পয়সা হইবে ?

2. একটি পুষ্করিণীর দৈর্ঘ্য তাহার প্রস্থের তিনগুণ এবং তাহার গভীরতা 256 মিটার। যদি পুষ্করিণীতে 300 লিটার জল ধরে, পুষ্করিণীর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

3. রান্নাঘরে একটি ঘড়ি আছে। যখন উনান জ্বলে তখন ঘড়িটি ঘণ্টায় 6·5 সেকেণ্ড স্লো যায় এবং যখন নিভান থাকে তখন ঘড়িটি ঘণ্টায় 3·9 সেকেণ্ড ফাষ্ট যায়। কিন্তু যদি সারাদিনে ঘড়িটি ঠিকই যায়, তবে 24 ঘণ্টার মধ্যে কতক্ষণ উনান জ্বালান থাকে ?

4. কোন ক্রিকেট খেলায় একজন কন্ট্রাকটর 24 জনের খাদ্য সংগ্রহের চুক্তি করে এবং মূলধনের উপর শতকরা $12\frac{1}{2}$ টাকা হিসাবে লাভ করিতে পারিবে এইরূপ ধরিয়াই মূল্য নির্ধারন করিয়া লয়। কিন্তু শেষকালে তিনজন অনুপস্থিত থাকায় বাকি 21 জনে নির্দিষ্ট মূল্য দিলেও তাহার 2 টাকা লোকসান হইল। নির্ধারিত মূল্য কত ছিল ?

5. এক ব্যক্তি 550 গজ দূরবর্তী চাঁদমারি লক্ষ্য করিয়া গুলি করার 4 সেকেণ্ড পরে গুলি লাগার শব্দ শুনিল। ঐ ব্যক্তি ও চাঁদমারি হইতে সমদূরবর্তী কোন লোক গুলি করার শব্দ শুনিবার $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড পরে গুলি লাগার শব্দ শুনিল। শব্দের বেগ নির্ণয় কর।

রাশিবিজ্ঞান

(Statistics)

(Unit No. 2)

1A

সূচনা

(Introduction)

1·1. Statistic শব্দের উদ্ভব একটি ল্যাটিন শব্দ Status হইতে। Status-এর অর্থ State বা রাষ্ট্র। অষ্টাদশ শতাব্দীর শেষভাগে জার্মানীতে বিভিন্ন State বা রাষ্ট্রের শক্তি সামর্থ্য বিচার করিবার জন্য সম্পূর্ণ রাষ্ট্রীয় প্রয়োজনে রাশিবিজ্ঞান বা পরিসংখ্যানের প্রচলন হয়। পরে গণিতের সাহায্যে উহাকে বিজ্ঞান-সম্মত করা হয় এবং উহার ব্যবহার ও অর্থ আরও ব্যাপক হইয়া উঠে।

1·2. রাশিবিজ্ঞান ও পরিসংখ্যান-এর মধ্যে পার্থক্য ঃ

রাশিবিজ্ঞান ও পরিসংখ্যান এই উভয় শব্দের ইংরাজী Statistics হইলেও ইহারা এক নহে। তুলনামূলক ভাবে সজ্জিত কতকগুলি রাশিতথ্য হইল পরিসংখ্যান, আর সেই পরিসংখ্যানের রাশিতথ্যগুলির বিশ্লেষণ ও তাৎপর্য নির্ণয় হইল রাশিবিজ্ঞান, রাশিবিজ্ঞানের আর একটি নাম গড় বিজ্ঞান (Science of averages) ; কেন না উহার সাহায্যে পরিসংখ্যানের সংক্ষিপ্তসার বাহির করা হয়।

1·3. বর্তমান পরিসংখ্যানের চাহিদা খুব বেশী। ফুটবল বা হকি লীগের ফলাফল, ক্রিকেটের বোলিং ও ব্যাটিং এর গড, তাপ, বৃষ্টি, ফলন প্রভৃতির ভৌগোলিক চিত্র, আদম শুমারী অর্থাৎ দেশের লোকসংখ্যা, বৈজ্ঞানিক পরীক্ষাগারে কয়েকটি ফলের গড়, ছাত্রদের শ্রেণীতে গ্রেডিং ইত্যাদি সব কিছু কাজেই পরিসংখ্যানের ব্যবহার। পরিসংখ্যান বলিতে বুঝায় (a) সংখ্যাত্মক উপাত্ত-সংগ্রহ (Collection of data), (b) উহাদের সাজাইয়া বিশিষ্টরূপে প্রকাশ (Presentation), (c) উহাদের বিশ্লেষণ (Analysis), (d) উহাদের ব্যাখ্যা (Interpretation)।

(a) উপাত্ত সংগ্রহ (Collection of data) : (1) ব্যক্তিগত পর্যবেক্ষণ দ্বারা, (2) বিভিন্ন ব্যক্তি, কোন কারখানা বা কোন প্রতিষ্ঠানের নিকট প্রশ্নাবলী পাঠাইয়া

অথবা (3) সরকারী ও বেসরকারী রিপোর্ট, পত্রিকা ও সংবাদপত্রসমূহ হইতে সংখ্যাত্মক উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়। উপাত্তসমূহের সত্যতা ও বিশুদ্ধতা বিশেষভাবে পরীক্ষা করিয়া লইতে হয়।

(b) বিশিষ্টরূপে প্রকাশ (Presentation):

সংগৃহীত উপাত্তসমূহ বেশ গুছাইয়া উপযুক্ত তালিকা বা লৈখিক চিত্র দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

(c) বিশ্লেষণ (Analysis):

উপাত্তসমূহের তালিকা বা লৈখিক চিত্র হইতে প্রয়োজন মত বিশ্লেষণ করা হয়। একই উপাত্ত বিভিন্ন বিশ্লেষণের জন্য বিভিন্ন প্রকারে প্রকাশ করা যায়।

(d) ব্যাখ্যা (Interpretation):

বিশ্লেষণ করিয়া কি সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় এই অংশে তাহা বর্ণিত হয়।

দ্রষ্টব্য: উপাত্ত সংগ্রহ ও প্রকাশ পরিসংখ্যানের **ব্যবহারিক দিক** (Practical side) এবং বিশ্লেষণ ও ব্যাখ্যা পরিসংখ্যানের **তাত্ত্বিক দিক** (Theoretical side) বলা চলে।

1·4. ব্যষ্টি (Individual), সমষ্টি (Aggregate) ও লক্ষণ (Character):

মনে কর, 20,000 বালকের উচ্চতার হিসাব লইতে হইবে। এখন 20,000 বালকের প্রত্যেকের উচ্চতা লওয়া সময়সাপেক্ষ। সেইজন্য এলোপাতাড়িভাবে 100 জন বালকের উচ্চতা লইয়া দেখা গেল তাহাদের উচ্চতা 4 ফুট 6 ইঞ্চি হইতে 5 ফুট 6 ইঞ্চির মধ্যে। এখন যদি কেহ প্রশ্ন করেন যে (i) সর্বাধিক উচ্চতার ছাত্র সংখ্যা কত, (ii) কতগুলি ছাত্রের উচ্চতা সর্বাপেক্ষা কম, (iii) বিভিন্ন উচ্চতার ছাত্র সংখ্যা কত, তবে ঐ সংগৃহীত উচ্চতাগুলি দেখিয়া উত্তর করা অর্থাৎ 100 ছাত্রের উচ্চতা সম্বন্ধে কোন ধারণা করা যায় না। ঐ প্রশ্নগুলির উত্তর দিতে হইলে আমাদিগকে ঐ সংগৃহীত উচ্চতাগুলিকে মানের ঊর্ধ্ব অথবা অধঃ ক্রমিক—ছকে বিন্যস্ত করিতে হইবে।

এখানে 100 জন বালকের প্রত্যেকে হইল ব্যষ্টি, 20,000 জন বালক হইল সমষ্টি এবং উচ্চতা হইল লক্ষণ (Character)।

1·5. পরিসংখ্যান উপাত্তসমূহ চারিটি ভাগে বিভক্ত:

(a) গুণশীল (Qualitative), (b) পরিমাণশীল (Quantitative), (c) কালক্রমশীল (Chronological) ও (d) ভৌগোলিক (Geographical)।

(a) যদি গুণদ্বারা পার্থক্য বুঝান হয় তাহা হইলে সেই উপাত্তসমূহকে **গুণশীল উপাত্ত** বলে। যেমন: চালাক ও বোকা : পণ্ডিত ও মূর্খ।

(b) কোন বিষয়ে বিভিন্ন দফাকে কোন একটি মাপের সাহায্যে বিভিন্ন সংখ্যা দ্বারা প্রকাশ করা হইলে, সেই সমস্ত উপাত্তকে **পরিমাণশীল উপাত্ত** বলে। যেমন: বিদ্যালয়ে কোন একশ্রেণীর বিভিন্ন ছাত্রের ওজন দিয়া পরস্পরের মধ্যে পার্থক্য নির্দেশ করা যায়। ইহা পরিমাণশীল উপাত্তের উদাহরণ।

(c) সময়ের সঙ্গে কোন বিষয়ের বিভিন্ন দশার পরিবর্তন হইলে, উহাকে **কালক্রমশীল উপাত্ত** বলে। যেমন: কোন ব্যবসায়ের বৎসরে বিভিন্ন মাসের আয় ব্যয় ইত্যাদি **কালক্রমশীল** উপাত্তের উদাহরণ।

(d) ভৌগোলিক অবস্থানের জন্য বিভিন্ন স্থানের যে সকল পার্থক্য হয় তাহাদিগকে **ভৌগোলিক উপাত্ত** বলে। যেমন: ভারতীয় যুক্তরাষ্ট্রের বিভিন্ন রাজ্যের জনসংখ্যা, বৃষ্টি, উৎপাদন ইত্যাদি উপাত্তসমূহ ভৌগোলিক।

1·6. পরিবর্তনশীল মানকে **চল** (Variable) বলে :

যে রাশির মান চল (Variable) অর্থাৎ পরিবর্তিত হইতে পারে তাহাকে **চলক** (Variate) বলে। যেমন: ওজন, উচ্চতা, বয়স ইত্যাদি একটি চলক।

1·7 চলক দুই প্রকার: (1) **অবিচ্ছিন্ন** বা পরিমাণগত চলক, (**Continuous**), ও (2) **বিচ্ছিন্ন** বা সংখ্যাগত চলক (**Discontinuous**)।

(1) যে চলকের নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে উহার যে কোন মান হইতে পারে তাহাকে **অবিচ্ছিন্ন চলক** বলে। যেমন: উচ্চতা, কোন পরীক্ষার কোন বিষয়ের নম্বর। একটি বালকের উচ্চতা 5 ফুট বলিলে বুঝিতে হইবে যে নিখুঁতভাবে মাপিলে উহার উচ্চতা 4·5 ফুট হইতে 5·5 ফুটের মধ্যে যে কোন মান হইতে পারে। আবার একটি বালক অঙ্কে 47 পাইয়াছে বলিলে 46·5 হইতে 47 5 এর মধ্যে যে কোন মান এই বালকের নম্বর হইতে পারে।

(2) যে চলকের মানের সংখ্যা পূর্ণসংখ্যা ছাড়া মাঝের কোন মিশ্র সংখ্যা হইতে পারে না তাহাকে **বিচ্ছিন্ন চলক** বলে: যেমন: কোন বাড়ীতে ঘরের সংখ্যা, কোন ফুলের পাপড়ির সংখ্যা ইত্যাদি।

1·8. পরিসংখ্যানের প্রয়োজনীয়তা :

(a) তথ্যসমূহের পরিসংখ্যান তথ্যসমূহকে সহজবোধ্য করে। যেমন: কোন শহরের পাঁচলক্ষ লোকের আদমশুমারীর কাগজ হইতে কত লোক শিক্ষিত, কত

লোক অশিক্ষিত. কত লোক চাকুরী করে, কত লোক ব্যবসায় করে ইত্যাদি স্থির করা কষ্টসাধ্য ; কিন্তু ঐ সকল বিষয়ের পরিসংখ্যান হইতে বিষয়গুলি সহজসাধ্য হয়।

(b) পরিসংখ্যানের তথ্যসমূহ সহজে মনে রাখা যায় এবং উহারা আমাদের জ্ঞানের পরিধি বিস্তৃত করে। যেমন : প্রদর্শন সমূহের প্রদত্ত জন্মমৃত্যুর হার, বিভিন্ন রোগ হইতে মৃত্যুর হার, মাথাপিছু আয়-ব্যয় ইত্যাদি হইতে ঐ সকল বিষয়ে অনেক মূল্যবান তথ্য আমরা জানিতে পারি।

(c) পরিসংখ্যানের দ্বারা আমরা নানা বিষয়ের কার্যকরণ সম্বন্ধ স্থির করিতে পারি। যেমন : দ্রব্যমূল্য স্থির রাখিবার জন্য কতটা সরবরাহের প্রয়োজন, কোন্ ফসলের জন্য কতটা বৃষ্টিপাতের প্রয়োজন ইত্যাদি তথ্য পরিসংখ্যানের সাহায্যে সংগ্রহ করিয়া যথোচিত ব্যবস্থা অবলম্বন করিতে পারা যায়।

(d) অতীতের পরিসংখ্যান আলোচনা করিয়া অতীতের ঘটনাবলীর যথাযথ কারণ নির্ধারণ করিয়া ভবিষ্যতের কার্যপদ্ধতি আমরা নিয়ন্ত্রণ করিতে পারি।

(e) পরিসংখ্যানের উপর ভিত্তি করিয়াই আমাদের দেশের সরকার পঞ্চবার্ষিকী পরিকল্পনাসমূহ রচনা করিতেছেন। জনসাধারণের পরমায়ুর পরিসংখ্যান হইতে জীবনবীমা প্রতিষ্ঠানসমূহ প্রিমিয়ামের হার নির্ণয় করিতেছেন। কোন বিদ্যালয়ের কয়েক বৎসরের পরীক্ষার ফলের পরিসংখ্যান হইতে ঐ বিদ্যালয়ের শিক্ষাপদ্ধতি সম্বন্ধে সঠিক ধারণা করা যায়। কোন্ সময়ে কোন্ জিনিসের কিরূপ চাহিদা তাহার পরিসংখ্যান লইয়া ব্যবসায়ক্ষেত্রে উৎপাদনের সময়, রকম ও পরিমাণ নির্ণীত হইতেছে। চিকিৎসাবিদ্যা, নভোবিদ্যা, জীববিদ্যা ইত্যাদি বিজ্ঞানের বিভিন্ন শাখায় পরিসংখ্যানের সাহায্য লইয়া বিভিন্ন সুফল পাওয়া যাইতেছে।

1.9. পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত প্রতীক চিহ্ন (Symbol) :

পরিমাণগত চলককে x দ্বারা, উহার মানের সংখ্যাকে n দ্বারা, n সংখ্যক মানকে x_1, x_2, $x_3 \cdots x_n$ দ্বারা এবং মানগুলির সমষ্টিকে অর্থাৎ $x_1+x_2+x_3+\cdots x_n$ কে Σx (Sigma x) দ্বারা সাধারণতঃ সূচিত করা হয়।

পরিসংখ্যানে ব্যবহৃত আরও কয়েকটি গ্রীসীয় অক্ষর উচ্চারণসহ নিম্নে প্রদত্ত হইল :

α (Alpha)	η (Eta)	σ (Sigma)
β (Beta)	μ (Mu)	π (Pi)
γ (Gamma)	Ω (Nu)	τ (tau)
δ (Delta)	ρ (Rho)	ϕ (Phy)
ζ (Zeta)		χ (Ki)

1B

পরিসংখ্যা তালিকা

Frequency Tables

1·1. ছক্‌বিন্যাস (Tabulation) ঃ

(a) প্রথমে যে সকল তথ্য সংগ্রহ করা হয় সেগুলি সাজান থাকে না। এই অবস্থায় সে সকল তথ্যকে **কাঁচা তথ্য** (**Raw data** অথবা **Unclassified data** অথবা **Ungrouped data**) বলা হয়।

নিম্নের 1·1 তালিকায় কোন বিদ্যালয়ের বাৎসরিক পরীক্ষায় 40 জন পরীক্ষার্থীর গণিতে প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হইয়াছে :

তালিকা 1·1—কাঁচা তথ্য (Raw data)

70	10	50	60	10	48	36	30	25	82
27	12	4	7	9	28	55	65	75	69
39	30	59	52	30	34	37	28	5	8
15	22	32	42	54	65	67	88	30	30

উপরের তালিকা হইতে কোন তথ্য বা খবর পাওয়া যাইতেছে না। কয়জন পরীক্ষার্থী ভাল ফল করিয়াছে, কয়জন পরীক্ষার্থী খারাপ ফল করিয়াছে, কয়জন পরীক্ষার্থী 60 এর উপর নম্বর পাইয়াছে, কত ছাত্র পাশ অথবা ফেল করিয়াছে তাহার উত্তর একনজরে বলা কঠিন। এরূপ অবস্থায় তথ্যগুলিকে **কাঁচা তথ্য** বলা হয়।

(b) অসজ্জিত তথ্যসমূহকে উহাদের মানের ঊর্ধ্বক্রমে (অথবা অধঃক্রমে) সজ্জিত করিলে তাহাদিগকে **পংক্তি (Array) ক্রমে** সজ্জিত তথ্য বলা হয়। 1·2 তালিকায় 1·1 তালিকার তথ্যগুলি উহাদের মাপের ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত করা হইয়াছে।

তালিকা 1·2—পংক্তি (Array)

4	10	19	28	30	34	42	54	65	70
5	10	22	28	30	36	48	55	65	75
7	12	25	30	30	37	50	59	67	82
8	15	27	30	32	39	52	60	69	88

উপরের তালিকা হইতে আমরা সহজে বলিতে পারি সর্বোচ্চ নম্বর 88, সর্বনিম্ন নম্বর 4, 5 জন পরীক্ষার্থী 30 নম্বর পাইয়াছে 80-এর উপর 2 জন পরীক্ষার্থী নম্বর পাইয়াছে ইত্যাদি। কিন্তু যদি জিজ্ঞাসা করা হয় কতজন ছাত্র 30 হইতে 35 এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে, অথবা 40-এর উপর কতজন অথবা 30-এর নীচে কতজন তখন এই সকল প্রশ্নের সহজে উত্তর পাইতে হইলে ঐ তথ্যগুলিকে অনুরূপে সজ্জিত করা হয়।

(c) পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা (Frequency Distribution Table):

1·1 তালিকায় অসজ্জিত তথ্যগুলিকে 1·2 তালিকায় পংক্তিতে সাজান হইয়াছে কিন্তু উহাদিগকে বিভাগ করা হয় নাই। 1·2 তালিকার সাহায্যে আমরা উহাদিগকে বিভাগ করিব।

আলোচ্য তালিকা হইতে দেখা যায় যে নম্বরের মান বা পরিমাণ একটি চলক এবং ঐ মানের সংখ্যা আর একটি চলক। প্রথমটি পরিমাণগত চলক এবং দ্বিতীয়টি সংখ্যাগত চলক। পরিমাণগত চলকের মান বিভাগ করাই প্রচলিত রীতি। এখানে চলকের মান 0 নম্বর হইতে 100 নম্বর পর্যন্ত হইতে পারে এবং মানের সংখ্যা 40; সুতরাং আমরা যদি চলকটির '4-নম্বর' মান হইতে আরম্ভ করিয়া 4—10, 11—17, 18—24, 25—31, 32—38, 39—45, 46—52, 53—59, 60—66, 67—73, 74—80, 81—87, 88—94 এই 13টি বিভাগ করি তাহা হইলে উহাদের মধ্যে সংখ্যাগত চলকের 40টি মানই পড়িবে। তালিকা লক্ষ্য কর।

তালিকা 1·3—পরিসংখ্যা বিভাজন

নম্বরের বিভাগ	পরিসংখ্যা বা ছাত্রসংখ্যা
4—10	6
11—17	2
18—24	2
25—31	9
32—38	4
39—45	2
46—52	3
53—59	3
60—66	3
67—73	3
74—80	1
81—87	1
88—94	1
মোট	40

1·2. তালিকায় দেখা যায় নম্বর মানের 4 – 10 বিভাগের 4,5, 7, ৪, 10, 10 এই ছয়টি মান পড়িয়াছে, সুতরাং এই বিভাগে নম্বর চলকের মানের সংখ্যা 6 আবার 11 – 17 বিভাগে 12 এবং 15 এই দুইটি মান পড়িয়াছে, সুতরাং এই বিভাগে নম্বর চলকের মানের সংখ্যা 2 ; এইরূপে অপর প্রত্যেকটি বিভাগের মানের সংখ্যা নির্ণয় করা হইয়াছে। তৎপর 1·3 তালিকার বামের স্তম্ভে নম্বরের মানের বিভাগগুলি এবং ডাইনের স্তম্ভে নম্বরের মানের সংখ্যাগুলি লিখিয়া তাহার নীচে মানসমূহের মোট সংখ্যা 40 লেখা হইয়াছে।

কোন চলকের মান উহার কোন বিভাগে যতবার পড়ে, তাহার সংখ্যাকে ঐ বিভাগের মানের পরিসংখ্যা (Frequency) অথবা সংক্ষেপে 'f' বলে। এইজন্য 1·3 তালিকায় চলকের মানসমূহের যে বিভাগ হইয়াছে তাহাকে চলকটির মানের পরিসংখ্যা বিভাজন (Frequency Distribution) বলে। লক্ষ্য কর, কোন

বিভাগের পরিসংখ্যা যত, ঐ বিভাগের নম্বর পাওয়ার ছাত্রসংখ্যাও তত এবং মোট পরিসংখ্যা যত, মোট ছাত্রসংখ্যাও তত।

নম্বরগুলি পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত শুদ্ধ বলিয়া 4-এ 3·5 হইতে 4·5-এর ঠিক নীচে পর্যন্ত যে কোন নম্বর বুঝায়। সুতরাং নম্বরগুলির মানের **প্রসার (Range)** আপাত-দৃষ্টিতে 4 হইতে 88 নম্বর হইলেও প্রকৃত প্রসার 3·5 হইতে 88·5-এর ঠিক নীচ পর্যন্ত এবং উহাকে সংক্ষেপে 3·5—88·5 লিখা হয়।

আপাতদৃষ্টিতে $4-10$ বিভাগের **নিম্নসীমা** (Lower Limit) 4 এবং **উচ্চ-সীমা** (Upper Limit) 10: কিন্তু নম্বরগুলি পূর্ণসংখ্যা পর্যন্ত শুদ্ধ বলিয়া প্রকৃত প্রস্তাবে বিভাগটির নিম্নসীমা 3·5 এবং উচ্চসীমা 10·5.

কোন বিভাগের প্রকৃত সীমাদ্বয়ের অন্তরকে বিভাগটির **অন্তর** বা **প্রসার** (Interval) বলে। যেমন, $4-10$ বিভাগটির অন্তর $3·5-10·5=7$; সমান প্রসারের দুইটি ক্রমিক বিভাগের আপাত বা প্রকৃত (নিম্নসীমা) বা (উচ্চসীমার) দুইটির অন্তর লইলে বিভাগদ্বয়ের যে কোনটির প্রসার অতি সহজে পাওয়া যায়। যেমন, $4-10$ এবং $11-17$ বিভাগদ্বয়ের প্রত্যেকটির প্রসার $4-11$ অথবা $10-17=7$.

কোন বিভাগের আপাত বা প্রকৃত সীমাদ্বয়ের **গাণিতিক গড়কে (Arithmetic Mean)** বিভাগটির **মধ্যমান** (Mid-value) বলে। যেমন: $4-10$ বিভাগের আপাত সীমাদ্বয় ধরিলে মধ্যমান $=\frac{1}{2}(4+10)=\frac{1}{2}\times 14=7$ এবং প্রকৃত সীমাদ্বয় ধরিলে মধ্যমান $=\frac{1}{2}\times 14=7$.

(1) বিভাগের সীমা দেওয়া থাকিলে,

অথবা,

বিভাগের মধ্যমান $=$ বিভাগের নিম্নতর সীমা $+\dfrac{\text{উচ্চতর সীমা}-\text{নিম্নতর সীমা}}{2}$

এই সূত্রানুসারে, $4-10$ বিভাগের সীমা (3·5 – 10·5) এবং মধ্যমান

$$=3·5+\frac{10·5-3·5}{2}=3·5+3·5=7$$

(ii) বিভাগের সীমা নিদেশ না করিয়া কেবল মান দেওয়া থাকিলে মধ্যমান $=$ বিভাগের নিম্নতর মান $+\dfrac{\text{উচ্চতর মান}-\text{নিম্নতম মান}}{2}$

এই সূত্রানুসারে, $4-10$ বিভাগের মধ্যমান $=4+\dfrac{10-4}{2}=4+3=7$

দ্রষ্টব্য ঃ (a) পংক্তি ছকের ও পরিসংখ্যা বিভাজন ছকের সুবিধা বা অসুবিধা।

(i) বৃহত্তম বা ক্ষুদ্রতম নম্বর কত দেখিবামাত্র পংক্তি ছক হইতে বলা যায় কিন্তু পরিসংখ্যা বিভাজন ছক হইতে বলা যায় না।

(ii) পংক্তি ছক হইতে ঐ বিভাগের নম্বরগুলি সঠিকভাবে বলা যায় ; কিন্তু পরিসংখ্যা বিভাজনের ছক হইতে ঐ বিভাগের নম্বরের শুধু সীমা বলা চলে।

(iii) পংক্তি ছক হইতে কোন পরিসংখ্যা বিভাজনের বিভাগগুলির প্রসার (Interval) যথেচ্ছভাবে বাড়াইয়া বা কমাইয়া অপর কোন পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করা যায়। কিন্তু কোন পরিসংখ্যা বিভাজন ছক হইতে শুধু উহার বিভাগ প্রসারের দ্বিগুণ, তিনগুণ প্রভৃতি বিভাগ প্রসারবিশিষ্ট পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত করা যায়।

(b) কাঁচা তথ্যের তালিকা হইতে সরাসরি পরিসংখ্যা বিভাজনের তালিকা প্রস্তুত করিবার নিয়ম ঃ

(i) প্রথমে তথ্যগুলির সর্বোচ্চ মান (Upper Limit) হইতে সর্বনিম্ন মানের (Lower Limit) অন্তর কত বাহির করিয়া লইতে হইবে।

(ii) তারপর বিভাগের আয়তন অর্থাৎ বিভাগটি কয় রকম মান দ্বারা গঠিত হইবে তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। সাধারণতঃ 3, 5 অথবা 7 রকম মান দ্বারা এক একটি বিভাগ গঠিত করা হয়।

(iii) বিভাগগুলি নির্ণয় করিবার পর প্রত্যেক বিভাগের পরিসংখ্যা (Frequency বা f) নির্ণয় করিতে হইবে। 'f' নির্ণয় করিতে হইলে একটি স্তম্ভে এক একটি বিভাগের পাশে সেই বিভাগের অন্তর্গত প্রত্যেক তথ্যের পরিবর্তে তথ্য গণনার দাগ (Tallies) দিতে হয়। চারিটি তথ্যের পরিবর্তে এইরূপ | | | | দাগ দিতে হয়, কিন্তু পঞ্চম তথ্যের বেলায় ~~||||~~ এইরূপ দাগ পাঁচটি দাগ বুঝাইবে। প্রতি পঞ্চম দাগের পর একটু ফাঁক রাখিয়া ঐ বিভাগের আরও সংখ্যা থাকিলে পুনরায় দাগ দিতে হয়। প্রত্যেকটি বিভাগের দাগের সংখ্যাই ঐ বিভাগের পরিসংখ্যা। ঐ সংখ্যাগুলি অন্য একটি স্তম্ভে লিখিতে হয়। পরিসংখ্যার সমষ্টিই তথ্যসমূহের সমষ্টি বা N.

(iv) **পরিসংখ্যা বিভাজনের বিভাগ সংখ্যা :**

পরিসংখ্যা বিভাজনের বিভাগগুলির প্রসার বা সংখ্যা কত হইবে সে সম্পর্কে কোন নির্দিষ্ট নিয়ম নাই। সুবিধামত বিভাগ সংখ্যা লইতে হইবে। তবে মনে রাখিতে হইবে যে, বিভাগ সংখ্যা খুব বেশী ধরিলে কোন কোন বিভাগে তথ্যের সংখ্যা খুব কম হইবে, আবার বিভাগ সংখ্যা খুব কম ধরিলে বিভাগগুলির তথ্যের সংখ্যা খুব বেশী হইবে এবং সে ক্ষেত্রে পরিসংখ্যা বিভাজন ছক রাশিতথ্য বিশ্লেষণে সাহায্য করে না। সেইজন্য বিভাগগুলির সংখ্যা যাহাতে অত্যধিক না হয় সেইদিকে লক্ষ্য রাখিয়া প্রতি বিভাগের প্রসার বা আয়তন (Size) নির্ণয় করিতে হয়।

উদাহরণ। কোন বিদ্যালয়ে দশম শ্রেণীর 40 জন ছাত্র কোন পরীক্ষায় যথাক্রমে (বর্ণমালানুক্রমে) যত নম্বর পাইয়াছে তাহার তালিকা নিম্নে দেওয়া হইল। ঐগুলি হইতে একটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত কর। এই ছকে বিভাগ-সীমা ও মধ্যমান নির্দেশ কর।

18	52	21	61	19	72	74	33
20	43	35	34	34	51	52	69
37	39	47	38	39	63	82	71
8	17	18	21	37	42	42	46
91	63	95	42	31	30	36	41

পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা

(Frequency Distribution Table)

আলোচ্য প্রশ্নে উচ্চ সীমা—95

এবং নিম্ন সীমা—8

প্রসার = 88

মনে করি, বিভাগ সংখ্যা = 15

∴ বিভাগের আয়তন $88 \div 15 = 5{\cdot}9$ অর্থাৎ 6 (আসন্ন মান পর্যন্ত)

তথ্যের বিভাগ (Intervals)	তথ্য গণনার দাগ (Tallies)	পরিসংখ্যা f (frequency)	বিভাগ সীমা (Exact Limit)	মধ্যমা (Mid-point)
8—13	|	1	7·5 –13 5	10·5
14—19	| | | |	4	13·5—19·5	16·5
20—25	| | |	3	19·5—25 5	22·5
26—31	| |	2	25·5—31·5	28·5
32—37	卌 | |	7	31·5—37·5	34·5
38—43	卌 | | |	8	37 5– 43·5	40·5
44—49	| |	2	43·5—49·5	46·5
50—55	| | |	3	49·5—55 5	52·5
56—61	|	1	55·5—61·5	58·5
62–67	| |	2	61·5—67·5	64·5
68—73	| | |	3	67·5—73 5	70·5
74—79	|	1	73·5—79·5	76·5
80—85	|	1	79 5—85·5	82·5
86—91	|	1	85·5—91·5	88·5
92—97	|	1	91·5—97·5	94·5

N=40

(c) সঞ্চয়ী পরিসংখ্যা বিভাজন ছক (Cumulative Frequency Table)

কোন বিদ্যালয়ের 100 জন ছাত্রের বয়সের তালিকা প্রস্তুত করিয়া তাহার পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নে প্রদত্ত হইল :

বয়সের বিভাগ	পরিসংখ্যা বা ছাত্রসংখ্যা (Frequency)
5 হইতে 8 বৎসরের নীচে	6
8 হইতে 11 বৎসরের নীচে	24
11 হইতে 14 বৎসরের নীচে	40
14 হইতে 17 বৎসরের নীচে	20
17 হইতে 20 বৎসরের নীচে	10
মোট	= 100

ঐ ছক হইতে দেখা যায়, 8 বৎসরের নীচে বয়সের ছাত্রসংখ্যা = 6 ,

11 বৎসরের নীচে বয়সের ছাত্রসংখ্যা = 6 + 24 = 30 ;

14 বৎসরের নীচে বয়সের ছাত্রসংখ্যা = 6 + 24 + 40 = 70 ,

17 বৎসরের নীচে বয়সের ছাত্রসংখ্যা = 6 + 24 + 40 + 20 = 90 ;

এবং 20 বৎসরের নীচে বয়সের ছাত্রসংখ্যা = 6 + 24 + 40 + 20 + 10 = 100

এইরূপ পর পর যোগ করিয়া পরিসংখ্যা বিভাজনকে **সঞ্চয়ী পরিসংখ্যা বিভাজন** (Cumulative Frequency Table) বলে। নিম্নে সঞ্চয়ী-বিভাজন ছক লক্ষ্য কর :

বয়সের বিভাগ	পরিসংখ্যা বা ছাত্রসংখ্যা
8 বৎসরের নীচে	6
11 " "	6 + 24 = 30
14 " "	30 + 40 = 70
17 " "	70 + 20 = 90
20 " "	90 + 10 = 100

প্রশ্নমালা 1

[1—8 ক্লাসের কাজ এবং বাকী অঙ্কগুলি বাড়ীর কাজ।]

1. রাশিবিজ্ঞান কাহাকে বলে? পরিসংখ্যান ও রাশিবিজ্ঞানের মধ্যে পার্থক্য কি?

2. পরিসংখ্যানের উপাত্তসমূহ কয়ভাগে বিভক্ত এবং কি কি? কি কি উপায়ে উপাত্ত সংগ্রহ করা হয়?

3. চল ও চলক কাহাকে বলে? বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলক-এর মধ্যে পার্থক্য কি?

4. পরিসংখ্যানের প্রয়োজনীয়তা কি?

5. নিম্নলিখিত বিষয়গুলি সম্বন্ধে টীকা লিখ:

ব্যষ্টি, লক্ষণ, কাঁচা তথ্য, পংক্তি, পরিসংখ্যা বিভাজন, সঞ্চয়ী পরিসংখ্যা বিভাজন, পরিসংখ্যা বিভাজনের বিভাগ, বিভাগের প্রসার, বিভাগের সীমা, বিভাগের মধ্যমান।

6. কাঁচা তথ্য হইতে এবং পংক্তিক্রমে সজ্জিত তথ্য হইতে পরিসংখ্যা-বিভাজন ছক কিরূপে প্রস্তুত করা যায়?

7. কোন শ্রেণীর 40 জন ছাত্র (বর্ণমালানুক্রমে) নিম্নলিখিত নম্বর পাইয়াছে:

20	50	70	55	30	40	65	80
44	19	32	58	65	76	47	62
30	34	44	62	75	90	81	12
47	10	17	28	36	42	52	37
38	25	39	41	76	67	69	58

নম্বরগুলিকে ঊর্ধ্বক্রমে সজ্জিত করিয়া একটি পংক্তি ছক প্রস্তুত কর।

8. (a) 7নং প্রশ্নের ছক হইতে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও:

(1) সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ নম্বর কত? (b) নম্বরগুলির প্রসার কত?

(c) 50-এর নীচে কতজন নম্বর পাইয়াছে?

(d) 40 এবং 50-এর মধ্যে কতজন নম্বর পাইয়াছে?

9. 7 নং প্রশ্নের বিভাগ-অন্তর 5 ও 7 ধরিয়া দুইটি পরিসংখ্যা বিভাজন ছক প্রস্তুত কর।

10 9 নং প্রশ্নের সঞ্চয়ী বিভাজন ছক প্রস্তুত কর।

11. নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে বিভাগসীমা ও মধ্যমান নির্ণয় কর।

বিভাগ	বিভাগ সীমা	মধ্যমান	পরিসংখ্যা
20—29			5
30—39			7
40-49			10
50-59			25
60-69			30
70-79			8
80—89			9
90—99			6

12 40টি বালকের ওজনের সাংখ্যমান আসন্ন পূর্ণসংখ্যক পাউণ্ড পর্যন্ত নিম্নে প্রদত্ত হইল :—

40, 42, 41, 43 40, 48, 37, 44,
38, 37, 47, 33, 35, 41, 32, 39,
49, 40, 37, 36, 36, 45, 39, 34,
48, 30, 42, 35, 33, 39, 42, 32,
50, 47, 44, 42, 35, 38, 39, 44.

(a) উহাদের মানের ঊর্ধ্বক্রমে পংক্তিতে সাজাও।

(b) 3-পাউণ্ড ও 5-পাউণ্ড বিভাগ প্রসার লইয়া প্রশ্ন 12-এর রাশিগুলির পরিসংখ্যা বিভাজন দুইটি প্রস্তুত কর।

2

গড়—মধ্যক, মধ্যমা ও ভুযিষ্ঠক

Averages—Mean, Median & Mode

2.1. কোন চলকের মানের সংখ্যা অত্যধিক হইলে ঐ মানগুলি হইতে উহাদের বৈশিষ্ট্য অতি সহজে ধারণা করা যায় না। কিন্তু আমরা যদি ঐ মানগুলির গড় নির্ণয় করিয়া লই তবে ঐ গড় হইতে অতি সহজে মানগুলির বৈশিষ্ট্য ধারণা করিতে পারি। এই গড়টি প্রকৃতপক্ষে মানগুলির **প্রতিনিধি** (Representative)।

মনে কর, কোন বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণীর ছাত্রদের ওজন সম্বন্ধে ধারণা করিতে হইবে। যদি ঐ শ্রেণীর প্রত্যেক ছাত্রের ওজন লইয়া একটি তালিকা প্রস্তুত করি, তাহা হইলে ঐ ওজনগুলি বিশ্লেষণ করিয়া উহাদের সম্বন্ধে কোনরূপ ধারণা করা শক্ত ও সময়সাপেক্ষ। কিন্তু যদি ঐ ওজনগুলির গড় লই তাহা হইলে প্রতিনিধিস্থানীয় এই একটি মাত্র ওজনের সাহায্যে সমস্ত ছাত্রের ওজন সম্বন্ধে আমরা সুস্পষ্ট ধারণা করিতে পারি। আবার প্রতিনিধিমূলক ওজনের সাহায্যে একাধিক শ্রেণীর ছাত্রদের ওজনের তুলনাও অতি সহজে করা যায়।

রাশিবিজ্ঞানে কতকগুলি মানের গড় হইতে সমুদয় মানগুলির সম্বন্ধে ধারণা করা হইয়া থাকে। এইজন্য রাশিবিজ্ঞানে গড়ের বহুল প্রচলন।

2.2. রাশিবিজ্ঞানে সাধারণতঃ তিন প্রকারের গড় ব্যবহৃত হয় :

(*a*) **গাণিতিক গড় বা মধ্যক** (Arithmetic Mean বা Mean); সংক্ষেপে **M.**

(*b*) **মধ্যমা** (Median), সংক্ষেপে **Md.** (*c*) **ভুযিষ্ঠক** (Mode); সংক্ষেপে **Me.**

এতদ্ব্যতীত আরও দুইটি গড় আছে। যেমন **গুণোত্তর গড় (Geometric Mean)** এবং **প্রতিগাণিতিক গড় (Harmonic Mean)** , কিন্তু শেষোক্ত দুইটি গড়ের বিশেষ প্রচলন নাই। **গড় বলিলে সাধারণতঃ গাণিতিক গড়কেই বুঝায়।**

2·3. **গড় দুই প্রকার : (1) সরল গড় (Simple Mean)** এবং **(2) ভারযুক্ত গড় (Weighted Mean)।**

মনে কর, কোন শ্রেণীতে 30 নম্বর পাইয়াছে একটি বালক। 40 নম্বর পাইয়াছে আর একটি বালক, 50 নম্বর পাইয়াছে আর একটি বালক, এবং 60 নম্বর পাইয়াছে আর একটি বালক অর্থাৎ 30, 40 50, 60 এই চারিটি নম্বরের প্রাপক প্রত্যেক স্থানে একজন। এরূপ স্থলে চারিটি নম্বরের যোগফলকে বালকের সংখ্যা (4) দ্বারা ভাগ করিলে গড় পাওয়া যায়। এখানে গড়

$$=\frac{30+40+50+60}{4}=\frac{180}{4}=45$$

উপরে বর্ণিত এই প্রকার গড়কে **সরল গড়** বলে।

আবার মনে কর, কোন শ্রেণীতে 30 নম্বর পাওয়া ছাত্রের সংখ্যা 8 জন, 40 নম্বর পাওয়া ছাত্রের সংখ্যা 10 জন, 50 নম্বর পাওয়া ছাত্রের সংখ্যা 6 জন এবং 60 নম্বর পাওয়া ছাত্রের সংখ্যা 4 জন আছে।

এইরূপ ক্ষেত্রে মোট নম্বরকে ছাত্রের সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে গড় পাওয়া যাইবে।

$$\text{আলোচ্য গড়}=\frac{30\times 8+40\times 10+50\times 6+60\times 4}{8+10+6+4}\text{ নম্বর}$$

$$=\frac{240+400+300+240}{28}\text{ নম্বর}=\frac{1180}{28}\text{ নম্বর বা 42 নম্বর (প্রায়)।}$$

এস্থলে প্রত্যেক নম্বরকে ঐ নম্বরের **প্রাপক সংখ্যা** দ্বারা গুণ করায় নম্বরটি ভারযুক্ত (অর্থাৎ তত সংখ্যক গুণ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইয়াছে। এইরূপ গড়কে **ভারযুক্ত গড়** (Weighted Mean) বলে।

দ্রষ্টব্য : রাশিবিজ্ঞানে ভারযুক্ত মধ্যকের ভার বা রাশিগুলি প্রকৃতপক্ষে পরিসংখ্যা (বা **f**), সরল মধ্যককে ভারহীন মধ্যক বলা ঠিক নয়, কারণ উহাদের ভার বা পরিসংখ্যা আছে ; তবে সেগুলির মান সব সমান। সরল মধ্যককে সমভারযুক্ত মধ্যক বলা চলে।

2·4. মধ্যক বাহির করিবার সূত্র :

(*a*) যদি কোন বিষয়ের N দফা আলোচিত হয় এবং উহাদের মান

$x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ হয়, তবে মধ্যক $\bar{x}$ দ্বারা প্রকাশ করিলে নিম্নপ্রকার সূত্র পাওয়া যায় : $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{N}$ বা সংক্ষেপে $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N}$.

(b) যদি কোন বিষয়ের N-দফা আলোচিত হয় এবং উহাদের x_1 মানের পরিসংখ্যা f_1, x_2 মানের পরিসংখ্যা f_2, x_3 মানের পরিসংখ্যা f_3 এইরূপ হয় তাহা হইলে,

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots f_n} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fx}{N} \text{ হইবে।}$$

দ্রষ্টব্য : $f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + \cdots + f_n x_n = \Sigma fx$ (সংক্ষেপে)

এবং $f_1 + f_2 + f_3 \cdots f_n = \Sigma f = N$

(∵ পূর্বে শিখিয়াছ পরিসংখ্যার সমষ্টি দফার সংখ্যার সমান)।

(c) **শ্রেণীভুক্ত উপাত্ত হইতে মধ্যক** (Mean from Grouped Data) :

(i) দীর্ঘ পদ্ধতি অনুসারে সূত্র :

যদি N-সংখ্যক অসজ্জিত উপাত্ত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাভুক্ত করিয়া শ্রেণীভুক্ত উপাত্তে পরিণত করা হয়, তাহা হইলে প্রত্যেক বিভাগের মধ্যমানকে সেই বিভাগের পরিসংখ্যা দ্বারা গুণ করিয়া সমস্ত গুণফলকে পরিসংখ্যার সমষ্টি বা উপাত্ত-সংখ্যা (বা N) দ্বারা ভাগ করিলে মধ্যক পাওয়া যায়।

সূত্রাকারে, $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$.

যেখানে, $\bar{x}$ = বিভাগের মধ্যবিন্দু

f = বিভাগের পরিসংখ্যা

N = উপাত্ত সংখ্যা।

উদাহরণ 1. নিম্নে কোন শ্রেণীর 50টি বালকের গণিতের নম্বর দেওয়া আছে ; ঐ নম্বরগুলিকে পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাভুক্ত করিয়া মধ্যক নির্ণয় কর।

60	51	41	31	31
40	55	35	25	68
33	28✓	37	41	61
20✓	35	36	36	37
44	36	37	58	72
55	26✓	27✓	40	32
47	43	23✓	34	36
57	62	70	30	30
36	37	48	33	42
54	32	37	44	41

পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা—2·1.

উচ্চ সীমা—72

নিম্ন সীমা—20

প্রসার—53

মনে করি, বিভাগ সংখ্যা = 11

∴ বিভাগের আয়তন $= 53 \div 11 = 4{\cdot}8$ অর্থাৎ 5।

তথ্যের বিভাগ	তথ্য গণনার দাগ	পরিসংখ্যা (f)	মধ্যমান (X)	f.X
20—24	ǀǀ	2	22	44
25—29	ǀǀǀǀ	4	27	108
30—34	卌 ǀǀǀ	8	32	256
35—39	卌 卌 ǀǀ	12	37	444
40—44	卌 卌	10	42	420
45—49	ǀǀ	2	47	94
50—54	ǀǀ	2	52	104
55—59	ǀǀǀǀ	4	57	228
60—64	ǀǀǀ	3	62	186
65—69	ǀ	1	67	67
70—74	ǀǀ	2	72	144
যোগফল		50 = N		2095

$= \Sigma fx$

$$\bar{x} \text{ (মধ্যক)} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{2095}{50} = \frac{4190}{100} = 41{\cdot}9$$

(*b*) **কল্পিত গড়ের সাহায্যে অতি সহজে মধ্যক নির্ণয় করা যায়।** নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্য কর :

উদাহরণ 2. 668 ও 672 এর মধ্যক নির্ণয় কর।

$$\text{পূর্বের সূত্রানুসারে, মধ্যক} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{668+672}{2} = \frac{1340}{2} = 670.$$

বিকল্প প্রক্রিয়া :

মনে করি, কল্পিত গড $= 669$.

এখন 668 হইতে 669-এর পার্থক্য $= 668 - 669 = -1$ এবং 672 হইতে 669-এর পার্থক্য $= 672 - 669 = 3$: এই পার্থক্যদ্বয়ের গড $= \frac{(-1)+3}{2} = 1$.

কল্পিত গড 669-এর সহিত 1 যোগ করিলে 670 হয় অর্থাৎ নির্ণেয় মধ্যক পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য : ইচ্ছামত কোন রাশিকে গড হিসাবে লইলে তাহাকে **কল্পিত গড়** (Assumed Mean) বলে এবং কল্পিত গড হইতে প্রত্যেক রাশির **অন্তরকে পার্থক্য** (Deviation) বলে। Deviation-কে ইংরাজী বর্ণমালার 'd' অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ 3. 360, 420, 540 এর মধ্যক নির্ণয় কর।

$$\text{প্রথম প্রক্রিয়া : মধ্যক} = \frac{360+420+540}{3} = \frac{1320}{3} = 440$$

বিকল্প প্রক্রিয়া :

(i) মনে করি, কল্পিত গড $= 360$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} 360 - 360 = 0 \\ 420 - 360 = 60 \\ 540 - 360 = 180 \end{array}\right\} \text{কল্পিত গড হইতে পার্থক্য।}$$

$$\therefore \text{মধ্যক} = 360 + \tfrac{1}{3}(0+60+180) = 360 + \tfrac{1}{3} \times 240$$
$$= 360 + 80 = 440$$

(ii) মনে করি, কল্পিত গড $= 420$. $\therefore$ $360 - 420 = -60$

$420 - 420 = 0$, $540 - 420 = 120$

$$\therefore \text{মধ্যক} = 420 + \tfrac{1}{3}(-60+0+120) = 420 + \tfrac{1}{3} \times 60$$
$$= 420 + 20 = 440$$

(iii) মনে করি, কল্পিত গড $= 540$

$\therefore$ $360 - 540 = -180$, $420 - 540 = -120$, $540 - 540 = 0$

$$\text{মধ্যক} = 540 + \tfrac{1}{3}(-180 - 120 + 0)$$
$$= 540 + \tfrac{1}{3} \times -300 = 540 - 100 = 440.$$

দ্রষ্টব্য : এই উদাহরণ হইতে বুঝিতে পারা যায় যে,

(i) যে-কোন সংখ্যাকে কল্পিত গড় ধরা যাইতে পারে। তবে কল্পিত গড় প্রকৃত গড়ের যত নিকটবর্তী হইবে গড় বা মধ্যক নির্ণয় তত সহজসাধ্য হইবে।

(ii) কল্পিত গড়ের সহিত কল্পিত গড় হইতে রাশিসমূহের পার্থক্যসমূহের গড় যোগ করিলে নির্ণেয় গড় বা মধ্যক পাওয়া যায়।

উদাহরণ 4. নিম্নের তালিকায় 20টি বালকের উচ্চতা আসন্ন পূর্ণসংখ্যক ইঞ্চিতে দেওয়া আছে। (*a*) গাণিতিক নিয়মে এবং (*b*) 39 কে কল্পিত গড় ধরিয়া উচ্চতাগুলির গড় নির্ণয় কর।

উচ্চতা ইঞ্চিতে	36	38	39	40	41	42
বালকের সংখ্যা	3	4	6	3	2	2

তালিকা—2·2

উচ্চতা (ইঞ্চিতে) x	পরিসংখ্যা f	fx	39 হইতে উচ্চতাগুলির পার্থক্য d	d	
36	3	108	−3	−9	
38	4	152	−1	−4	
				−13	ঋণাত্মকগুলির সমষ্টি
39	6	234	0	0	
40	3	120	1	3	
41	2	82	2	4	
42	2	84	3	6	
				+13	ধনাত্মকগুলির সমষ্টি

N = 20 780

$$(1)\quad \text{মধ্যক} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{780}{20} = 39.$$

পঞ্চম স্তম্ভে ঋণাত্মক রাশিগুলির যোগফল $= -13$ এবং ধনাত্মক রাশিগুলির যোগফল $= 13$ ∴ উহাদের যোগফল $= -13 + 13 = 0$.

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় মধ্যক} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 39 + \frac{0}{20} = 39.$$

উদাহরণ 5. নিম্নলিখিত তালিকায় 40টি বালকের ওজন আসন্ন পূর্ণসংখ্যক পাউণ্ডে দেওয়া আছে ; 27 কল্পিত গড়ের সাহায্যে উহাদের মধ্যক নির্ণয় কর।

ওজনের বিভাগ	20—22	23—25	26—28	29—31	32—34
বালকের সংখ্যা	5	4	15	10	6

তালিকা 2·3

ওজনের বিভাগ	বিভাগের মধ্যমান x	পরিসংখ্যা f	কল্পিত গড় 27 হইতে মধ্যমানের পার্থক্য		
20—22	21	5	−6	−30	
23—25	24	4	−3	−12	−42
26—28	27	15	0	0	
29—31	30	10	3	30	
32—34	33	6	6	36	+66
		N = 40		Σfd	+24

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 27 + \frac{24}{40} = 27 + \cdot6 = 27\cdot6$$

দ্রষ্টব্য : (1) তালিকায় মাঝামাঝি যে বিভাগের পরিসংখ্যা সর্বাধিক তাহার মধ্যমানকে কাল্পনিক গড় ধরাই সুবিধাজনক।

উদাহরণ 6. উদাহরণ 5 এ প্রদত্ত প্রশ্নটির সমাধান হ্রস্ব প্রক্রিয়া দ্বারা নির্ণয় কর।

হ্রস্ব প্রক্রিয়ার নিয়ম :

(1) ছক বিন্যাস তালিকার প্রথম স্তম্ভে শ্রেণী বিভাগের মানগুলি লিখ।

(2) দ্বিতীয় স্তম্ভে প্রত্যেক বিভাগের মধ্যমান (x) লিখ।

(3) তৃতীয় স্তম্ভে প্রত্যেক বিভাগের পরিসংখ্যা (f) লিখ।

(4) চতুর্থ স্তম্ভে কল্পিত গড় হইতে প্রত্যেক বিভাগের মধ্যমানের পার্থক্য (d) লিখ;

(5) পঞ্চম স্তম্ভে ঐ পার্থক্যগুলিকে (d কে) বিভাগের মান (i) দ্বারা ভাগ করিয়া যাহা হয় তাহা লিখ অর্থাৎ $\frac{d}{i}$ এর মান লিখ।

(6) ষষ্ঠ স্তম্ভে $\frac{fd}{i}$ এর মানগুলি বাহির কর। সর্বশেষে ঐগুলি যোগ কর। যোগফলকে i দ্বারা গুণ করিয়া Σfd এর মান বাহির কর,

এইবার $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$ (যেখানে A—কল্পিত গড়, N—মোট পরিসংখ্যা)

সূত্র প্রয়োগ করিয়া মধ্যক বাহির কর:

নিম্নের 4নং উদাহরণের সমাধান লক্ষ্য কর:

তালিকা 2 4

ওজনের বিভাগ	বিভাগের মধ্যমান	পরিসংখ্যা f	কল্পিত গড় 27 হইতে মধ্যমানের পার্থক্য d	$\frac{d}{i}$	$\frac{fd}{i}$	
20 22	21	5	−6	−2	−10	
23—25	24	4	−3	−1	− 4	−14
26—28	27	15	0	0	0	
29—31	30	10	3	1	10	
32—34	33	6	6	2	12	+22

$N = 40$ $\qquad \Sigma \frac{fd}{i} = 8$

$\therefore \quad \Sigma fd = 8 \times 3 = 24$

$\therefore \quad \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} = 27 + \frac{24}{40} = 27 + \frac{6}{10} = 27 + {\cdot}6 = 27{\cdot}6$

2 5. মধ্যমা (Median):

কতকগুলি একজাতীয় রাশিকে তাহাদের মানের অধঃক্রম বা উর্ধ্বক্রমে সাজাইলে যে রাশিটির অগ্রে ও পশ্চাতে সমান সংখ্যক রাশি থাকে অর্থাৎ যে রাশিটি মধ্যস্থলে থাকে তাহাকে **মধ্যমা** (Median) বলে।

2·6 অসজ্জিত রাশির ক্ষেত্রে মধ্যমা।

যদি রাশিসংখ্যা n হয় এবং n এর মান বিজোড় হয়, তাহা হইলে রাশিগুলি-উর্ধ্ব বা অধঃক্রমে সাজাইবার পর $\frac{n+1}{2}$ তম পদের মানই হইবে মধ্যমা।

আবার যদি রাশিসংখ্যা n হয় এবং n এর মান জোড হয়, তাহা হইলে রাশি-গুলিকে উর্ধ্ব ও অধঃক্রমে সাজাইবার পর $\frac{n}{2}$ তম এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম রাশিদ্বয়ের গড়ই মধ্যমা।

2 7. পরিসংখ্যা বিভাজন ছকে সজ্জিত রাশির ক্ষেত্রে মধ্যমা ঃ

মধ্যমার সূত্র ঃ $\text{মধ্যমা}=\left(l+\frac{\frac{n}{2}-f_2}{f_1}\times\imath.\right)$

যেখানে $l=$ যে বিভাগে মধ্যমা অবস্থিত তাহার নিম্নসীমা, $n=$ মোট পরিসংখ্যা, $f_1=$ যে বিভাগে মধ্যমা অবস্থিত তাহার পূর্ব পর্যন্ত সঞ্চয়ী পরিসংখ্যা, $f_2=$ যে বিভাগে মধ্যমা অবস্থিত সেই বিভাগের পরিসংখ্যা এবং $\imath=$ বিভাগ অন্তর।

উদাহরণ 1. 2, 5, 3, 4, 6 এর মধ্যমা কত?

রাশিগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রমে সজ্জিত করিলে

2, 3, 4, 5, 6 হইবে।

এখানে রাশি সংখ্যা 5 অর্থাৎ বিজোড়। এখন $n=5$ হইলে, $\frac{n+1}{2}$ অর্থাৎ $\frac{5+1}{2}$ বা 3য় পদের মানই মধ্যমা।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $=4$.

উদাহরণ 2. 15, 10, 5, 7, 6, 11, 2, 8, এর মধ্যমা কত?

রাশিগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রমে সাজাইলে 2, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 15, হইবে।

এখানে রাশিসংখ্যা $=8$ অর্থাৎ জোড়। এখন $n=8$ হইলে, $\frac{n}{2}$ অর্থাৎ $\frac{8}{2}$ বা চতুর্থ এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right.$ বা $(4+1)$ বা পঞ্চম এই দুইটি রাশির গড় মধ্যমা। চতুর্থ রাশি $=7$ এবং পঞ্চম রাশি $=8$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমা $=\frac{7+8}{2}=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}=7{\cdot}5$

উদাহরণ 3. নিম্নে 40টি ছাত্রের উচ্চতার তালিকা দেওয়া হইল। তালিকা হইতে উচ্চতার মধ্যমা নির্ণয় কর।

উচ্চতা	19—21	22—24	25—27	28—30	31—33	34—36
ছাত্রসংখ্যা বা পরিসংখ্যা	5	7	6	12	6	4

আলোচ্য প্রশ্নে মোট পরিসংখ্যা $n=40$. $\frac{n}{2}=\frac{40}{2}=20$.

∴ 20 ও 21 তম রাশি দুইটির গড় মধ্যমা, চতুর্থ বিভাগের রাশিগুলির মধ্যে অবস্থিত। চতুর্থ বিভাগের নিম্নসীমা বা $l=27.5$, যে বিভাগে মধ্যমা অবস্থিত তাহার পূর্ব পর্যন্ত সঞ্চয়ী পরিসংখ্যা অর্থাৎ $f_1=5+7+6=18$, যে বিভাগে মধ্যমা অবস্থিত তাহার পরিসংখ্যা অর্থাৎ $f_2=12$ এবং বিভাগ-অন্তর অর্থাৎ $i=3$.

সূত্রানুসারে,

$$\text{মধ্যমা}=l+\frac{\frac{n}{2}-f_1}{f_2}\times i=27.5+\frac{\frac{40}{2}-18}{12}\times 3$$

$$=27.5+\frac{20-18}{12}\times 3=27.5+\frac{2}{4}=27.5+\frac{1}{2}$$

$$=27.5+.5=28.$$

দ্রষ্টব্য : মানের ক্রমানুসারে সজ্জিত বিজোড় সংখ্যক রাশিসমূহের মধ্যমা মধ্যবর্তী রাশিটির মান এবং জোড় সংখ্যক রাশিসমূহের মধ্যমা মধ্যবর্তী দুইটি রাশির মানের উপর নির্ভর করে বলিয়া সর্বক্ষেত্রে মধ্যক ও মধ্যমার মান এক নহে। কেবলমাত্র মানের ক্রমানুসারে সজ্জিত রাশিগুলির ক্রমিক অন্তর মধ্যবর্তী রাশি সম্পর্কে প্রতিসম (Symmetrical) হইলে মধ্যক ও মধ্যমার মান এক হয়।

যেমন 1, 2, 3, 4, 5 এর মধ্যমা 3 ও মধ্যক $=\frac{15}{5}=3$.

লক্ষ্য কর : 3 হইতে 2 এর পার্থক্য 1, আবার 4 হইতে 3 এর পার্থক্যও 1 ; 3 হইতে 1 এর পার্থক্য 2, আবার 5 হইতে 3 এর পার্থক্যও 2, অর্থাৎ মধ্যবর্তী রাশি সম্পর্কে পূর্ববর্তী ও পরবর্তী রাশিগুলির অন্তর প্রতিসম।

2·7 ভূযিষ্ঠক (Mode):

কতকগুলি রাশিকে মানের ক্রমানুসারে সজ্জিত করিলে যে রাশিটি মধ্যভাগে বেশী বার থাকে তাহাকে ঐ রাশিগুলির **ভূযিষ্ঠক** (Mode) বলে। যেমন, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7 রাশিগুলি হইতে দেখা যায় যে মধ্যভাগে 6 বেশী বার আছে। সুতরাং রাশিগুলির ভূযিষ্ঠক $=6$.

2·8 ভূযিষ্ঠক নির্ণয়ের প্রণালী:

(*a*) চলকের প্রদত্ত মানগুলিকে মানের ক্রমানুসারে সজ্জিত করিয়া দেখিতে হইবে কোন্ মানটি সর্বাধিকবার আছে। ঐ মানটিই হইবে ভূযিষ্ঠক।

(*b*) প্রদত্ত মানগুলিকে শ্রেণীবিভাগ করিয়া ভূযিষ্ঠক নির্ণয় করা যায়।

(*c*) নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে ভূযিষ্ঠক নির্ণয় করা যায়।

ভূযিষ্ঠক = মধ্যক − 3(মধ্যক − মধ্যমা)

Mode = Mean − 3(Mean − Median)

(*d*) প্রদত্ত মানগুলির পরিসংখ্যা-বিভাজনের লেখচিত্র হইতে ভূযিষ্ঠক নির্ণয় করা যায়।

পরিসংখ্যা বিভাজনের লেখচিত্র অঙ্কন করিলে একটি বক্ররেখা (curve) পাওয়া যায়। ঐ বক্ররেখায় যে বিন্দুর কোটি বৃহত্তম সেই বিন্দুর ভুজের মানই ভূযিষ্ঠক।

(*e*) আবৃত্তি বণ্টন তালিকা দেওয়া থাকিলে নিম্নলিখিত সূত্রানুসারে ভূযিষ্ঠক নির্ণয় করা যায়:—$M_0 = l_1 + \frac{\Delta}{\Delta_1 + \Delta_2} i$, যেখানে l_1 = ভূযিষ্ঠক শ্রেণীর নিম্নসীমা

Δ_1 = ভূযিষ্ঠক শ্রেণীর ও তাহার পূর্ববর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যার অন্তর (চিহ্ন বাদে)
Δ_2 = ভূযিষ্ঠক শ্রেণীর ও তাহার পূর্ববর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যার অন্তর (চিহ্ন বাদে)
i = ভূযিষ্ঠক শ্রেণীর নিম্নতম ও উচ্চতম সীমার অন্তর।

উদাহরণ 1. 2, 4, 5, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 5, 7 এর ভূযিষ্ঠক কত?

রাশিগুলিকে মানের ঊর্ধ্বক্রমে সাজাইলে 2, 2, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8 হইবে।

উহাদের মধ্যে 4ই সর্বাধিক বার আছে; ∴ নির্ণেয় ভূযিষ্ঠক = 4.

উদাহরণ 2. 51টি বালকের ওজনের (পাউণ্ড) তালিকা দেওয়া হইল। উহা হইতে বালকের ভূযিষ্ঠক নির্ণয় কর।

ওজন (পাউণ্ড)	80	82	84	86	88
বালকের সংখ্যা	10	12	16	9	4

সর্বাধিক সংখ্যক বালকের ওজনই ভূযিষ্ঠক হইবে। তালিকা হইতে দেখা যায় সর্বাধিক সংখ্যক 16 জনের ওজন 84 পাউণ্ড। সুতরাং নির্ণেয় ওজনের ভূযিষ্ঠক = 84 পাউণ্ড।

উদাহরণ 3. নিম্নের তালিকায় 25টি দ্রব্যের ওজন আসন্ন পূর্ণসংখ্যা কিলোগ্রামে দেওয়া আছে। উহাদের ভূযিষ্ঠক নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

[Mode = Mean − 3(Mean − Median)]

ওজন (কিলোগ্রাম)	19	20	21	22	23	24	25
সংখ্যা	1	3	5	7	6	2	1

$$\text{মধ্যক} = \frac{19\times1+20\times3+21\times5+22\times7+23\times6+24\times2+25\times1}{1+3+5+7+6+2+1}$$

$= 21{\cdot}96$ কিলোগ্রাম। $\therefore \quad n = 25.$

$\therefore \qquad = \frac{n+1}{2}$ বা $\frac{25+1}{2}$ বা 13-তম পদ $= 22$ কিলোগ্রাম।

$\therefore$ ভূযিষ্ঠক = মধ্যক − 3 (মধ্যক − মধ্যমা)

= 3 মধ্যমা − 2 মধ্যক = $(3\times22-2\times21{\cdot}96)$ কি. গ্রা.

= $(66-43{\cdot}92)$ কি. গ্রা. = $22{\cdot}08$ কি. গ্রা.

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের উদাহরণের সমাধান লক্ষ্য করিলে দেখা যায় যে, কতিপয় রাশির মধ্যক ও মধ্যমা সমান হইলে তাহাদের ভূযিষ্ঠকও সমান।

প্রশ্নমালা 2

[1 হইতে 5 পর্যন্ত ক্লাসে এবং বাকী বাড়ীতে কর।]

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির গড় বা মধ্যক নির্ণয় কর :

   (a) 10, 11, 12, 13, 14.

   (b) 8, 2, 4, 5, 10, 11.

   (c) 6·5, 4·25, $7\frac{1}{2}$, 8 25, 9·5.

2. 720 কে কল্পিত গড় ধরিয়া 720, 722, 724 এর মধ্যক নির্ণয় কর।

3. 550 কে কল্পিত গড ধরিয়া 552, 554, 560 এবং 567 এর মধ্যক নির্ণয় কর।

4. কোন পরীক্ষায় 30 নম্বর পাওয়া ছাত্রের সংখ্যা 5 জন, 33 নম্বর পাওয়া ছাত্রের সংখ্যা 10 জন, 40 নম্বর পাওয়া ছাত্রের সংখ্যা 15 জন হইলে নম্বরগুলির মধ্যক কত ?

5. নিম্নের তালিকায় 40টি বালকের বয়স আসন্ন পূর্ণসংখ্যক বৎসরে দেওয়া আছে। বালকের বয়সের মধ্যক রাশিবিজ্ঞানের প্রক্রিয়ায় নির্ণয় কর।

বয়স (বৎসর)	5	6	7	8	9	10	11	12
বালক সংখ্যা	1	3	5	8	10	7	4	2

6. নিম্নের তালিকায় 50টি বালকের ওজন আসন্ন পূর্ণসংখ্যক কিলোগ্রামে দেওয়া আছে। (i) গাণিতিক নিয়মে (ii) 65 কে কল্পিত গড় ধরিয়া রাশি বিন্যাসের নিয়মে মধ্যক নির্ণয় কর :—

ওজন (কি. গ্রা. এ)	61	62	63	64	65	66	67	68	69
বালকের সংখ্যা	1	3	5	8	12	9	6	4	2

7. বিভাগ প্রসার 3 লইয়া নিম্নলিখিত আসন্ন পূর্ণ সংখ্যাগুলির পরিসংখ্যা বিভাজন প্রস্তুত কর এবং উহা হইতে (i) গাণিতিক নিয়মে এবং (ii) কল্পিত গড় লইয়া রাশি বিজ্ঞানের নিয়মে মধ্যক নির্ণয় কর :—

62	30	32	41	57	20	34	22
51	32	44	44	37	36	35	35
38	37	36	45	52	62	66	40
30	32	37	53	23	23	20	65
44	53	21	37	39	38	37	32

8. 20, 22, 27, 14, 5, 8, 23 এর মধ্যমা কত ?

9. 69, 71, 68, 53, 42, 37, 36, 20 এর মধ্যমা কত ?

10. নিম্নে 30টি ছাত্রের ওজন আসন্ন কিলোগ্রামে দেওয়া হইল। তালিকা হইতে ওজনের মধ্যমা বাহির কর :—

ওজন (কিলোগ্রাম)	60–62	63–65	66–68	69–71	72–74	75–77
ছাত্রসংখ্যা	5	4	10	2	4	5

11. (a) 8, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 13 কিলোগ্রামের ভূয়িষ্ঠক কত ?

(b) 4, 7, 5, 2, 3, 4, 5, 3, 5 ও 4 মাসের ভূয়িষ্ঠক কত ?

12. কোন শ্রেণীর 30 জন ছাত্র মোট 20 নম্বরের ভিতর যে সকল নম্বর পাইয়াছে তাহা নিম্নে তালিকায় দেওয়া হইল। নম্বরগুলির ভূয়িষ্ঠক কত ?

নম্বর	10	11	12	14	15	16	18	19
ছাত্রসংখ্যা	1	1	4	7	6	9	1	1

13. নিম্নলিখিত তালিকা হইতে ভূয়িষ্ঠক, মধ্যমা ও মধ্যক নির্ণয় কর :—

(a) পরীক্ষার নম্বর :

নম্বর	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
পরিসংখ্যা	2	7	17	29	38	41	40	30	17	6

(b) পরীক্ষার নম্বর :

নম্বরের বিভাগ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	12	38	30	45	35	20	6	3

14. 13। (b) প্রশ্নের ভূয়িষ্ঠক লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

15. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা-তালিকা হইতে মধ্যক, মধ্যমা ও ভূয়িষ্ঠক নির্ণয় কর :—

(মধ্যক নির্ণয়ে হ্রস্ব প্রক্রিয়ার সাহায্য লইবে।)

নম্বরের বিভাগ	পরিসংখ্যা
(a) 70—71	2
68—69	2
66—67	3
64—65	4
62—63	6
60—61	7
58—59	5
56—57	4
54—55	2
52—53	3
50—51	1
	N=39

(b) নম্বরের বিভাগ	পরিসংখ্যা
120—139	50
100—119	150
80—99	500
60—79	250
40—59	50
	N=100

(c)

নম্বর	পরিসংখ্যা
15	1
14	2
13	3
12	6
11	12
10	15
9	22
8	31
7	18
6	6
5	2
4	2

নম্বরের বিভাগ	পরিসংখ্যা
(d) 10—13	2
14—17	5
18—21	8
22—25	11
26—29	7
30—33	3

3

গড় পার্থক্য ও সমক পার্থক্য

Mean Deviation & Standard Deviation

3·1. পূর্ববর্তী অধ্যায়ে আমরা মধ্যক, মধ্যমা ও ভূয়িষ্ঠক সম্বন্ধে আলোচনা করিয়াছি। ঐগুলি হইতে চলকের মানগুলির বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে খানিকটা ধারণা হইলেও সম্যক ধারণা করা সম্ভবপর নহে। এইজন্য গড় হইতে ইহার অন্তর্গত মানগুলির পার্থক্য বা বিস্তৃতি (Dispersion) কিরূপ তাহা জানা আবশ্যক। নিম্নলিখিত উদাহরণ হইতে বিস্তৃতির উপযোগিতা সম্বন্ধে তোমাদের ধারণা হইবে। মনে কর, 50 জন বালক এবং 50 জন বালিকা গণিতে পরীক্ষা দিল। দেখা গেল, উহাদের উভয় দলেরই নম্বরের গড় 34·5। গড়ের হিসাবে বিচার করিলে আপাত-দৃষ্টিতে উভয় দলেরই কৃতিত্ব একরূপ। কিন্তু দেখা গেল বালকের দলের নম্বরের প্রসার 15 হইতে 51 এবং বালিকার দলের নম্বরের প্রসার 19 হইতে 45, অর্থাৎ প্রথমোক্ত ক্ষেত্রে প্রসার (52−15) বা 37 এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে প্রসার (45−19) বা 26; ইহা হইতে সাধারণভাবে বুঝা যায় যে বালকদের নম্বর বালিকার নম্বর অপেক্ষা অধিকতর বিস্তৃত এবং পরিবর্তনশীল (variable)। সেইজন্য চলকের বিশেষ প্রয়োজন। গড় হইতে রাশিগুলির পার্থক্য বা বিস্তৃতি যত কম হইবে রাশিগুলি তত বেশী নিয়মিত (uniform) হইবে এবং তাহাদের গড় তত বেশী প্রতিনিধিস্থানীয় হইবে।

3·2. বিস্তৃতি মাপিবার উপায়ঃ

প্রসার (Range) অর্থাৎ চলকের উচ্চতম মান হইতে নিম্নতম মানের অন্তর দ্বারা বিস্তৃতি (Dispersion) সম্বন্ধে কিছুটা ধারণা হয়। কিন্তু দফার সংখ্যা খুব কম কিংবা বহু দফার মান যদি না থাকে তাহা হইলে প্রসারের দ্বারা বিস্তৃতির মাপ নির্ভরযোগ্য হয় না। যেমন, কোন পরীক্ষায় সর্বোচ্চ নম্বর 90 এবং ঠিক পরের নম্বর 50; যদি সর্বনিম্ন নম্বর 30 হয়, তাহা হইলে কেবলমাত্র 90 নম্বরের জন্যই প্রসার (50—30) বা 20 হইতে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইয়া (90—30) বা 60 হয়। এই

বিস্তৃতি গড় পার্থক্য (Mean Deviation) ও সমক পার্থক্য (Standard Deviation) দ্বারা সাধারণতঃ পরিমাপ করা হয়।

3·3. গড় পার্থক্য (Mean Deviation) ঃ

(a) কোন চলকের মানগুলির গড় হইতে ঐ মানগুলির অন্তরফল সমূহের বীজগণিতীয় সমষ্টি (Algebraic sum) শূন্য হয়। কিন্তু কোন চলকের মানগুলির গড় হইতে ঐ মানগুলির চিহ্ন-নিরপেক্ষ অন্তরগুলির গড়কে গড়-পার্থক্য (Mean Deviation) বলে।

(b) (i) গড়-পার্থক্য নির্ণয়ের নিয়ম :—

(I) **অসজ্জিত তথ্য দেওয়া থাকিলে ঃ—**

(2). গড় হইতে প্রত্যেক মানের চিহ্ন-নিরপেক্ষ পার্থক্য বাহির কর।

(3) (চিহ্ন-নিরপেক্ষ) পার্থক্যগুলি যোগ করিয়া যোগফলকে মানগুলির সংখ্যা দ্বারা ভাগ কর। প্রাপ্ত **ভাগফলই নির্ণেয় গড় পার্থক্য।**

(ii) **পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকাবদ্ধ তথ্য হইতে ঃ**

(1) পরিসংখ্যা বিভাজন হইতে মানগুলির গড় বা মধ্যক নির্ণয় কর।

(2) বিভাগগুলির মধ্যমানসমূহ নির্ণয় কর।

(3) গড় হইতে মধ্যমানগুলির চিহ্ন-নিরপেক্ষ পার্থক্যগুলি নির্ণয় কর।

(4) পার্থক্যগুলিকে যথাক্রমে বিভাগগুলির পরিসংখ্যা দ্বারা গুণ কর।

(5) গুণফলের সমষ্টি মোট পরিসংখ্যা দ্বারা ভাগ কর। প্রাপ্ত **ভাগফলই নির্ণেয় গড় পার্থক্য।**

3·4. সমক পার্থক্য (Standard Deviation) ঃ

(a) কোন চলকের মানগুলির গড় হইতে মানগুলির [সেই সকল পার্থক্য, তাহাদের বর্গসমূহের] গড়ের বর্গমূলকে ঐ মানগুলির সমক পার্থক্য (Standard Deviation) বলে। সমক পার্থক্যকে সংক্ষেপে S. D. অথবা σ (Sigma) এই গ্রীসীয় অক্ষরটির দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

3·5. সমক পার্থক্য নির্ণয়ের নিয়ম ঃ—

(i) **যখন চলকের মানগুলি অসজ্জিত থাকে :—**

প্রথম নিয়ম ঃ

(a) প্রাপ্ত মানগুলির গড় নির্ণয় কর।

(b) গড় হইতে মানগুলির পার্থক্যগুলির বর্গ নির্ণয় কর।

(c) ঐ বর্গসমূহের সমষ্টিকে মানগুলির মোট সংখ্যা দ্বারা ভাগ কর।

(d) ঐ ভাগফলের বর্গমূল নির্ণয় কর। প্রাপ্ত বর্গমূলটিই নির্ণেয় সমক পার্থক্য।

সূত্র : S. D. বা $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N}}$

যেখানে X = প্রদত্ত মান

$\bar{x}$ = = মানগুলির গড

N = মানগুলির সংখ্যা।

দ্রষ্টব্য : সমক পার্থক্যের বর্গকে Variance বলে।

সূত্র : Variance $= \frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N}$

দ্বিতীয় নিয়ম :

যদি N এর মান অত্যধিক হয় এবং গড় বা $\bar{x}$ অখণ্ড সংখ্যা না হয় নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে সমক পার্থক্য নির্ণয় করা অধিকতর সুবিধাজনক :

$$M. D. = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - (\bar{x})^2}$$

যেখানে $\Sigma(X)^2$ = মানগুলির বর্গসমূহের সমষ্টি

N = মানগুলির সংখ্যা

$\bar{x}$ = মানগুলির গড় বা মধ্যক

(ii) পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা হইতে সমক পার্থক্য নির্ণয়ের সূত্র :

$$M. D. = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)^2} \quad \therefore \quad \bar{x} = \frac{\Sigma f x}{N}$$

উদাহরণ 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10-এর গড় পার্থক্য নির্ণয় কর।

মধ্যক বা গড় $= \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10} = \frac{55}{10} = 5{\cdot}5$

$1-5{\cdot}5 = -4{\cdot}5$, $2-5{\cdot}5 = -3{\cdot}5$, $3-5{\cdot}5 = -2{\cdot}5$, $4-5{\cdot}5 = -1{\cdot}5$; $5-5{\cdot}5 = -{\cdot}5$; $6-5{\cdot}5 = {\cdot}5$, $7-5{\cdot}5 = 1{\cdot}5$; $8-5{\cdot}5 = 2{\cdot}5$; $9-5{\cdot}5 = 3{\cdot}5$; $10-5{\cdot}5 = 4{\cdot}5$

চিহ্ন-নিরপেক্ষ সাংখ্যমানগুলির সমষ্টি

$= 4{\cdot}5 + 3{\cdot}5 + 2{\cdot}5 + 1{\cdot}5 + {\cdot}5 + {\cdot}5 + 1{\cdot}5 + 2{\cdot}5 + 3{\cdot}5 + 4{\cdot}5 = 25$

$\therefore$ গড় পার্থক্য $= \frac{25}{10} = 2{\cdot}5$

উদাহরণ 2. 30টি ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা হইতে গড় পার্থক্য নির্ণয় কর :

নম্বরের বিভাগ	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44
ছাত্রসংখ্যা বা পরিসংখ্যা	4	5	6	7	8

বিভাগগুলির মধ্যমান যথাক্রমে 22, 27, 32, 37, 42

$$\text{গড় বা মধ্যক} = \frac{22\times4+27\times5+32\times6+37\times7+42\times8}{4+5+6+7+8}$$

$$= \frac{88+135+192+259+336}{30} = \frac{1010}{30} = \frac{101}{3} = 33\frac{2}{3}$$

মধ্যমানগুলি হইতে গড়ের পার্থক্যসমূহ যথাক্রমে

$22-33\frac{2}{3} = -11\frac{2}{3}$; $27-33\frac{2}{3} = -6\frac{2}{3}$, $32-33\frac{2}{3} = -1\frac{2}{3}$;

$37-33\frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$; $42-33\frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}$.

চিহ্ন-নিরপেক্ষ গড় পার্থক্যগুলির সমষ্টি

$$= 11\tfrac{2}{3}\times4+6\tfrac{2}{3}\times5+1\tfrac{2}{3}\times6+3\tfrac{1}{3}\times7+8\tfrac{1}{3}\times8$$

$$= \tfrac{35}{3}\times4+\tfrac{20}{3}\times5+\tfrac{5}{3}\times6+\tfrac{10}{3}\times7+\tfrac{25}{3}\times8$$

$$\tfrac{140}{3}+\tfrac{100}{3}+10+\tfrac{70}{3}+\tfrac{200}{3}$$

$$= \frac{140+100+30+70+200}{3}$$

$$= \tfrac{540}{3} = 180$$

$$\therefore \text{ গড় পার্থক্য} = \frac{180}{4+5+6+7+8} = \frac{180}{30} = 6.$$

উদাহরণ 3. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 এর সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

$$\text{গড়} = \frac{1+3+5+7+9+11+13+15+17+19}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

গড় হইতে মানগুলির পার্থক্য যথাক্রমে, $1-10=-9$; $3-10=-7$; $5-10=-5$; $7-10=-3$; $9-10=-1$; $11-10=1$; $13-10=3$; $15-10=5$; $17-10=7$; $19-10=9$.

পার্থক্য সমূহের বর্গের সমষ্টি

$$=(-9)^2+(-7)^2+(-5)^2+(-3)^2+(-1)^2+(1)^2+(3)^2+(5)^2+(7)^2+(9)^2$$

$$=81+49+25+9+1+1+9+25+49+81=330$$

বর্গ সমষ্টিকে মানগুলির সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল $=(330\div 10)$ বা 33 হয়।

$\therefore$ সমক পার্থক্য $=\sqrt{33}=5{\cdot}7$

উদাহরণ 4. নিম্নের তালিকায় 40টি দ্রব্যের দৈর্ঘ্যে (গজে) পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া আছে। উহা হইতে সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

দৈর্ঘ্য (গজে) x	পরিসংখ্যা f
4	2
5	10
6	12
7	9
8	7

$N=40$

প্রদত্ত তালিকা হইতে পাই

দৈর্ঘ্য (গজে) x	পরিসংখ্যা f	fx	fx^2
4	2	8	32
5	10	50	250
6	12	72	432
7	9	63	441
8	7	56	448
সমষ্টি	40	249	1603

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{1603}{40} - \left(\frac{249}{40}\right)^2}$$

$$= \sqrt{40.075 - 38.750} = \sqrt{1.325} = 1.15$$

উদাহরণ 5. নিম্নলিখিত পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা হইতে সমক পার্থক্য নির্ণয় কর :

বিভাগ	0 – 5	5 – 10	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40
পরিসংখ্যা	2	5	7	13	21	10	8	3

বিভাগ	পরিসংখ্যা f	মধ্যমান	কল্পিত গড়	কল্পিত গড় 22·5 হইতে মধ্যমানের পার্থক্য d	fd	fd^2
0 – 5	2	2·5		– 20	– 40	800
5 – 10	5	7·5		– 15	– 75	1125
10 – 15	7	12·5		– 10	– 70	700
15 – 20	13	17·5		– 5	– 65	325
20 – 25	21	22·5	22·5	0	0	0
25 – 30	10	27·5		5	50	250
30 – 35	8	32·5		10	80	800
35 – 40	3	37·5		15	45	675
সমষ্টি	69				– 75	4675

$$S.D. = \sqrt{\left\{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2\right\}} = \sqrt{\frac{4675}{69} - \left(-\frac{-75}{69}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4675}{69} - \frac{5625}{4761}} = \sqrt{\frac{316950}{4761}}$$

$$= \sqrt{66.57\cdots} = 8.1 = 8 \quad (\text{প্রায়})$$

প্রশ্নমালা 3

[1 হইতে 4 ক্লাসে কর এবং 5 হইতে 8 বাড়ীর কাজ।]

1. (a) 20, 21, 22, 23, 24-এর গড় পার্থক্য নির্ণয় কর।

2. কোন পরীক্ষায় 5টি বালকের প্রাপ্ত নম্বর যথাক্রমে 12 16, 20, 24, 28; গড় পার্থক্য কত ?

3. 16, 13, 17, 15, 20, 12, 15, 18, 16, 15, 14 এবং 13 ইঞ্চির গড় পার্থক্য উহাদের ভূযিষ্ঠক হইতে নির্ণয় কর।

4. নিম্নের তালিকায় 45টি বালকের ওজন আসন্ন পূর্ণসংখ্যক কিলোগ্রামে দেওয়া আছে। ভূযিষ্ঠক হইতে বালকদের গড় পার্থক্য নির্ণয় কর :—

ওজন (কিলোগ্রাম)	45	47	48	49	50	51	52	54
বালকের সংখ্যা	1	3	5	10	12	9	4	1

5. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11-এর সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

6. 6, 8, 10, 12 এবং 14 এই নম্বরগুলির সমক পার্থক্য নির্ণয় কর।

7. নিম্নের তালিকায় 20টি বালকের বয়স বৎসরে দেওয়া হইল : বালকদের বয়সের সমক পার্থক্য নির্ণয় কর :

বয়স (বৎসরে)	2	3	4	5	6	7	8
বালকের সংখ্যা	1	3	4	5	1	3	3

8. নিম্নে 40 জন বালকের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা দেওয়া হইল। উহা হইতে বালকদের নম্বরের সমক পার্থক্য নির্ণয় কর :—

নম্বরের বিভাগ	30 - 39	40 - 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89
বালক সংখ্যা	4	2	4	12	10	8

9. নিম্নে পরিসংখ্যা বিভাজনে 42টি বালকের ওজন আসন্ন পূর্ণসংখ্যক পাউণ্ডে দেওয়া আছে। বালকদের ওজনের সমক পার্থক্য নির্ণয় কর :

ওজন (পাউণ্ডে)	36 – 37	38 – 39	40 – 41	42 – 43	44 – 45	46 – 47	48 – 49
বালক সংখ্যা	3	5	7	13	8	4	2

10. কোন সাপ্তাহিক পরীক্ষায় 36টি বালক পূর্ণসংখ্যায় যে যে নম্বর পাইয়াছে তাহার পরিসংখ্যা বিভাজন নিম্নে দেওয়া হইল। নম্বরগুলির সমক পার্থক্য নির্ণয় কর :—

নম্বরের বিভাগ	4·5 – 7·5	7·5 – 10·5	10·5 – 13·5	13·5 – 16·5	16·5 – 19·5	19·5 – 22·5	22·5 – 25·5
বালক সংখ্যা	2	5	8	9	7	4	1

4

লেখচিত্র—আয়তলেখ, পরিসংখ্যা বহুভুজ

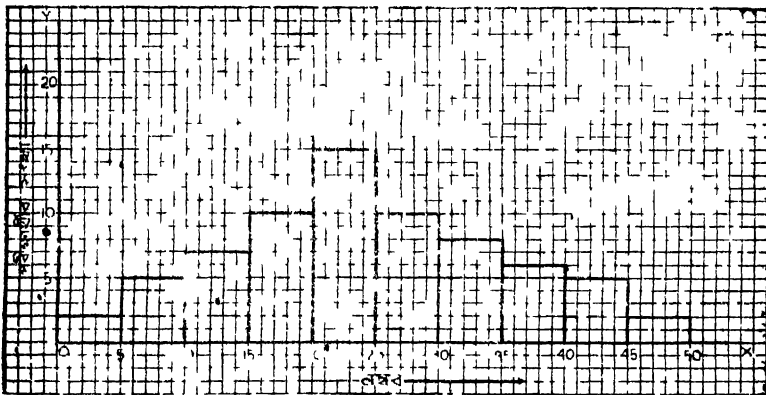
Graphical representations - Histogram, Frequency Polygon

4·1 পরিসংখ্যা বিভাজনের তথ্যসমূহকে লেখচিত্রে প্রকাশ করা যায়। নিম্নে দুইটি লেখচিত্র (1) আয়তলেখ Histogram) এবং (2 পরিসংখ্যা বহুভুজ (**Frequency Polygon**)-এর অঙ্কন পদ্ধতি প্রদর্শিত হইতেছে :

উদাহরণ 1. নিম্নে 70 জন পরীক্ষার্থীর নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন তালিকা দেওয়া হইল। ঐ বিভাজনের আয়তলেখ Histogram) অঙ্কিত কর :—

নম্বরের বিভাগ	0 – 5	5—10	10 – 15	15 – 20	20—25	25 – 30	30 – 35	35—40	40 – 45	45—50
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা বা পরিসংখ্যা	2		7	10	1[illegible]	10	8	6		2

ছক কাগজে OX এবং OY দুইটি অক্ষ পরস্পর লম্ব। OX অক্ষ বরাবর নম্বরগুলি লও এবং OY অক্ষ বরাবর পরীক্ষার্থীর সংখ্যা বা পরিসংখ্যা লও। ছোট বর্গের একটি বাহুকে একক ধরা হইয়াছে।

[চিত্র নং 4·1]

এখানে প্রথম বিভাগ (0 – 5) এর পরিসংখ্যা 2, সুতরাং OX অক্ষের উপর 0 দাগ হইতে 5 দাগ পর্যন্ত দৈর্ঘ্য এবং OY অক্ষের উপর 2 ঘর পর্যন্ত দৈর্ঘ্য লইয়া

একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত কর। এই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলই প্রথম বিভাগের লেখ। এইরূপে অন্যান্য বিভাগের লেখ অঙ্কিত কর। চিত্রে যে 10টি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে উহাদের ক্ষেত্রফলই প্রদত্ত প্রশ্নের ছক বিভাজনের **আয়তলেখ।** **(Histogram)**।

উদাহরণ 2. নিম্নে কোন শ্রেণীর ছাত্রদের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া আছে। উহার আয়তলেখ অঙ্কিত কর :

ওজন	80—84	85—89	90—94	95—99	100—104	105—109	110—114	115—119
পরিসংখ্যা	4	8	10	18	24	16	12	6

[চিত্র 4·1a]

4·1*a*. চিত্রটি উদ্দিষ্ট আয়তলেখ। এই চিত্রে ছোট বর্গের দুইটি বাহুকে পরিসংখ্যার একক ধরা হইয়াছে। লক্ষ্য কর, OX অক্ষবরাবর 0 এর নিকট '‖' এইরূপ চিহ্ন আছে। OX অক্ষের সমান্তরাল উপরের সীমারেখাতেও ঐরূপ চিহ্ন রহিয়াছে। আয়তলেখের চিত্রটি লক্ষ্য করিলে দেখিতে পাইবে, যে বিন্দুতে OX এর উপর 75 লেখা আছে, উহা মূলবিন্দু 0 হইতে যে দৈর্ঘ্য নির্বাচিত হওয়া উচিত ছিল তাহা নহে। ঠিকভাবে 75 বসাইলে চিত্রটি অসম্ভব বড় হয় এবং ছক্ কাগজে ধরে না। সুতরাং বুঝিতে হইবে যে অঙ্কনের সুবিধার জন্য আমরা Y-অক্ষকে

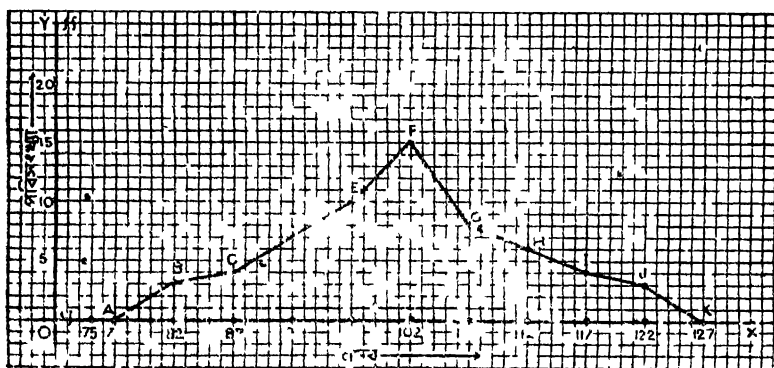
বিভাগগুলির নিকটে সরাইয়া আনিয়াছি। ইহাই বুঝাইবার জন্য 0 হইতে 75 দাগের মধ্যে OX রেখার উপর || চিহ্ন দিয়া একটু অংশ কাটিয়া দেওয়া হইয়াছে এবং উহার সমান্তরাল উপরের সীমারেখাতে ঐরূপ চিহ্ন দিয়া কাটিয়া দেওয়া হইয়াছে।

4·2 নিম্নে কয়েকজন পরীক্ষার্থীর নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া আছে ঐ বিভাজনের পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কিত কর :

বিভাগ	80 – 84	84 – 89	90 – 94	95 – 99	100 – 104	105 – 109	110 – 114	115 – 119	120 – 124
পরিসংখ্যা	3	4	7	10	15	8	6	4	3

প্রথমে প্রদত্ত বিভাগগুলির পূর্বে ও পশ্চাতে 75 – 79 এবং 125 – 129 দুইটি বিভাগ ধরিয়া লইয়া বিভাগগুলির মধ্যমান বাহির কর এবং নিম্নে প্রদর্শিত ছক প্রস্তুত কর :

মধ্যমান	77	82	87	92	97	102	107	112	117	122	127
পরিসংখ্যা	0	3	4	7	10	15	8	6	4	3	0

এখন OX অক্ষ বরাবর নম্বরের বিভাগগুলির এবং OY অক্ষ বরাবর বিভাগগুলির

[চিত্র 4·2]

পরিসংখ্যা বসাও। ছক কাগজের ছোট বর্গের একটি বাহুকে একক ধর। এক্ষণে ছক কাগজের উপর A (77, 0), B (82, 3) C (87, 4), D (92, 7), E (97, 10),

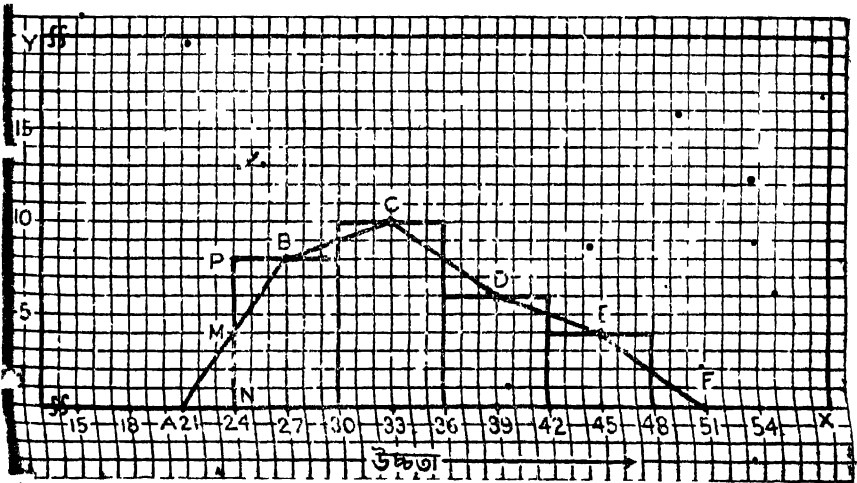
F(102, 15), G (107, 8), H (112, 6) I (117, 4), J (122, 3), K (127, 0) বিন্দুগুলি সংস্থাপন করিয়া প্রথমে A বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া AB, BC, CD, DE, JK প্রভৃতির এক একটি সরলরেখার দ্বারা যুক্ত কর। A B C D E F G H I J K ক্ষেত্রটি উদ্দিষ্ট লৈখিক চিত্র। ঐ ক্ষেত্রটিকে পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon) বলে।

4·3. নিম্নে 28 জন বালকের উচ্চতার পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া আছে। ঐ বিভাজনের আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ একই চিত্রে অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে উভয় লেখর ক্ষেত্রফল সমান।

উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	24—30	30—36	36—42	42—48
পরিসংখ্যা	8	10	6	4

প্রদত্ত বিভাজনের পূর্বে ও পশ্চাতে 18 – 24 এবং 48 – 54 বিভাগ দুইটি আছে এইরূপ মনে করিয়া সমস্ত বিভাগের মধ্যমান বাহির করিয়া নিম্নলিখিত তালিকা প্রস্তুত কর :—

মধ্যমান	21	27	33	39	45	51
পরিসংখ্যা	0	8	10	6	4	0

[চিত্র 4·3]

4'3 চিত্রে প্রদত্ত বিভাজনের আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভূজ অঙ্কিত করা হইয়াছে। উক্ত চিত্রটিকে লক্ষ্য করিয়া দেখ যে বহুভুজটির বাহুগুলি দ্বারা আয়ত-লেখটি হইতে ছিন্ন 5টি ত্রিভুজ যেমন পরিসংখ্যা বহুভুজের বাহিরে পড়িয়াছে, সেইরূপ আবার আয়তলেখটির বহির্ভূত 5টি ত্রিভুজ পরিসংখ্যা বহুভুজের ভিতরে পড়িয়াছে। জ্যামিতির সাহায্যে সহজে প্রমাণ করা যায় যে, এক একটি ভিতরের ত্রিভুজ উহার সংলগ্ন বাহিরের ত্রিভুজের সমান। যেমন নামকরণ করিয়া AMN ও BPM

ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\hat{ANM} = \hat{BPM}$ (∵ প্রত্যেকে সম ∠),

এবং $\hat{AMN} =$ বিপ্রতীপ $\hat{BMP}$

এবং AN = BP (∵ বিভাগ প্রসার সমান)। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

এইরূপে প্রতিটি ত্রিভুজ ও উহার সংলগ্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই ইহা সত্য।

∴ **আয়তলেখ = পরিসংখ্যা বহুভুজের ক্ষেত্রফল।**

প্রশ্নমালা—4

[1 ও 2 ক্লাসের কাজ এবং 3 হইতে 5 বাড়ীর কাজ]

1. নিম্নের পরিসংখ্যা বিভাজনটিতে 40টি বালকের ওজন পূর্ণসংখ্যক পাউণ্ডে দেওয়া হইয়াছে। পরিসংখ্যা বিভাজনটি হইতে বালকদের ওজনের আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কিত কর।

ওজন (পাউণ্ডে)	36—40	40—44	44—48	48—52	52—56	56—60	60—64
বালক সংখ্যা	2	4	7	10	8	6	3

2. নিম্নের তালিকায় 64টি বালকের উচ্চতা আসন্ন পূর্ণসংখ্যায় দেওয়া হইয়াছে। তালিকাটি হইতে বালকদের উচ্চতার আয়তলেখ অঙ্কিত কর।

উচ্চতা (ইঞ্চিতে)	35—38	39—42	43—46	47—50	51—54	55—58	59—62
বালক সংখ্যা	4	9	13	16	12	7	3

3. কোন পরীক্ষায় 200 জন পরীক্ষার্থীর নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া হইয়াছে, পরিসংখ্যা বিভাজনটি হইতে পরীক্ষার্থীদের নম্বরের আয়তলেখ অঙ্কিত কর।

নম্বর	20 – 29	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89
পরীক্ষার্থীর সংখ্যা	26	57	38	35	28	11	5

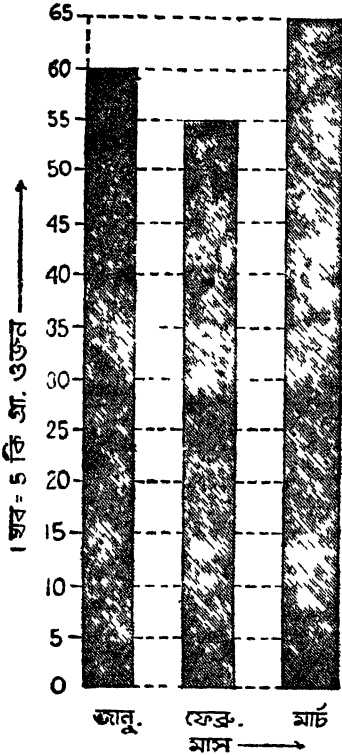
4 3নং প্রশ্নের পরিসংখ্যা বিভাজন হইতে পরীক্ষার্থীদের নম্বরের পরিসংখ্যা বহুভূজ অঙ্কিত কর।

5. নিম্নের তালিকায় 43টি বালকের ওজনের পরিসংখ্যা বিভাজন দেওয়া আছে। ঐ পরিসংখ্যা বিভাজন হইতে বালকদের ওজনের আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভূজ অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে উভয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

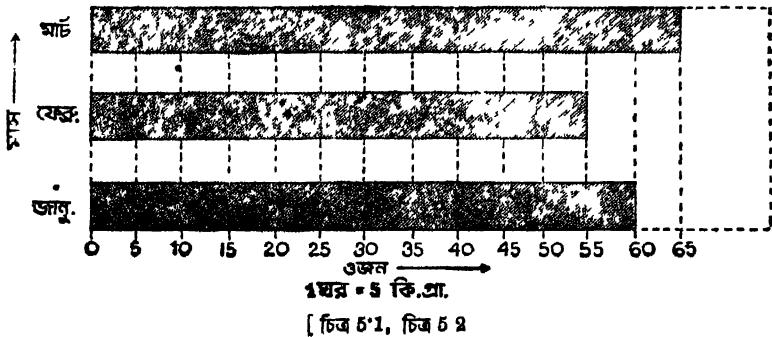
ওজন (পাউণ্ডে)	30 – 35	35—40	40 45	45 50	50—55	55—60
পরিসংখ্যা	2	8	15	8	7	3

5

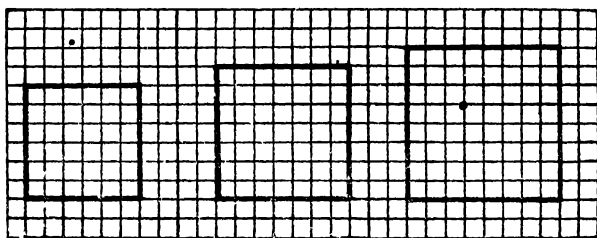
ছাত্রদের ওজন, উচ্চতা ও বয়স নির্ধারণ এবং উহাদের লেখচিত্রে ব্যবহার

Determination of weights, heights and ages of Pupils and their Graphical Representations.

5·1. তথ্যসমূহের পরিসংখ্যান অপেক্ষা উহা হইতে অঙ্কিত লেখ-চিত্রের সাহায্যে বিষয়বস্তু সম্পর্কে অধিকতর স্থায়ী ও স্পষ্ট ধারণা জন্মে। তুলনামূলক সংখ্যাতত্ত্ব প্রকাশ করিতে হইলে (1) সরলরেখার দৈর্ঘ্য, (2) আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র ও বৃত্তের ক্ষেত্রফল, (3) ঘনক, সমকোণী চৌপল প্রভৃতির ঘনফল এবং (4) রূপচিত্র (Pictorial diagram) ও রাশি মানচিত্র (Statistical map) ইত্যাদি ব্যবহৃত হয়।

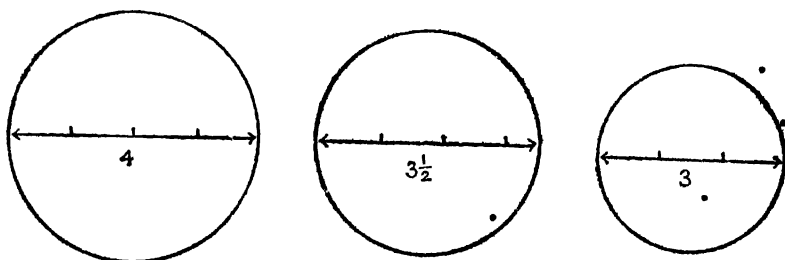
মনে কর একটি বালক প্রত্যেক মাসের প্রথম তারিখে ওজন লইয়া দেখিল জানুয়ারী মাসে 60 কি. গ্রা., ফেব্রুয়ারী মাসে 55 কি. গ্রা.; মার্চ মাসে 65 কি. গ্রা। বালকটির তিন মাসের ওজনের তুলনামূলক চিত্র লক্ষ্য কর:

[চিত্র 5·1, চিত্র 5·2

ঐ চিত্র দুইটি হইতে বালকটির তিন মাসের স্বাস্থ্য সম্বন্ধে ধারণা সহজে করা যায়। 5·1 চিত্রে সরলরেখাগুলি অনুভূমিকভাবে (Horizontally) অঙ্কিত করা হইয়াছে। এইরূপ লেখকে দণ্ডলেখ (Bar Graph) বলে। 5·2 চিত্রে সরলরেখাগুলি উল্লম্বভাবে অঙ্কিত করা হইয়াছে। ঐরূপ চিত্রকে স্তম্ভলেখ (Column Graph) বলে।

আবার মনে কর তিনটি ছাত্রের উচ্চতা যথাক্রমে 36 ইঃ, 49 ইঃ এবং 64 ইঃ। বালক তিনটির উচ্চতার তুলনামূলক চিত্র লক্ষ্য কর :

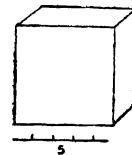
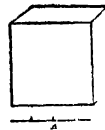
5·3 চিত্রে বর্গক্ষেত্রের সাহায্যে উচ্চতা প্রকাশ করা হইয়াছে। প্রথমে বর্গক্ষেত্র-

[চিত্র 5·3]

গুলির একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a একক, b একক এবং c একক ধরা হইল। ∴ উহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাতসমূহ উচ্চতাগুলির অনুপাতের সমান হইবে অর্থাৎ $a^2 : b^2 : c^2 = 36 : 49 : 64$ হইবে। উহা হইতে $a : b : c = 6 : 7 : 8$ হইল। এখন ছক্-কাগজে ছোট বর্গের একটি বাহুকে 1 ইঞ্চি ধরিলে সহজে বর্গক্ষেত্রগুলি অঙ্কিত করা যাইবে।

5·4 চিত্রে বৃত্তের সাহায্যে উচ্চতাগুলি তুলনা করা হইয়াছে। বৃত্তগুলির

[চিত্র 5·4]

ব্যাসার্ধ r_1, r_2, r_3, মনে করা হইল। বৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল উচ্চতাগুলির অনুপাত হইবে, $\therefore \pi r_1^2 : \pi r_2^2 : \pi r_3^2 = 36 : 49 : 64$ হইবে।

$\therefore r_1 : r_2 : r_3 = 6 : 7 : 8$ হইবে। এখন ছক্-কাগজে ছোট বর্গের 1 ঘর=2 ইঞ্চি ধরিয়া ছক্ কাগজে 3 ঘর, $3\frac{1}{2}$ ঘর এবং 4 ঘর লইয়া বৃত্ত আঁকিলেই বয়সগুলির তুলনামূলক লেখচিত্র অঙ্কিত হইবে। বৃত্ত চিত্রকে Pie diagram বলে।

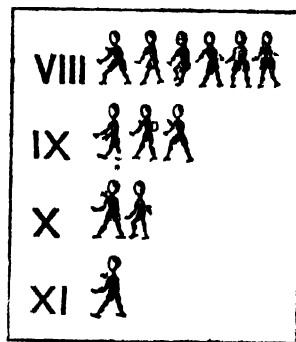
মনে কর, 48" উচ্চতা বিশিষ্ট নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 27, 64 এবং 125, তিন শ্রেণীর ঐ উচ্চতাবিশিষ্ট ছাত্রদের তুলনামূলক চিত্র অঙ্কিত করিতে হইবে। নিম্নে 5·5 চিত্র লক্ষ্য কর :

[চিত্র নং 5·5]

ঘনকের সাহায্যে উচ্চতাগুলির চিত্র প্রকাশ করিতে হইলে ঘনকগুলির বাহু যথাক্রমে a, b, c ধর। এখন ঘনকগুলির ঘনফলের অনুপাত উচ্চতাগুলির অনুপাতের সমান অর্থাৎ $a^3 : b^3 : c^3 = 27 : 64 : 125 \;\therefore a : b : c = 3 : 4 : 5$

$\therefore$ 3, 4, 5 একক বিশিষ্ট তিনটি ঘনক অঙ্কিত করিলেই উচ্চতাগুলির তুলনামূলক লেখচিত্র অঙ্কিত হইবে।

14 বৎসর বয়স্ক ছাত্রসংখ্যা অষ্টম শ্রেণীতে 150 জন, নবম শ্রেণীতে 75 জন, দশম শ্রেণীতে 50 জন এবং একাদশ শ্রেণীতে 25 জন আছে। নিম্নের চিত্রলেখর

স্কেল : ছবি=25 জন

VIII	6টি ছবি
IX	3টি "
X	2টি "
XI	1টি "

সাহায্যে এই বিষয়টি প্রকাশ করা যায় :—

রাশিবিজ্ঞানে আয়তলেখ এবং পরিসংখ্যা বহুভুজের সাহায্যে তুলনামূলক তথ্য প্রকাশ করা যায়। পূর্বে এ বিষয় আলোচিত হইয়াছে। সেজন্য এখানে পৃথকভাবে দেওয়া হইল না।

পাটীগণিত

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1A (পৃ: 6—9)

1. 335 3. 1100254032 5. A = 55, B = 79, C = 21
6. 523 7. 1266000 8. 652727 9. 67242
10 99904 11. 150, 100 12 10044 13. গুণক 807
14. ক = 21·03 খ = 14·02 16. 101 17. 45, 40 19. 137
20. 5. 21. 723 22 বালক 112, বালিকা 38 23. 4910
24. 300 টা. 25. 963 26. 57 বৎসর 27. 99679
28. 35 টাকা 29. 8 30. 9 দিন 31. 2.

প্রশ্নমালা 1B (পৃ: 9—10)

2. 75 3. A = 84 , B = 44, C = 56 4. 44 টাকা
5. 51 বৎসর 6. 11 বৎসর 7. 10 বৎসর 8. 1·0094 ·
9. 12 বৎসর 10. ·02 সেমি. 11. 48 বৎসর।

প্রশ্নমালা 1C (15—19)

3. 45 4. 1685 5. 10023 6. 14364 7. 11
11. 315 এবং 455 12. 9920 ; 10168 13. 996-9
14. 8143 ; 23704543 15. 24 16. 8 ঘ 20 মি. 30 সে;
15015, 10010, 6006, 2002, 1430, 462, 390 বার। 17 2101
18. 14403 19. 147 ; 777 20. 274, 21. 1683, 2431
22. 27, 45, 63 23. 197568 24. 56 25. 188121
27. 357 28. 3455 29. 14, 16 31. 10 মি. 71 সেমি.
32. 183 মি. 6 ডেসিমিটার। 34. 31 গ্যালনের 42টা 35. 9
37. 12 পয়সা। 38. 29টা ; 6 পয়সা 40. 2·25 পয়সা
41. 33 পয়সা ; 192টা 42. 64, 80 ; 80, 96 ; 43. 91

প্রশ্নমালা 2A (পৃ: 25—29)

1. (a) (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{97}{94}$ (iv) $\frac{33}{119}$

(b) (ii) $\frac{42}{48}$, $\frac{33}{48}$, $\frac{46}{48}$, (iii) $\frac{24}{12}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$

(c) (ii) বৃহত্তম হইতে $\frac{17}{20}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{23}{35}$, ক্ষুদ্রতম হইতে $\frac{23}{35}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{17}{20}$

(iii) বৃহত্তম হইতে $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$

(d) (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) 99000

2. (ii) $\frac{1}{30}$, $\frac{36}{5}$ (iii) $\frac{5}{378}$, $3\frac{1}{3}$

3. (i) $\frac{12}{245}$ (ii) $\frac{4}{7}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $\frac{1}{17}$

4 (i) $\frac{5}{28}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{97}{196}$, $\frac{6}{49}$ (ii) $\frac{21}{25}$, $\frac{29}{35}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{11}{15}$

5 (i) 29 (ii) $\frac{5}{8}$

6. (i) $\frac{5}{24}$, 350 (ii) $\frac{6}{35}$, 36

8. $\frac{25}{32}$ 9. পাকা 45টি, বড 30টি 10. $\frac{7}{12}$

11. 36 12. $1\frac{1}{14}$ 13. 315

15. $\frac{1}{1000}$ 16. $\frac{8}{155}$ 17. 24 টা., 36 টা., 48 টা.

18. $2\frac{3}{4}$ কি.গ্রা. 19. 500 টাকা 20. 65 পা.

21. 480 টা. 22. 5040 টা. 23. 50

24. $\frac{279}{800}$ 25. $\frac{1}{2}$ 26. 12 পা. 13 শি. 2 পে.

27. 123 পা 3 শি. 9 পে.

প্রশ্নমালা 2B (পৃ: 30—34)

1. (b) $\frac{3}{4}$ (c) $1\frac{1}{29}$ (e) 25

2. (b) $2\frac{7}{12}$ (c) $\frac{9}{16}$ (d) $3\frac{34}{215}$ (e) $4\frac{5}{14}$ (f) $\frac{3}{160}$

(3) 1 (4) $\frac{1}{24}$ (5) 75 (6) $\frac{37}{45}$ (7) 1

(8) ·9 9. (b) 4 (c) $20\frac{1}{11}$ (d) $\frac{5}{13}$

(10) $\frac{2}{3}$ (11) 2 (12) 1 (13) 0 (14) 1 (16) $\frac{5}{12}$ (17) $\frac{1}{40}$

(18) $1\frac{1}{16}$ (19) 1 (20) $11\frac{35}{47}$

প্রশ্নমালা 2C (পৃ: 39—41)

1. (i) 2632·71 (ii) 74·25 বৎসর (iii) 2·018 (iv) 41·18

(v) ·0000000225 (vi) 308 (vii) ·00527 (viii) 1·125

(2) (b) 30 (3) (b) ·58$\dot{3}$ (4) 21·54 (আসন্ন) (5) 8 (6) 0·2907 (7) 2·4 (8) ·01 (9) ·$\dot{1}$ (10) 14 (+0·25 এর স্থলে ×0·25 ধর) (11) 25 (12) 8 (13) 1 (14) 1 (15) ·04, ·0$\dot{3}\dot{6}$ (16) (a) ·025 (আসন্ন) (b) 1·2 (c) 36 মি. (17) (a) ·0002$\dot{7}$ (b) ·565 (c) A 48, B 84 (d) 1500 (e) 3000

প্রশ্নমালা 3 (পৃ: 44—46)

1. (a) (ii) 48 (iii) 95 (iv) 72 (b) (ii) 1205 (iii) 199 (iv) 115 2. (a) 2 (b) 6 (c) 2 (d) 2 (e) 900 3 (a) 2002 (b) 724 (c) 7589 (d) 1234 (e) 1679 (5) 252 জন (6) 142 (7) 657 (8) 38 জন (9) A 5, B 3, C 7 (10) 357 জন (11) 35 এবং 25 (12) 97 এবং 388 (13) (a) $\frac{7}{9}$ (b) 2$\frac{2}{3}$ (c) 3·4 (14) 5·403 (15) 13·057 (16) ·1057 (17) ·06435 (18) 54·0321 (19) (a) 1·414 (b) 2·236 (c) ·316 (d) 3·494 (e) ·942 (f) ·741 (g) ·377 (20) (1) 8 (2) 1 (3) 4 (4) 6 (5) 7 (6) 2 (7) 3 (8) 5 (21) 100489 (22) 900.

প্রশ্নমালা 4A (পৃ: 48—53)

2 74 ব. সে.মি, 3. 220 ব. ফু. 5. 14 ব. সে মি. 6. 50 ব. সে.মি. 7. 44 ব. সেমি, 8. 50 ব. সেমি. 9. 248 ব. সে.মি.। 10. 1024 খানা 11. 20 গজ, 10 গজ 12. 54000 13. 610 টাকা 14. 4 ফুট বর্গ 15. 1066·80 পয়সা 16. 1346·40 পয়সা 18. 480 ব. ই. 19 1500 ব. মি. 20. 8·76 পয়সা 21. 7 গ, 3$\frac{1}{2}$ গ, 3$\frac{1}{3}$ গ. 22. 124·80 পয়সা 23. 10 ফু. 24. 8$\frac{8}{9}$ ফু. 25. 1197 টা: 26 2 পা. 2 শি. 27. 2624 ব. ফু. ; 104 টাকা 96 পয়সা 28. 117 ফুট 29. 6 মি. 45 সেকেণ্ড 30. 30 মিটার 31. 2100 টাকা।

প্রশ্নমালা 4B (পৃ: 54—56)

5. 116$\frac{8}{36}$ ঘ. ফু 6. 96 ঘ. সে. মি. 7. 6 সে. মি. 8. 4 ফু. 6ই. 9. 6 সে. মি 10. 100 ব. ফু. 11. 7$\frac{1}{3}$ ঘ. ফু. 12. 12800

13. 2·16 লি. 14. 5 কি. গ্রা 4 ডে. গ্রা. 15. 42·9 সে. মি.
16. 1 কি. গ্রা. 5 হে. গ্রা. 17. ·016 সে. মি 18. 216 ঘ. ই.
19. 550 ঘ. ফু 20. 27072 21. 1105 খানা 22. 24640 ফু.
23. 15 ফুট 24. 100.

প্রশ্নমালা 5A (পৃ: 57—60)

4 60 জন 5. 760 টা. 50 প. 6. 20 দিন 7. 15 দিন 8 11 দিন
9. 38 একর 10. $4\frac{1}{2}$ পা. 11. $15\frac{5}{8}$ দিন 12. 18 13. 50 জন
14. 1430 15. 20 16. 15 17. 25 জন 18 125
19. $266\frac{2}{3}$ টাকা।

প্রশ্নমালা 5B (পৃ: 61—67)

5. 12 দিন 6. 10 ঘ. 7. 12 মি 8. 30 দিন 9. 20 দিন
10. 6 দিন 11. 50 দিন 12. $40\frac{10}{11}$ দিন 13. 8 মি. 15 $28\frac{1}{8}$ দিন
16. $1\frac{11}{13}$ দিন 17. 9 দিন 18 3 দিন 19. 30 দিন, 90 দিন
20. 8 মি 21 $56\frac{2}{3}$ মি. 22. 8 ঘ. 24. 5 টা. 20 মি. 25. $8\frac{4}{7}$ মি.
26. $2\frac{2}{7}$ ঘ. 27. $1\frac{2}{3}$ মি 28. 2 দিন 29. 12 দিন
30. A 12 টা. B 8 টা. C 2 টা 50 প.।

প্রশ্নমালা 5C (পৃ: 70—75)

4. 3 ঘ 5. 3 ঘ. 20 মি. 6 9 টা $9\frac{3}{13}$ মি. 8. 210 মাইল
9. $11\frac{1}{3}$ গজ 10. 5 টা 15 মি. 11. 5 ঘণ্টা 12 20 সেকেণ্ড
13. 444 কি. মি. 14 5 মাইল 15 13 ঘ 10 মি 16 3108 ঘণ্টা
17 প্রতি ঘণ্টায় 8 মাইল ; প্রতি ঘণ্টায় 2 মাইল 18. 1 মাইল
19. 250 গজ 20 $8\frac{7}{13}$ মি. 22. 72 সে , 36 সে
23. 110 গজ, ঘণ্টায় 45 মাইল 24. ঘণ্টায় 2 মাইল
26. ঘণ্টায় 4 মাইল 30. 5 কি মি., 2 কি. মি 31. $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

প্রশ্নমালা 6A. (পৃ: 77—81)

(4) 1080 (5) 288 টাকা (6) 20% (7) 437 পা.
(8) 550 টা. (9) 120 (10) 135

(11) 400 ব. সে. মি. ; 20% (12) 675 পা. (13) 45% ; 480
(14) 30 পা. 10 শি. 6 পে. (16) 88% (18) $39\frac{18}{33}$
(20) 8% (21) 300 (23) $2\frac{16}{17}$ প. (24) 80000 টাকা
(26) 2500 টাকা (27) 8% বৃদ্ধি (28) 4 লিটার।

প্রশ্নমালা 6B. (পৃঃ 82—86)

(6) 12 পা. 18 শি. $10\frac{69}{73}$ পে (7) 232 পা. 8 শি. $5\frac{1}{4}$ পে.
(8) 8% (9) 6 বৎসর (10) 300 টাকা
(12) 9000 টাকা (13) 75 টাকা (14) 4550 টাকা
(15) 4 বৎসর (16) $5\frac{1}{3}$ বৎসর (17) 300 টাকা, 4%
(18) 300 টাকা (19) $83\frac{1}{3}$ বৎসর (22) 9 বৎসর
(23) 40 বৎসর (24) 5 টা. 75 প. (25) 10000 টাকা
(26) 1500 টাকা (27) 9% (28) 12000 টাকা
(29) 10 বৎসর (30) 11550 টাকা, 3450 টা (31) 9000, 9750
(32) 6000, 4000.

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 89—91)

2 (i) 3 লক্ষ (ii) 286 হাজার (iii) 2857 শত (iv) 28572 দশ
3. (ii) 5 (iii) 7 (iv) 8 (v) 7 (vi) 8
4 (ii) 16 টা. (iii) 1 টাকা
5 (ii) ·3, ·25, ·255 (iii) 6·5, 6·46, 6·463 (iv) ·6, ·59, ·594
7. (i) 9·09 (ii) ·00932 (iii) ·000840
8. (i) ·428, ·429 (ii) 833, ·833 (iii) ·363, ·364
(iv) ·684, ·684 (v) 1·384, 1·385 (vi) 2·121, 2·121.
9. (i) ·13 (ii) ·56 (iii) ·92 (iv) ·18 (v) ·19
10. 2·374 11. 3 পা. 5 শি. 3 পে. (12) 6961 পাউণ্ড
13. (i) 2 ঘ. 2 মি. 6 সে. (ii) 4 গ্যালন 2 কো. 1 পাইন্ট
(iii) 4 টন 12 হ. 3 কো. 15. (i) 5, ·00571428 ; ·571428
(ii) ·005, ·00079, ·079 16. 11734 এবং 11954
17. 7310 এবং 7140

প্রশ্নমালা 8 (পৃঃ 93—97)

(4) 41 টাকা (5) 19 টা. 58 প. (6) 38 টা. 41 প. (7) 18 টা. 1 প.
(8) 30 টা. 56 প. (9) 19 পা. 11 শি 8 পে. (10) 62 পা 15 শি. 0 পে.
(11) 74 পা. 8 শি. 2 পে. (12) 41 ডলার 5 সেণ্ট (13) 42 ডলার 39 সেণ্ট
(14) 30 টা. 8 প. (15) 42 টা. 38 প. (16) 30টা. 55 প.
(17) 63 পয়সা (আসন্ন) (18) 15 টা. 25 প. (19) 2400 টা. (20) 500, 5%
(21) 1640 টা. (22) 1849 টাকা.

প্রশ্নমালা 9 (পৃঃ 99—105)

6. 44% লাভ 7. (a) $\frac{11}{10}$ (b) $\frac{9}{10}$ (c) $\frac{9}{8}$ (d) $\frac{37}{40}$
(e) $\frac{211}{200}$ (f) $\frac{461}{500}$ 8. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{10}{9}$ (c) $\frac{200}{213}$ (d) $\frac{200}{187}$
(e) $\frac{200}{201}$, (f) $\frac{400}{399}$ 9. $16\frac{2}{3}$% ক্ষতি (10) $33\frac{1}{3}$% লাভ (11) $1\frac{19}{31}$% লাভ
(12) (a) 550 টাকা (b) 200 টাকা (c) 50% (d) 25%
(e) 200 টাকা (f) $8\frac{1}{3}$% (16) 5% ক্ষতি (17) 1100 টাকা
(18) $6\frac{1}{2}$% লাভ (19) টাকায় 8টি (20) 40 টাকা (21) $12\frac{1}{2}$% লাভ
(22) $44\frac{52}{93}$ গিণি (23) $83\frac{3}{5}$% লাভ (24) 80 টাকা (25) 162·50 টাকা
(26) $17\frac{1}{11}$% লাভ (27) 2% লাভ (28) 5% লাভ (29) $2\frac{22}{39}$% লাভ (30) 21%
(31) $44\frac{4}{9}$% লাভ (32) 235 টাকা (34) 278 টা. 57 প (আসন্ন) (35) $12\frac{1}{2}$%,
(36) 200 টাকা (37) 4600 টাকা (3S) 50% (39) 8%

দশম শ্রেণীর পাঠ্যাংশ

প্রশ্নমালা 1A (পৃঃ 107—110)

5. (a) 2 : 3, 2 : 3, 1 : 2, 2 : 5, 5 : 7 (b) 25 : 32, 2 : 3, 9 : 11,
2 : 3 (c) 10 : 41, 1001 : 20000 ; 1 : 1 ; 2 : 1 ; 3 : 16 ; 51 : 250
(d) 2 : 5, 10 : 3, 95 : 81, 77 : 89 (e) 33 : 14, 45 : 43

6. (a) $\frac{7}{5}$, $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{5}$; 1 : $\frac{1}{2}$, (c) 6 ডে. মি. : 50 মি, 1 পা. 5 শি. : 2 পা.

7. (a) 1 : 7 (b) 3 : 25 (c) 1 : 2 (8) 18 : 35 (9) 5 : 3

(11) 63 মাইল (12) 135 গ্যালন, 30 গ্যালন, (13) 7 : 16 (14) 10 : 21
(15) 33 মি, (16) 15 : 16. (18) 5 জন (19) 25 গ্যালন (20) 16 : 15
(21) 8 : 15.

প্রশ্নমালা 1B (পৃ: 112)

5. (i) 24 (ii) 15 (iii) 0002 (iv) ·01 (v) 50 টাকা
(vi) 9 গ্রা (vii) 40 কি. গ্রা. (viii) 10 হন্দর
6. (i) 4 (ii) 16 (iii) 25 (iv) 63 (v) $3\frac{3}{4}$ (vi) ·06
7. (i) 80 (ii) 16 (iii) 6 4 (iv) $1\frac{13}{32}$ 8 $2\frac{2}{3}$ মি.
9. 15·75 লিটার 10 12 জন 11 2 টন 10 হ. 12 48
13. 56 : 84 : 105 : 135 , 56 : 135 14 729 15. 32 বৎসর
16 150 17. 2 : 7 18. 5 : 3 : 2 19. 350, 450
20. 25, 30 21. 24 বৎসর 22. 85, 68 23. 16 : 24 : 30 : 35

প্রশ্নমালা 1C (পৃ: 15—17)

3. $2\frac{37}{54}$ টাকা 4. 60 টাকা 5. 20 টাকা 6. 6 দিন
7. 90 জন 8. 8 দিন 9 30 দিন 10. 15 দিন
11 60 দিন 12. 18 জন 13. 60 দিন 14. 105 দিন
15. 7 সেকেণ্ড

প্রশ্নমালা 1D (পৃ: 18—20)

3. 40 জন 4. 75 দিন 5. 24 কামান 6 270 জন
7. 600 জন 8 : 10 9. 63 দিন 10 32 দিন
11 10 ঘণ্টা 12. 10 শি 8 পে. 13. 8 14. 324 টাকা
15. 405 জন 16. 3 ঘণ্টা 17 1250 18. 55 জন

প্রশ্নমালা 1E (পৃ: 21—26)

6. 12, 15 7. 5 টা, 10 টা , 15 টা. 8. 6. 9, 12, 15, 18 9. 9, 15
10. 90 টা , 80 টা., 132টা. 11 48 টা., 72 টা , 96 টা. 12 256 টা.
13 A 50 টা , B 37 টা 50 প , C 25 টা.
14 A 6 পা 10 শি., B 13 পা., C 32 পা. 10 শি.

15 A 32 টা., B 40 টা., C 44 টা

16 A 162 রান, B 108 রান, C 72 রান।

17. 168 টা, A 24 টা, B 60 টা, C 84 টা।

18. পুরুষ 40 পা., 10 শি, স্ত্রীলোক 30 পা., বালক 21 পা. 12 শি.

19. 10 20 40 প, 16 21. $25\frac{10}{79}$ হন্দর

22. A 132 পা. B 65 পা, C 33 পা, D 99 পা.।

23 25000 টা. (24) বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ মি. ও $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ মি.

25 5 হন্দর, 3 হন্দর, 1 হন্দর 26. 52 27. 4 ঘ. $36\frac{12}{13}$ মি

28. 78 টাকা 29. 65, 105, 165 30. 33·6 কি.গ্রা.

প্রশ্নমালা 1F (পৃ: 126—130)

3 A 50 টা, B 60 টা, C 70 টা. 4 A 60 টা., B 30 টা, C 20 ট

5 A 88 পা., B 80 পা, C 68 পা

6. C এর ক্ষতি সর্বাপেক্ষা বেশী, A এর ক্ষতি 200 টা., B এর ক্ষতি 300 টাকা, C এর ক্ষতি 400 টাকা 7. 5000টাকা

8 A 720 টা. B 1050 টা., C 900 টা.

9. A 356 টা., 25 প., B 118 টা, 75 প.

10 A 375 টা., B 150 টা, C 225 টা.

11. A 1800 টা, B 2400 টা., C 3000 টা.

12 391 পা., 529 পা., 1311 পা. 13. 1066 পা. 13 শি. 4 পে

14 A 480 টা., B $533\frac{1}{3}$ টা., C $466\frac{2}{3}$ টা

15. A $3451\frac{17}{25}$ টা, B $2870\frac{2}{5}$ C $862\frac{23}{25}$ টা. 16. 736 টা.,

17. 23 পা 5 শি. 9 পে. 30 পা, 14 শি 3 পে 19. A 230 পা, B 300 পা.

20. 1500 টা. 21. A 160 টা, B 240 টা, C 600 টা.

22 10,000 টাকা 23 A 288 টা., B 270 টা., C 216 টা., D 126 টা.

প্রশ্নমালা 1 G (পৃ: 131—137)

5. 1 : 3 6. 5 : 1 7. 3 : 5 8. 4 শি. 6 পে. 9. 2 : 1

10. 7 : 4 11. প্রতি পাউণ্ড 1 টা. 12. $1\frac{2}{3}$ ডেসি. লি.

13. 401 : 544 14. $\frac{1}{3}$ অংশ 15. $\frac{1}{5}$ অংশ 16. $25\frac{1}{8}$%

19. 20 : 7 ; 5 শি. $1\frac{1}{2}$ পে. 20. $\frac{3}{4}$, প্রতিবারে $\frac{1}{4}$ অংশ 21. 45 গ্যালন

22 1 : 1 : 6 23. 52 : 78 ; 51 : 68

24. প্রথম পাত্রের $9\frac{256}{539}$ গ্যালন জল এবং $1\frac{283}{539}$ গ্যালন মদ, দ্বিতীয় পাত্রে $1\frac{283}{539}$ গ্যালন জল এবং $4\frac{256}{539}$ গ্যালন মদ 25. 4 : 5 26. 3 : 5.

প্রশ্নমালা 2A (পৃ: 139—142)

6. 6·25 প. 7. 9600 টাকা 8. 6090 টাকা 9. 2592 পা.

10. 6400 পা 11. 1682 পা. 13. 4500 টাকা 14. 1562 টা. 50 প.

15. $7\frac{3}{4}$ পে. 16. 205 টাকা 17. 3 প. 18. 2812 টা 50 প.

19 9400 পা. 20. 365 টা. 21. 11625 টা.

প্রশ্নমালা 2B (পৃ: 142—144)

3. $\frac{1}{8}$ টা. 4. $66\frac{2}{3}$ টা, 5. 6 ঘণ্টা 6. 19 শি. 3 পে. 7 128 দিন

8. $\frac{4}{19}$ টা. 9. 6টি 10. 50 জন 11. 16 ঘণ্টা 12. 640 মি.

প্রশ্নমালা 2C (পৃ: 147—149)

4. 15 টাকা 5 3375 টাকা 6. 632 পা 16 শি. 3 পে.

7. 1 শি. $10\frac{1}{2}$ পে. 8. 1 শি. 6 পে. 9. 7500 পা. ।

10. $12\frac{4}{5}$ টা., $133\frac{1}{3}$ টা. লাভ 11. 3000 পাউণ্ড 12. 17 শি. 6 পে.

13. 15·625 টাকা 14. 1231 পা. 17 শি. 6 পে. 15. 48000 টাকা

16. 1920 মার্ক 17. 15826·56 টাকা ।

প্রশ্নমালা 3 (পৃ: 151—153)

2. 30 হে. মি. 6 ডে. মি. 4. 749·301…মি. মি. 5. 1 শি. 6 পে. (প্রায়)

6. ·486 গ্রাম 7. 9·996……পা. 8. 2·115 ঘ. ই.

9. 13494·635 গ্রাম 10. 2000 ঘ. সে. মি. 11. 28

12. ·097 (আসন্ন) 13. 1056·8 14. 7 14

15 1109 পা. 15 শি 4·8 পে. (প্রায়) 16. 196978773 ব. ফু (আসন্ন)

17. 1 শি. 11 পে. 1 ফা. 18 51·1 গজ 19. 500 ডলার 20. $227\frac{4}{5}$টা.

21. $4545\frac{6}{11}$ ঘ. সে. মি. 22. 453 গ্রাম 23 ·3245
24 61·5 ফুট [1 মিটার = 39 37 ইঞ্চি পড়] 25. 28279·70 সে. মি.
26. 20 8 ব. মিটার [1 সেমি. = 3937 ইঞ্চি পড]

বিবিধ প্রশ্নমালা 1 (পৃ: 161—166)

প্রশ্নপত্র 1

1. 48900 2. 257040 3 37 97925 পা. 4. 5.

প্রশ্নপত্র 2

1. 18 শি. 9 পে 2. 2 মি 7 সে. মি 3 70 মাইল
4. 3 পা. 14 শি. $6\frac{1}{4}$ পে. 5. 2 0193625 6 1·0003

প্রশ্নপত্র 3

1. 3591 পা. 8 শি $5\frac{1}{2}$ পে. 2 120 3. 8500 টা.
4. 8 5 1600 টা , $7\frac{1}{2}$%

প্রশ্নপত্র 4

1 101 2 02 ইঞ্চি 3 6 পা , 8 পা , 10 পা
4 350 টা. 5. 5 6. 2 টা $10\frac{10}{11}$ মি.

প্রশ্নপত্র 5

1. $12\frac{1}{2}$% লাভ 2. 64 11561 প. 3. টা. 15 25
4 $13\frac{1}{3}$ পা. 5 টা $9\frac{99}{200}$.

প্রশ্নপত্র 6

1. 16 ফুট 2. 12 দিন 3 B 1600 টা , C 2400 টা.
4. 8 পা. 10 শি. 5. $1\frac{1}{18}$.

প্রশ্নপত্র 7

1. 750 পা. 2 28 গজ 3. 239 197 ব. গ 4. 35 টা.
5 28 দিন।

প্রশ্নপত্র 8

1. 8 ফুট 2. 6 প. 3. $16\frac{2}{3}\%$ 4. 15 মিনিট 5 22 গ্যালন।

প্রশ্নপত্র 9

1. 4 টা. $5\frac{5}{11}$ মি. এবং 4 টা. $38\frac{2}{11}$ মি. 2. 63 দিন
3. 1 পু. = 2 বা. 4 A 240 টা., B 132 টা 5 70 আউন্স

প্রশ্নপত্র 10

1. 510 টাকা 2. 187.6 সে. মি, 62.5 সে মি 3. 9 ঘণ্টা
4. 6 টা. 5. সেকেণ্ডে 1100 ফুট।

রাশিবিজ্ঞান

প্রশ্নমালা 1 (পৃ: 179—180)

7.							
10	25	34	40	47	58	65	76
12	28	36	41	47	58	67	76
17	30	37	42	50	62	69	80
19	30	38	44	52	62	70	81
20	32	39	44	55	65	75	90

8. (a) (i) 10, 90 (b) 81 (c) 22 (d) 6.

11. বিভাগসীমা (প্রথম হইতে) 19 5 – 29·5, 29·5 – 39 5, 39·5 – 49 5. 49·5 – 59·5, 59·5 69 5, 69 5 – 79·5, 79 5 – 89·5, 89·5 – 99 5

মধ্যমান (প্রথম হইতে)-- 24 5, 34·5, 44 5, 54 5, 64 5, 74 5, 84 5, 94 5

প্রশ্নমালা 2 (পৃ: 193—195)

1. (a) 12 (b) $6\frac{2}{3}$ (c) 7 2 2 722 3 558·25

4. 36 5. $8\frac{3}{4}$ বৎসর 6. 65·2 কি. গ্রা. 7. 39 3 8. 20

9. 47·5 10. 67 3 কি. গ্রা, 11. (a) 9 (b) 4 মাস ও 5 মাস

12. 16 13 (a) ভূয়িষ্ঠক 6, মধ্যমা 6, মধ্যক 6·0

(b) ভূয়িষ্ঠক 37, মধ্যমা 36, মধ্যক 37.

15. (a) মধ্যক = 60·76 ; মধ্যমা—60·79 ; ভূয়িষ্ঠক = 60 85

(b) মধ্যক = 87 5, মধ্যমা = 87·5, ভূয়িষ্ঠক = 87·5

(c) মধ্যক = 8·85, মধ্যমা = 8·55, ভূয়িষ্ঠক = 7·95

(d) মধ্যক = 22·28, মধ্যমা = 22·28, ভূয়িষ্ঠক = 22 28

প্রশ্নমালা 3 (পৃ: 202—203)

1. 12 2. 4·8 3. $1\cdot\dot{6}$ ইঞ্চি 4. $1\dot{2}$ (কি. গ্রা.) 5. 3·16

6. $2\sqrt{2}$ 7. 1·8 বৎসর (আসন্ন) 8. 14·9 (আসন্ন)

9. ·301 (পা.) 10. 4·38 (নম্বর)।

জ্যামিতি

(নবম শ্রেণীর পাঠ্য)

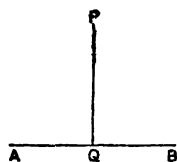
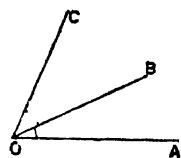
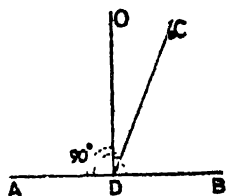
1

কয়েকটি জ্যামিতিক সংজ্ঞা

পুনরালোচনা

1·1. সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীতে অধীত বিষয়ের কয়েকটি অপরিহার্য সংজ্ঞার পুনরালোচনা আবশ্যক। এখন তাহারই কয়েকটি আলোচনা করা হইতেছে।

1. একই শীর্ষবিন্দুতে অবস্থিত এবং একই সাধারণ বাহুর উভয় পার্শ্বস্থিত দুইটি কোণকে **সন্নিহিত কোণ** (Adjacent angles) বলে।

2. যদি একটি সরলরেখার যে কোন বিন্দুতে অপর একটি সরলরেখা এমনভাবে মিলিত হয় যেন উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকটি কোণকে **সমকোণ** (Right angle) বলে এবং সরলরেখা দুইটির একটিকে অপরটির উপর **লম্ব** (Perpendicular) বলে। $\angle AQP = \angle BQP$.
$\therefore$ উহারা প্রত্যেকেই সমকোণ এবং AB, PQ-এর উপর ও PQ, AB-এর উপর লম্ব।

3. যদি একটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার মধ্য বিন্দুতে লম্ব হয় তাহা হইলে প্রথম সরলরেখাকে দ্বিতীয়টির **লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক** (Perpendicular bisector) বলা হয়। $\because$ AB-র মধ্যবিন্দু D এবং $OD \perp AB$ $\therefore$ OD, AB-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

4. দুইটি কোণের সমষ্টি এক সমকোণ বা 90° হইলে, একটিকে অপরটির **পূরক** (Complement) এবং কোণদ্বয়কে **পূরক কোণ** (Complementary angles) বলে। $\angle ODC$ এবং $\angle BDC$ পূরক কোণ।

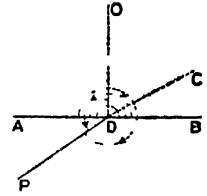
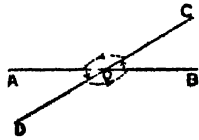
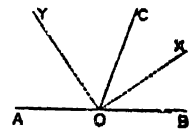
5. যদি দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180° হয় তাহা হইলে কোণদ্বয়কে **সম্পূরক কোণ** (Supplementary angles) এবং একটিকে অপরটির **সম্পূরক**

(Supplement) বলে। $\angle ADC + \angle BDC = 180°$ $\therefore$ $\angle ADC$ ও $\angle BDC$ সম্পূরক কোণ।

6. যে কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর তাহাকে **স্থূলকোণ** (Obtuse angle) বলে। $\angle ADC$ স্থূলকোণ।

7. এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে **সূক্ষ্মকোণ** (Acute angle) বলে। $\angle CDB$ সূক্ষ্মকোণ।

8. যে কোণের পরিমাণ দুই সমকোণ বা 180°-র সমান তাহাকে **সরলকোণ** (Straight angle) বলে। $\angle ADB$ সরল কোণ।

9. দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু চারি সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোণকে **প্রবৃদ্ধ** বা **প্রত্যাবর্তী কোণ** (Reflex বা Re-entrant angle) বলে। $\angle BDP$ বা $\angle ADC$ প্রবৃদ্ধ বা প্রত্যাবর্তী কোণ।

10 দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের পরস্পর বিপরীত দুই দুইটি কোণকে **বিপ্রতীপ কোণ** (Vertically opposite angles) বলে। $\angle AOD$ এবং $\angle BOC$, $\angle AOC$ এবং $\angle BOD$ পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ।

11. কোন কোণের যে কোন একটি **বাহুকে** (Arm) বর্ধিত করিলে যে সন্নিহিত সম্পূরক কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে পূর্বোক্ত কোণের **বহিঃকোণ** (Exterior angle) বলে ; এবং **প্রথম কোণটিকে অন্তঃকোণ** (Interior angle) বলে। BOC কোণের BO বাহু বর্ধিত হইয়া সন্নিহিত $\angle AOC$ সম্পূরক হইয়াছে। $\therefore$ $\angle AOC$ বহিঃকোণ এবং $\angle BOC$ অন্তঃকোণ।

12. যে সরলরেখা কোনও কোণকে সমান দুইটি কৌণিক অংশে বিভক্ত করে তাহাকে উক্ত কোণের **সমদ্বিখণ্ডক** (Bisector) বলে। $\because$ $\angle BOX = \angle COX$ $\therefore$ OX, $\angle BOC$-র সমদ্বিখণ্ডক।

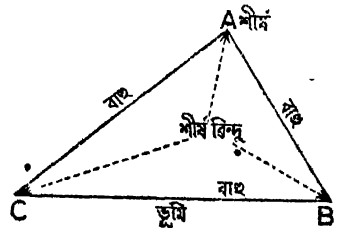
অন্তঃকোণের সমদ্বিখণ্ডককে **অন্তঃ-সমদ্বিখণ্ডক** (Internal bisector) এবং বহিঃকোণের সমদ্বিখণ্ডককে **বহিঃ-সমদ্বিখণ্ডক** (External bisector) বলে। BOC কোণের OX অন্তঃ-সমদ্বিখণ্ডক এবং OY বহিঃ-সমদ্বিখণ্ডক।

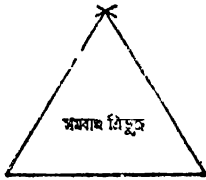
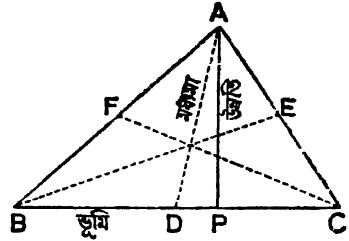
13. **দূরত্ব :** দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাই উহাদের ন্যূনতম **দূরত্ব**। একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর লম্বই সরলরেখা হইতে বিন্দুটির **দূরত্ব**। সুতরাং দূরত্ব বলিলে **লম্ব-দূরত্বই** (Perpendicular distance) বুঝায়। ঐ লম্ব ব্যতীত অন্য যে সকল সরলরেখা বিন্দুটি হইতে সরলরেখার উপর অঙ্কিত করা যায় তাহাদের সবগুলিই **তির্যক্** (Oblique) রেখা।

14. কোনও তলের উপর অবস্থিত দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা যদি ঐ তলের সহিত সম্পূর্ণরূপে মিশিয়া যায় তাহা হইলে ঐ তলকে সমতল (Plane) বা (Plane Surface) বলে। আর যদি না মিশিয়া যায় তাহা হইলে উহাকে **অসমতল, বক্রতল** বা **বিষমতল** (Curved Surface) বলে।

15. এক বা তদধিক রেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতলকে সামতলিক **ক্ষেত্র** বা **সমতল ক্ষেত্র** (Plane figure) বলে।

16. কেবলমাত্র সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে **ঋজুরেখ ক্ষেত্র** (Rectilineal figure) বলে। ইহার বাহুগুলি সমান হইলে **সমবাহু** (Equilateral) এবং কোণগুলি সমান হইলে **সদৃশকোণী** (Equiangular) **ঋজুরেখ ক্ষেত্র** বলে। যদি ক্ষেত্রের কোনও কোণ প্রবৃদ্ধ কোণ থাকে তাহাকে **প্রবৃদ্ধকোণী ঋজুরেখ ক্ষেত্র** (Concave rectilineal figure) বলে। ঋজুরেখ ক্ষেত্র সমবাহু ও সদৃশকোণী হইলে উহাকে **সুষম ক্ষেত্র** (Regular figure) বলে। ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুর সমষ্টিকে উহার **পরিসীমা** (Perimeter) বলে।

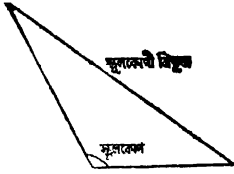
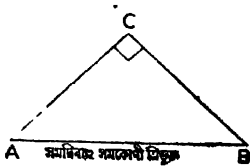
17. কেবলমাত্র তিনটি সরলরেখা (বাহু) দ্বারা বেষ্টিত সামতলিক ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ** (Triangle) বলে। অর্থাৎ তিন বাহু বিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র ত্রিভুজ। ত্রিভুজ মাত্রেরই তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ থাকে। যে বিন্দুতে ত্রিভুজের দুইটি বাহু মিলিত হয় তাহাকে **শীর্ষবিন্দু** বা **কৌণিক বিন্দু** (Angular points) বলে। A,B,C, শীর্ষবিন্দু।

ত্রিভুজের যে কোন একটি বাহুকে **ভূমি** (Base) ধরিলে, উহার বিপরীত কৌণিক বিন্দুকে ঐ ভূমি সম্পর্কে ত্রিভুজের **শীর্ষ** (Vertex) বলে। BC ভূমি, A শীর্ষ।

18. ত্রিভুজের যে কোন একটি কৌণিক বিন্দু এবং উহার বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে ত্রিভুজের **মধ্যমা** (Median) বলে। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি করিয়া মধ্যমা থাকে। AD, BE, CF মধ্যমা। ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বকে ত্রিভুজের **উচ্চতা** বা **উন্নতি** (Altitude বা Height) বলে। AP উচ্চতা।

19. (ক) ত্রিভুজের তিনটি বাহু সমান হইলে উহাকে **সমবাহু ত্রিভুজ** (Equilateral triangle) বলে।

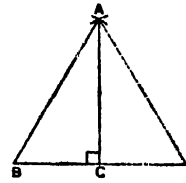
(খ) ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হইলে উহাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (Isosceles triangle) বলে। ইহার অসমান বাহুটিকে **ভূমি** (base) ও তাহার বিপরীত কৌণিক বিন্দুকে **শীর্ষ** (Vertex) বলে।

(গ) ত্রিভুজের তিনটি বাহু পরস্পর অসমান হইলে ইহাকে **বিষমবাহু ত্রিভুজ** (Scalene triangle) বলে।

(ঘ) ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ হইলে তাহাকে **সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled triangle) বলে। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বৃহত্তম বাহুকে ত্রিভুজটির **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে।

(ঙ) ত্রিভুজের **একটি কোণ স্থূল-কোণ** হইলে উহাকে **স্থূলকোণী ত্রিভুজ** (Obtuse-angled triangle) বলে।

(চ) ত্রিভুজের **তিনটি কোণই সূক্ষ্ম-কোণ** হইলে উহাকে **সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ** (Acute-angled triangle) বলে।

(ছ) সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হইলে উহাকে **সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled isosceles triangle) বলে।

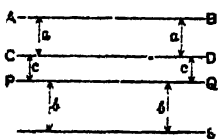
(জ) সমবাহু ত্রিভুজের একটি **মধ্যমা** দ্বারা **দ্বিখণ্ডিত** একটি ত্রিভুজকে একটি **অর্ধ সমবাহু ত্রিভুজ** (Semi-equilateral triangle) বলে।

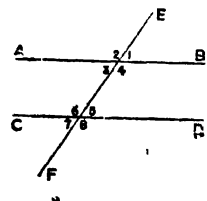
(ছ) ও (জ) এই দুই আকারের ত্রিভুজ জ্যামিতি বাক্সে থাকে, ইহাদিগকে **ত্রিকোণী** (Set squares) বলে।

অর্ধ সমবাহু ত্রিভুজ

20. **ত্রিভুজের সর্বসমতা** (Congruency of triangles) : প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ, মোট ছয়টি অঙ্গ আছে। একটি ত্রিভুজের এই ছয়টি অঙ্গ অপর ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের সহিত সমান হইলে ত্রিভুজদ্বয়কে **সর্বসম** বা **সর্বতোভাবে সমান** (Equal in all respects, Identically equal বা Congruent) বলা হয়। এইরূপ সর্বসম ত্রিভুজের একটিকে অপরটির উপর যথাযথভাবে **উপরিপাতন** (Super-position) করিলে উহারা সম্পূর্ণভাবে মিলিয়া যায়। সেইজন্য **সর্বসম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলও সমান**।

দুইটি সর্বসম ত্রিভুজের পরস্পর সমান বাহুর বিপরীত কোণগুলিকে **অনুরূপ**

কোণ (Corresponding angles) এবং পরস্পর সমান কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে **অনুরূপ বাহু** (Corresponding sides) বলে।

21. **একই সমতলে অবস্থিত** সরলরেখাগুলি **উভয়দিকে** যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করিলেও উহারা যদি পরস্পর **মিলিত না হয়,** তাহা হইলে তাহাদিগকে

সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel straight lines) বলে। সমান্তরাল সরলরেখাগুলির সর্বত্র পরস্পর লম্ব-দূরত্ব একই থাকে। AB, CD, PQ, RS, সমান্তরাল সরলরেখা। উহাদের পরস্পর লম্ব-দূরত্ব সর্বত্র সমান।

22. যে সরলরেখা অপর দুই বা ততোধিক সরলরেখাকে ছেদ করে, তাহাকে **ছেদক** বা **ভেদক** (Transversal) বলে। EF সরলরেখা AB ও CDর ভেদক। ভেদক দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে আটটি কোণ উৎপন্ন হয়। নিম্নের চিত্রে এই আটটি কোণকে সংখ্যাদ্বারা চিহ্নিত করা হইয়াছে। ইহাদের মধ্যে 3, 4, 5, ও 6 চিহ্নিত কোণগুলি AB, ও CD-র মধ্যে আছে বলিয়া ইহাদের **অন্তঃকোণ** (Interior angles) বলে এবং 1, 2, 7 ও 8 বাহিরে আছে বলিয়া উহাদের **বহিঃকোণ** (Exterior angles) বলে। অন্তঃকোণগুলির মধ্যে 3 ও 6 এবং 4 ও 5কে **ভেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ** (Interior angles on the same side of the transversal) বলে এবং ইহাদের বিপরীত দিকে অবস্থিত কোণদ্বয়ের একটিকে অপরটির **একান্তর কোণ** (Alternate angles) বলে। 3 ও 5 এবং 4 ও 6 একান্তর কোণ। 1 এবং 5, 2 এবং 6, 7 এবং 3, 8 এবং 4—ইহারা ভেদকের একই পার্শ্বের একটি বহিঃকোণ, অপরটি বিপরীত অন্তঃকোণ ; ইহাদের **অনুরূপ কোণ** (Corresponding angles) বলে।

23. গণিতশাস্ত্রে কতকগুলি সিদ্ধান্ত এতই সহজ ও সরল যে তাহাদের কোনও প্রমাণ প্রয়োজন হয় না। ইহারা প্রমাণিত ও সত্য বলিয়া গৃহীত হইয়াছে। ইহারা **স্বতঃ** অর্থাৎ নিজ হইতে সিদ্ধ এবং প্রমাণিত বলিয়া ইহাদের **স্বতঃসিদ্ধ** (Axiom) বলে। আবার কতকগুলি সিদ্ধান্ত আমরা স্বীকার করিয়া লইয়া অন্য সিদ্ধান্ত প্রমাণ করি, সেইগুলিকে **স্বীকৃত সিদ্ধান্ত** বলে।

24. কোনও জ্যামিতিক তথ্য প্রমাণ বা সমালোচনা, কিংবা কোনও জ্যামিতিক অঙ্কন প্রণালী ও তাহার যুক্তিকে **প্রতিপাদ্য** বা **প্রতিজ্ঞা** (Proposition) বলে।

অর্থাৎ যে কোনও জ্যামিতিক বিষয় প্রমাণযোগ্য ও অঙ্কনযোগ্য তাহাই প্রতিপাদ্য বা প্রতিজ্ঞা।

যে প্রতিজ্ঞাতে জ্যামিতিক কোনও ধর্ম বা কোনও তথ্য যুক্তি দ্বারা প্রমাণ করিতে হয় তাহাকে **উপপাদ্য** (Theorem) বলে।

যে প্রতিজ্ঞাতে জ্যামিতিক কোনও অঙ্কন প্রক্রিয়া সম্পন্ন ও তাহার যুক্তি আলোচনা করা হয় তাহাকে **সম্পাদ্য** (Problem) বলে।

25. প্রতিজ্ঞার চারিটি অংশ। (ক) **সাধারণ নির্বচনে** (General enunciation) কি তথ্য প্রমাণ করিতে হইবে বা কি অঙ্কন সম্পন্ন করিতে হইবে ইহা সাধারণভাবে উল্লেখ থাকে।

(খ) **বিশেষ নির্বচনে** (Particular enunciation) চিত্রের সাহায্যে কি প্রমাণ করিতে হইবে বা কি অঙ্কন সম্পন্ন করিতে হইবে তাহাই উল্লেখ করিতে হয়।

(গ) প্রমাণ করিবার জন্য কিংবা অঙ্কন প্রক্রিয়ার সাহায্যের জন্য যে সকল অঙ্কন প্রয়োজন, ইহা বর্ণনা করা হয় **অঙ্কনের** (Construction) মধ্যে।

(ঘ) সর্বশেষ প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ হইবার জন্য যে যুক্তি তর্কের অবতারণা করা হয় তাহাই **প্রমাণের** (Proof) ভিতর উল্লেখ থাকে।

নির্বচনে যে সকল তথ্য প্রদত্ত থাকে তাহাকে **কল্পনা** বা **স্বীকার** (Hypothesis) এবং যাহা প্রমাণ করিতে হইবে তাহাকে **সিদ্ধান্ত** (Required to prove বা Conclusion) বলা হয়।

যদি কোনও প্রতিজ্ঞার স্বীকার ও সিদ্ধান্ত অপর প্রতিজ্ঞার সিদ্ধান্ত ও স্বীকার হয় তাহা হইলে শেষোক্ত প্রতিজ্ঞাটিকে প্রথমোক্ত প্রতিজ্ঞার **বিপরীত প্রতিজ্ঞা** (Converse Proposition) বলে।

যে সকল জ্যামিতিক তথ্য সহজেই কোনও প্রতিজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ করা যায় তাহাদের ঐ প্রতিজ্ঞার **অনুসিদ্ধান্ত** (Corollaries) বলে।

26. **সাঙ্কেতিক চিহ্ন:** জ্যামিতিতে সংক্ষেপে বিষয়বস্তু প্রকাশের জন্য নিম্নলিখিত চিহ্নগুলি ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

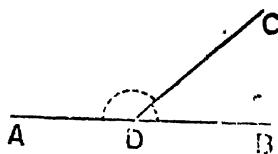
$\triangle$ ত্রিভুজ। ▱ সামান্তরিক। $\odot$ বৃত্ত। ○ পরিধি। ▭ আয়তক্ষেত্র। □ বর্গক্ষেত্র। $\therefore$ অতএব বা সুতরাং। $\because$ যেহেতু। $=$ সমান। $\neq$ সমান নহে। $\equiv$ সর্বসম। $\angle$ বা $\wedge$ কোণ। সম $\angle$ সমকোণ। $\parallel$ সমান্তরাল। $\nparallel$ সমান্তরাল নহে। $\perp$ লম্ব। $>$ বৃহত্তর। $<$ ক্ষুদ্রতর। $\sim$ পার্থক্য।

পূর্ব শ্রেণীতে অধীত উপপাদ্য

পুনরালোচনা

2·1. পূর্বশ্রেণীতে যে সকল উপপাদ্য, স্বীকৃতসিদ্ধান্ত ও স্বতঃসিদ্ধ অধ্যয়ন করা হইয়াছে এখানে তাহাই সংক্ষেপে আলোচনা করা হইতেছে।

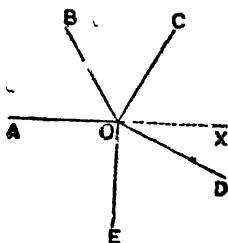
স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 1. একটি সরলরেখার কোন বিন্দুতে আর একটি সরলরেখা মিলিত হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

CD সরলরেখা ABর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। $\angle ADC + \angle CDB = 2$ সম $\angle$।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 2. দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

উপরের চিত্রে যদি $\angle ADC + \angle CDB = 2$ সম $\angle$ হয়, তাহা হইলে DA ও DB একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

অনুশীলনী 2·1

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. কয়েকটি সরলরেখা একই বিন্দুতে মিলিত হইলে যে সকল কোণের সৃষ্টি হয় উহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

মনে করা যাউক AO, BO, CO, DO, EO সরলরেখা O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = 4$ সম $\angle$.

AO সরলরেখাকে Oর দিকে X পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

এক্ষণে সন্নিহিত কোণ $\angle AOB + \angle BOC + \angle COX = \angle AOB + \angle BOX = 2$ সম $\angle$ এবং $\angle DOX + \angle DOE + \angle EOA = 2$ সম $\angle$. $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle DOE + \angle EOA = \angle AOB + \angle BOC + \angle COX + \angle DOX + \angle DOE + \angle EOA = 2$ সম $\angle + 2$ সম $\angle = 4$ সম $\angle$.

2 যে কোনও কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব।

[D. B. 1943]

মনে করা যাউক OX এবং OY সরলরেখা $\angle BOC$র অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ করিতে হইবে $\angle XOY = 1$ সম $\angle$.

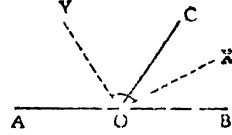
প্রমাণ : $\angle COX = \frac{1}{2}\angle BOC$;

$\angle COY = \frac{1}{2}\angle AOC$.

$\therefore \angle COX + \angle COY$

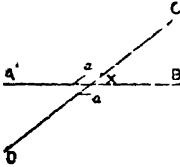
$= \frac{1}{2}\angle BOC + \frac{1}{2}\angle AOC$

বা $\angle XOY = \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle AOC)$

বা $\angle XOY = \frac{1}{2} \times$ দুই সম $\angle = 1$ সম $\angle$

3 AB সরলরেখার X বিন্দুতে CX ও DX দুইটি সরলরেখা ABর বিপরীত দিকে এরূপভাবে টানা হইল যে, $\angle AXC = \angle DXB$; প্রমাণ কর যে CX ও DX একই সরলরেখায় অবস্থিত।

প্রমাণ : কল্পনা অনুসারে $\angle AXC = \angle DXB$

এক্ষণে $\angle AXC + \angle AXD = \angle DXB + \angle AXD = 2$ সম $\angle$ (কারণ ইহারা সন্নিহিত $\angle$)

$\therefore \angle AXC + \angle AXD = 2$ সম $\angle$.

অতএব CD ও DX একই সরলরেখায় অবস্থিত।

4 AB রেখার একই পার্শ্বে $\angle DAB$ ও $\angle CAB$ দুইটি কোণ। AP রেখা $\angle DAC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর $\angle DAB + \angle CAB = 2\angle PAB$.

[C. U. 1982]

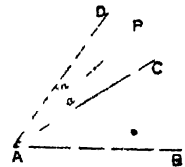
প্রমাণ : $\angle DAP = \angle CAP$ (কল্পনা)

$\therefore \angle DAB + \angle CAB$

$= \angle DAP + \angle PAB + \angle CAB$

$= \angle CAP + \angle PAB + \angle CAB$

$= (\angle CAP + \angle CAB) + \angle PAB$

$= \angle PAB + \angle PAB = 2\angle PAB$

5. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিয়া চারিটি কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের একটি কোণ সমকোণ হইলে, অপর তিনটি কোণও সমকোণ হইবে।

6. যদি কোনও কোণ তাহার সম্পূরক কোণের (ক) 2 গুণ, (খ) 3 গুণ, (গ) 4 গুণ হয় হয় তাহা হইলে কোণগুলির মান কত হইবে ?

7. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয়, উহাদের দ্বিখণ্ডকগুলি পরস্পর লম্ব। [C U. 1913]

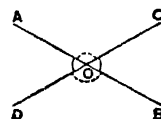
8. দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ এক সমকোণ হইলে ঐ সন্নিহিত কোণদ্বয়ের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় এক সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

9. ∠AOP ও ∠BOP দুইটি সন্নিহিত কোণ, এবং ∠AOP>BOP ; OC ∠AOBর অন্তঃদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে ∠AOP−∠BOP=2 ∠COP.

10. দুইটি সম্পূরক কোণের একটি অপরটির পাঁচগুণ হইলে প্রত্যেকটির পরিমাণ কত ডিগ্রি হইবে ?

11. ABC কোণের সমদ্বিখণ্ডক DBকে E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। প্রমাণ কর যে ∠ABE=∠CBE.

12. A, B, C, D চারিটি বিন্দু। AB ও BC রেখা D বিন্দুতে দুইটি সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করিলে, প্রমাণ কর A, D ও C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

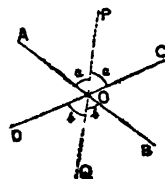
2. উপপাদ্য 1. **দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে বিপ্রতীপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।** ∠AOC=∠DOB, ∠AOD=∠BOC

উত্তর : 6. (ক) 60°, 120°, (খ) 45°, 135°, (গ) 36°, 144°. 10. 30°, 150°.

অনুশীলনী 22

[1 ও 2 ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. AB ও CD দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AOC কোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা O-র দিকে বর্ধিত করিলে উহা বিপ্রতীপ BOD কোণেরও সমদ্বিখণ্ডক হইবে। [C. U 1911, 1929]

মনে করা যাউক AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ∠AOC-র সমদ্বিখণ্ডক PO কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে OQ, ∠BOD-র সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ : ∠AOP=বিপ্রতীপ ∠BOQ এবং ∠COP=বিপ্রতীপ ∠DOQ, কিন্তু ∠AOP=∠COP. ∴ ∠BOQ=∠DOQ অতএব OQ, ∠BOD-র সমদ্বিখণ্ডক।

2. প্রমাণ কর যে দুইটি বিপ্রতীপ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত। [Pat. U. 1948]

মনে করা যাউক, PO ও QO যথাক্রমে $\angle AOC$ ও $\angle BOD$-র সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করিতে হইবে PO এবং QO একই সরলরেখায় অবস্থিত।

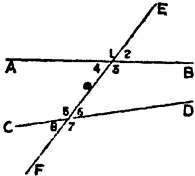
প্রমাণ। $\because$ PO $\angle AOC$-র সমদ্বিখণ্ডক $\therefore$ $\angle AOP=\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}\angle BOD=\angle BOQ$ [$\because$ OQ, $\angle BOD$-র সমদ্বিখণ্ডক] $\therefore$ $\angle AOP+\angle AOQ=\angle BOQ+\angle AOQ=2$ সম $\angle$. অতএব PO এবং QO একই সরলরেখায় অবস্থিত।

3. যদি চারিটি সরলরেখা একই বিন্দুতে মিলিত হয় এবং যে চারিটি কোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের পরস্পর বিপরীত দুই-দুইটি কোণ যদি সমান হয়, তবে এই চারিটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখা হইবে।

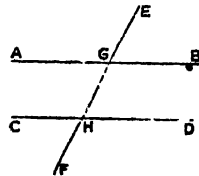
4. CAD ও AB দুইটি সরলরেখা এবং $\angle CAX=\angle BAD$; CAD রেখার দুই বিপরীত পার্শ্বে B ও X। প্রমাণ কর AB ও AX একই সরলরেখায় অবস্থিত।

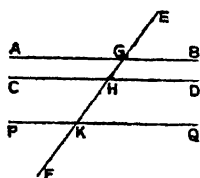
5. 1নং প্রশ্নের চিত্রে যদি $\angle AOP=62^\circ$ হয়, অন্য কোণগুলির মান কত ?

উত্তর : 5. $\angle POC=\angle QOB=\angle QOD=62^\circ$, $\angle AOD=\angle BOC=56^\circ$.

2.3. **স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 3 : একই সমতলে অবস্থিত একটি সরলরেখা (ছেদক) অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি অনুরূপ কোণ দুইটি সমান হয় তাহা হইলে সরলরেখা দুইটি পরস্পর সমান্তরাল।**

EF ছেদক AB ও CD-কে ছেদ করিয়াছে। যদি অনুরূপ কোণ 1=5, 2=6, 8=4, অথবা 7=3 হয়, তাহা হইলে AB||CD হইবে।

উপপাদ্য 2. একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি (ক) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান হয় কিংবা (খ) ঐ ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে।

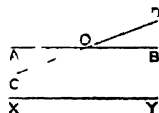
EGHF AB ও CD-র ছেদক। যদি (ক) $\angle AGH=\angle GHD$, $\angle BGH=\angle GHC$ অথবা (খ) $\angle BGH+\angle GHD=2$ সম$\angle$, $\angle AGH+\angle GHC=2$ সম$\angle$ হয়, তাহা হইলে AB||CD.

উপপাদ্য 3. একটি সরলরেখা অপর দুইটি সমান্তরাল সরল-রেখাকে ছেদ করিলে, (ক) অনুরূপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে, (খ) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে এবং (গ) ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখা দুইটিকে EGHF ছেদক, G ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে ক) $\angle EGB = \angle GHD$, $\angle AGE = \angle CHG$, $\angle DHF = \angle BGH$, $\angle CHF = \angle ACH$, (খ) $\angle AGH = \angle GHD$, $\angle BGH - \angle GHC$ এবং (গ) $\angle BGH + \angle GHD = 2$ সম $\angle$ এবং $\angle AGH + \angle GHC = 2$ সম $\angle$ হইবে।

উপপাদ্য 4. যে সকল সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার সহিত সমান্তরাল, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

AB ∥ PQ এবং CD ∥ PQ . AB ∥ CD

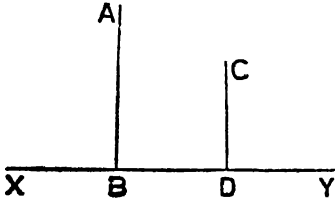
প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ (Playfair's Axiom) : স্কটল্যাণ্ডের পণ্ডিত প্লেফেয়ার নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধ প্রতিষ্ঠা করিয়াছেন।

দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা উভয়ই তৃতীয় একটি সরলরেখার সহিত সমান্তরাল হইতে পারে না।

AB ও CD দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহারা উভয়ই XY এর সহিত সমান্তরাল হইতে পারে না। AB যদি XY এর সহিত সমান্তরাল হয় CD সমান্তরাল হইবে না।

অনুশীলনী 23

[1 হইতে 9 পর্যন্ত ক্লাসে কর। বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. যে সকল সরলরেখা একই সরলরেখার উপর লম্ব, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।
[C. U. '17. D. B. '48]

মনে করা যাউক AB ও CD দুইটি সরলরেখা XY সরলরেখার উপর লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB||CD.

প্রমাণ ঃ ∵ AB⊥XY
∴ ∠ABX=1 সম ∠.
পুনরায় CD⊥XY ∴ ∠CDB =1 সম ∠. ∠ABX=∠CDB কারণ উহারা প্রত্যেকেই 1 সম ∠. কিন্তু ইহারা অনুরূপ কোণ। ∴ AB||CD.

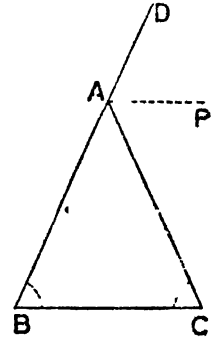
2. কোন সরলরেখা যদি দুই বা ততোধিক সমান্তরাল সরলরেখার যে কোনও একটির উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে, অপর সমান্তরাল রেখাগুলির উপরও লম্ব হইবে।

3. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিয়া সমদ্বিখণ্ডিত হইলে, উহাদেব একই পার্শ্বস্থ প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে।

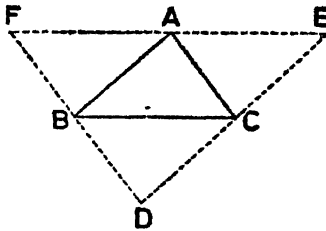
4. যদি কোন ত্রিভুজের কোন কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক ঐ কোণের বিপরীত বাহুর সহিত সমান্তরাল হয় তাহা হইলে ঐ বাহুসংলগ্ন কোণ দুইটি সমান হইবে। [D. B. '25]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AP ∠BAC-র বহিঃর্দ্বিখণ্ডক এবং AP || BC.

প্রমাণ করিতে হইবে ∠ABC∠ACB.

প্রমাণ ঃ ∵ AP||BC এবং AC উহাদের ছেদক ∴ ∠PAC=একান্তর ∠ACB ; পুনরায় ∵ AP||BC এবং DB উহাদে ছেদক ∴ ∠DAP=অনুরূপ ∠ABC ; কিন্তু ∠DAP=∠PAC. ∴ ∠ABC=∠ACB.

5. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান্তরাল সরলরেখা উহার সমান বাহু দুইটির সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

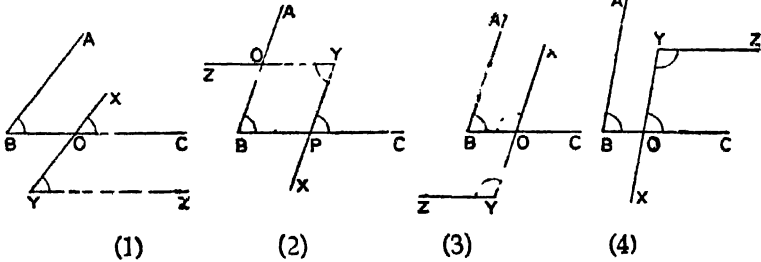
6. কোনও কোণের অন্তঃদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যে কোনও বিন্দু হইতে ঐ কোণের যে কোনও বাহুর সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা টানিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় উহা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

7. ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু দিয়া বিপরীত বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা গঠিত DEF ত্রিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে △ABC ও △DEF সদৃশকোণী।

মনে করা যাউক △ABC-এর শীর্ষবিন্দু A, B ও C তে EF, FD ও DE রেখা তিনটি যথাক্রমে BC, CA ও AB-র সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে △ABC ও △DEF সদৃশকোণী।

প্রমাণ : ∵ FE∥BC এবং AC ছেদক ∴ ∠ACB = একান্তর ∠CAE ; পুনরায় ∵ AC∥DF এবং FE উহাদের ছেদক ∴ ∠CAE = অনুরূপ ∠AFB , ∴ ∠ACB = ∠CAE = ∠AFB = ∠EFD. এইরূপে প্রমাণ করা যায় ∠BAC = ∠EDF এবং ∠ABC = ∠FED. অতএব ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী।

8. যদি একটি কোণের দুই বাহু আর একটি কোণের দুইটি বাহুর সহিত সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে কোণ দুইটি সমান অথবা সম্পূরক হইবে।

∠ABC ও ∠XYZ এর বাহুগুলি পরস্পর সমান্তরাল। (1) ও (2) নং চিত্রে কোণগুলি সমান এবং (3) ও (4) নং চিত্রে কোণগুলি সম্পূরক।

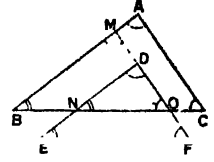
(1) (2) (3) (4)

প্রমাণ : (1) নং চিত্রে। ∵ AB∥XY ∴ অনুরূপ ∠ABC = ∠XOC ; পুনরায় BC∥YZ ∴ অনুরূপ ∠XOC = ∠XYZ অতএব ∠ABC = ∠XYZ.

(2) নং চিত্রে ∵ AB∥XY ∴ অনুরূপ ∠ABC = ∠YPC ; পুনরায় BC∥YZ ∴ একান্তর ∠YPC = ∠XYZ. অতএব ∠ABC = ∠XYZ.

(3) নং চিত্রে ∵ AB∥XY, BC উহাদের ছেদক ∴ ∠ABO + ∠XOB = 2 সম ∠ ∵ BC∥YZ, ∴ অনুরূপ ∠XOB = ∠XYZ ∴ ∠ABO + ∠XYZ = 2 সম ∠.

(4) নং চিত্রে ∵ AB∥XY ∴ অনুরূপ ∠YOC = ∠ABC, ∵ YZ∥BC ∴ ∠YOC + ∠XYZ = 2 সম ∠ ∴ ∠ABC + ∠XYZ = 2 সম ∠.

9. যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান্তরাল হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী হইবে। [C. U. 1932]

মনে করা যাউক ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে AB∥DE ; BC∥EF এবং AC∥DF, প্রমাণ করিতে হইবে যে △ ABC ও △ DEF সদৃশকোণী। প্রয়োজনবোধে DEF ত্রিভুজের বাহুগুলি এরূপভাবে বর্ধিত করা হইল যেন উহারা △ ABC-র বাহুগুলিকে ছেদ করে।

প্রমাণ : ∵ AB∥DE ∴ অনুরূপ ∠EDF= ∠BMD পুনরায় FDM ∥ AC অনুরূপ ∠BMD= ∠BAC. অতএব ∠EDF=∠BAC. পুনরায় EF∥BC ∴ অনুরূপ ∠FED =∠DNO, এবং DE ∥ AB. ∴ অনুরূপ ∠DNO=∠ABC, অতএব ∠DEF= ∠ABC. তদ্রূপ ∵ EF∥BC ∴ অনুরূপ ∠DFE=∠DOB. ∵ FD∥AC ∴ অনুরূপ ∠DOB=∠ACB, অতএব ∠DFE=∠ACB সুতরাং △ ABC ও △ DEF সদৃশকোণী।

10 একই ভূমির বিপরীত দিকে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে উহারা একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। [C. U. 1916]

11. যে কোনও সামান্তরিকের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

12. একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে যে কোন দুইটি অনুরূপ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় সমান্তরাল হইবে।

13. একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে যে চারিটি অন্তঃকোণের সৃষ্টি হয় উহাদের চারিটি সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা গঠিত ক্ষেত্রটি একটি আয়তক্ষেত্র।

14. প্রমাণ কর সামান্তরিকের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান।

15 কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটি পরস্পর সমান হইলে, ইহার শীর্ষবিন্দুতে ভূমির সহিত সমান্তরাল সরলরেখা শিরঃকোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক হইবে।

16 একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে দুইটি একান্তর কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

17. AB, CQ দুইটি সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB এর সমান্তরাল XYZ রেখা ODকে Y বিন্দুতে এবং সন্নিহিত কোণদ্বয় AOD ও BODর দ্বিখণ্ডক OX ও CZ কে X এবং Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর XY=YZ।

18. প্রমাণ কর যে কোনও সরলরেখার একটি বিন্দুতে মাত্র একটি লম্ব অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

19. একটি সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে, সরলরেখাদ্বয় দ্বারা ছেদকের কর্তিত অংশের মধ্যবিন্দু উক্ত সরলরেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

20. AB ও CD দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখা। প্রমাণ কর যে AC ও BD পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। কি অবস্থা হইলে AC = BD হইবে?

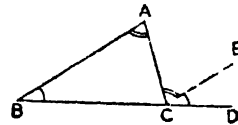
[C.U. 1862]

21 সমদ্বিবাহু △ ABC-র AB = AC, BC ভূমির উপর যে কোনও বিন্দু D-তে XYD উহার উপর লম্ব এবং ইহা AC কে Y ও বর্ধিত BA কে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর △ XAY সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

22. সমদ্বিবাহু △ ABC-র AB = AC, AC-র উপর M একটি বিন্দু; BA কে N পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন AM = AN হয়। প্রমাণ কর NM বর্ধিত করিলে BC কে লম্বভাবে P বিন্দুতে ছেদ করে।

2.4. **ত্রিভুজের কোণ বিষয়ক উপপাদ্য :**

উপপাদ্য 5. ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 2$ সম $\angle$

উপপাদ্য 6. ত্রিভুজের যে কোন বাহু বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণটি উৎপন্ন হয় তাহা বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

উপরের চিত্রে $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$

অনুসিদ্ধান্ত : ত্রিভুজের যে কোন দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

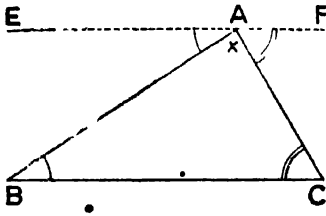
অনুসিদ্ধান্ত : প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্ততঃ দুইটি সূক্ষ্মকোণ থাকিবেই।

অনুসিদ্ধান্ত : বহিঃস্থ কোনও বিন্দু হইতে কোনও সরলরেখার উপর মাত্র একটি লম্ব অঙ্কিত করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত হইলে যে বহিঃকোণটি উৎপন্ন হয় তাহা বিপরীত অন্তঃকোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

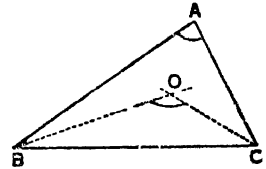
অনুশীলনী 2·4

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে ত্রিভুজের তিনটি অন্তঃকোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান। [C. U. 1868]

মনে করা যাউক $\triangle ABC$র শীর্ষবিন্দু Aতে EAF সরলরেখা BCর সহিত সমান্তরাল। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle ABC+\angle BCA+\angle CAB=2$ সম $\angle$.

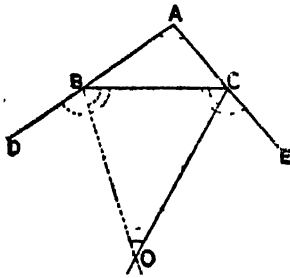
প্রমাণ: $\because$ EAF $\parallel$ BC এবং AC উহাদের ছেদক; $\therefore$ $\angle CAF=$একান্তর $\angle ACB$ এবং $\because$ EF$\parallel$BC এবং AB উহাদের ছেদক; $\therefore$ $\angle BAE=$একান্তর $\angle ABC$. অতএব $\angle ACB+\angle ABC=\angle CAF+\angle BAE$. উভয়পক্ষে $\angle BAC$ যুক্ত করা হইল। $\angle ACB+\angle ABC+\angle BAC=\angle CAF+\angle BAE+\angle BAC=$ 2সম$\angle$. কারণ সরলকোণ বলিয়া ইহাদের সমষ্টি 2 সম $\angle$.

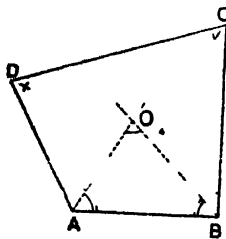
2. ABC ত্রিভুজে $\angle B$ ও $\angle C$র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$

মনে করা যাউক $\angle B$ ও $\angle C$র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় BO এবং CO, O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle BOC=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

প্রমাণ: $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. $\therefore \frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}$ [$\times 180°=90°$.
$\therefore \frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

$\angle BOC=180°-\angle OBC-\angle OCB=180°-(\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C)=180°-(90°-\frac{1}{2}\angle A)=180°-90°+\frac{1}{2}\angle A=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

3. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$র বহিঃদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle BOC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

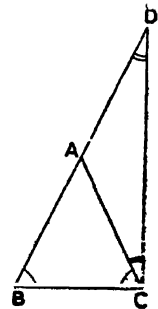
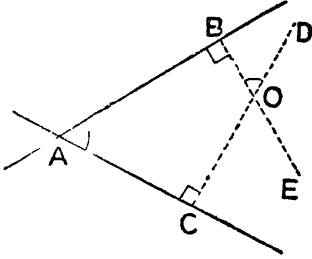
মনে করা যাউক $\angle B$ ও $\angle C$র বহিঃদ্বিখণ্ডকদ্বয় BO এবং CO, O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle BOC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

প্রমাণ : $\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - (\frac{1}{2}\angle DBC + \frac{1}{2}\angle BCE) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B + 180^\circ - \angle C) = 180^\circ - \frac{1}{2}\{360^\circ - (\angle B + \angle C)\} = 180^\circ - \frac{1}{2}\{360^\circ - (180^\circ - \angle A)\} = 180^\circ - \frac{1}{2}(360^\circ - 180^\circ + \angle A) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A) = 180^\circ - 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

4. কোন চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি পরস্পর কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ চতুর্ভুজের অপর দুইটি কোণের সমষ্টির অর্ধেক। [C U '42, W B. S F. '55]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের $\angle A$ ও $\angle B$র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle AOB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

প্রমাণ : ABCD চতুর্ভুজের $\angle ABC + \angle BAD + \angle C + \angle D = 4$ সম $\angle$ এবং $\triangle AOB$র $\angle AOB + \angle OAB + \angle OBA = 2$ সম $\angle = \frac{1}{2}$ 4 সম$\angle = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAD + \angle C + \angle D)$ $\therefore$ $\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$ অতএব $\angle AOB = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D = \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

5. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A শীর্ষবিন্দু। BA কে D পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া AD = AB করা হইয়াছে। DC যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে, $\angle BCD$ এক সমকোণের সমান। [C U '47, D. B. '32]

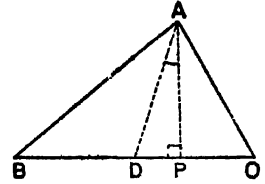
মনে করা যাউক ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC এবং A শীর্ষবিন্দু। BAকে D পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া BA = AD করা হইয়াছে এবং DC যুক্ত করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle BCD$ = এক সম $\angle$.

প্রমাণ : $\because$ AB = AC $\therefore$ $\angle ACB = \angle ABC$ এবং AB = AD = AC $\therefore$ ACD = $\angle A \angle DC$ $\therefore$ $\angle ACB + \angle ACD = \angle ABC + \angle ADC$ অর্থাৎ $\angle BCD = \angle B + \angle D$ অতএব, 2 $\angle BCD = \angle B + \angle D + \angle BCD = 2$ সম $\angle$. $\therefore$ $\angle BCD$ = এক সম $\angle$.

6. যদি দুইটি সরলরেখা অপর দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ পূর্বোক্ত সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হইবে। [C U. 1933]

মনে করা যাউক AB ও AC দুইটি সরলরেখা A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। BE ও CD যথাক্রমে উহাদের উপর লম্বদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle BAC = \angle BOD$

প্রমাণ : ABOC চতুর্ভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি চার সমকোণ। কিন্তু $\angle ABO + \angle ACO = 2$ সম $\angle$. কারণ প্রত্যেকেই 1 সম $\angle$. অতএব $\angle BAC + \angle BOC = 2$ সম $\angle$. পুনরায় সন্নিহিত $\angle BOD + \angle BOC = 2$ সম $\angle$. $\therefore$ $\angle BAC = \angle BOD$

7 কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে ভূমির উপর লম্ব এবং ঐ শিরঃকোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত কোণ, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তরের অর্ধেক।

মনে করা যাউক ABO ত্রিভুজের A হইতে BOর উপর AP লম্ব এবং AD $\angle BAO$র সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle DAP = \frac{1}{2}(\angle O - \angle B)$

প্রমাণ : $\angle DAP = \angle BAP - \angle BAD = (90^\circ - \angle B) - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle O - \angle B - \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2}\angle O - \frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}(\angle O - \angle B)$.

8. যদি কোনও ত্রিভুজের ভূমি উভয়দিকে বর্ধিত করা হয় তাহা হইলে বহিঃকোণ দ্বয়ের সমষ্টি হইতে শিরঃকোণ বিয়োগ করিলে দুই সমকোণের সমান হইবে।

9. কোন সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে, ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক দুইটি সমকোণে ছেদ করে।

10, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সূক্ষ্ম। [C. U. 1926]

11. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি 108° এবং অন্তর 20°। ত্রিভুজটির প্রত্যেক কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1926]

12 কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির দ্বিগুণ। কোণটির পরিমাণ নির্ণয় কর। [W.B S.F. 1952]

[নির্ণেয় কোণটি x° হইলে অপর কোণ দুইটির সমষ্টি $\frac{1}{2}x^\circ$. $\therefore$ $x + \frac{1}{2}x^\circ = 180^\circ$ বা, $\frac{3}{2}x^\circ = 180^\circ$ বা, $x^\circ = 120^\circ$.]

13. যদি কোন ত্রিভুজের দুইকোণের সমষ্টি তৃতীয় কোণের সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী। [C. U. 1928]

14. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে একই ক্রমে বর্ধিত করিলে যে তিনটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণ।

15. কোন ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু উভয়দিকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন ছয়টি বহিঃকোণের সমষ্টি আট সমকোণের সমান। [W. B. S. F. 1953]

16. প্রমাণ কর, চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

[একটি কর্ণ আঁকিলে দুইটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে]

17. চতুর্ভুজের চারিটি কোণের দ্বিখণ্ডক দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটির বিপরীত কোণগুলি সম্পূরক।

18. কোন ত্রিভুজের মধ্যবর্তী যে কোনও বিন্দুর সহিত ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় যোগ করিলে ঐ বিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহা শিরঃকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

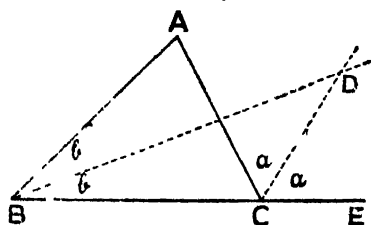
19. ত্রিভুজের কোনও দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

[ভূমির যে-কোনও বিন্দুর সহিত শীর্ষবিন্দু যোগ করিয়া প্রমাণ কর।]

20. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের উপর লম্ব টানিলে লম্বের উভয় পার্শ্বের ত্রিভুজদ্বয় এবং সমকোণী ত্রিভুজটি সদৃশকোণী।

[লম্বের এক পার্শ্বের একটি ত্রিভুজ ও প্রদত্ত সমকোণী ত্রিভুজটির একটি কোণ সাধারণ, একটি করিয়া সমকোণ। ∵ অবশিষ্ট অপর কোণটি নিশ্চয় সমান। অতএব উহারা সদৃশকোণী। অপর ত্রিভুজ এবং প্রদত্ত সমকোণী ত্রিভুজটিও সদৃশকোণী; ∴ উহারা পরস্পর সদৃশকোণী।]

21. কোন ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজটির অপর বাহু দুইটির উপর লম্ব টানা হইলে, প্রমাণ কর লম্বদ্বয় ভূমির সহিত যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমষ্টি শীর্ষকোণের সমান।

22 কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটির একটির অন্তঃদ্বিখণ্ডক ও অপরটির বহিঃদ্বিখণ্ডকের অন্তর্ভূত কোণ শীর্ষকোণের অর্ধেকের সমান।

মনে করা যাউক BD, ABC ত্রিভুজের ∠ABCর অন্তঃদ্বিখণ্ডক এবং CD ∠ACB-র বহিঃদ্বিখণ্ডক। উহারা D বিন্দুতে মিলিত হইয়া ∠BDC উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle BDC = \frac{1}{2}\angle A$.

প্রমাণ : △ BCDর বহিঃকোণ

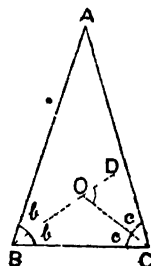
$\angle DCE = \angle BDC + \angle DBC \quad \therefore \angle BDC = \triangle DCE - \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ACE - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle ACE - \angle ABC) - \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC - \angle ABC) = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle A.$

23. ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ যে কোন বিন্দু O কে উহার কৌণিক বিন্দুগুলির সহিত যুক্ত করা হইল। প্রমাণ কর যে $\angle BOC > \angle BAC, \angle AOB > \angle ACB$ এবং $\angle AOC > \angle ABC$.

[AO যোগ করিয়া D পর্যন্ত বর্ধিত কর। $\angle BOD > \angle BAO$, $\angle COD > \angle CAO$. $\therefore$ যোগ কবিয়া $\angle BOC > \angle BAC$ তদ্রূপ প্রমাণ কর $\angle AOB > \angle ACB$ এবং $\angle AOC > \angle ABC$.]

24. ABC ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সমান এবং BO ও CO উহাদের সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ কর যে, BO বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয় তাহা ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণের সমান। [C U. 1922]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB = AC, BO এবং CO যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$র সমদ্বিখণ্ডক। BOকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle COD = \angle ABC = \angle ACB$

প্রমাণ : $\angle COD = \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle B$ [$\because \angle B = \angle C$] $= \frac{1}{2}.2\angle B = \angle B = \angle C$.

25. সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি সূক্ষ্মকোণের একটি অপরটির দ্বিগুণ হইলে উহার অতিভুজ ক্ষুদ্রতম বাহুটির দ্বিগুণ হইবে। [C. U. '35, '60, D. B. '50]

26 কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে। [C. U. 1928]

27 যদি কোন ত্রিভুজের বহিঃকোণের একটি ত্রিখণ্ডক বিপরীত অন্তঃকোণের কোনও ত্রিখণ্ডকের সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর অপর ত্রিখণ্ডকটি বিপরীত অন্তঃকোণের কোনও একটি ত্রিখণ্ডকের সমান্তরাল হইবে।

[**ইঙ্গিত :** ABC ত্রিভুজের BC ভূমিকে D পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া CE রেখা বহিঃকোণ ACDর ত্রিখণ্ডক, ইহা অন্তঃকোণ Bর ত্রিখণ্ডক BGর সমান্তরাল। $\angle ACD$র অপর ত্রিখণ্ডক CF.

প্রমাণ : $\frac{1}{3}\angle B = \angle GBC =$ অনুরূপ $\angle ECD = \frac{1}{3}\angle ACD = \frac{1}{3}\angle A + \frac{1}{3}\angle B$

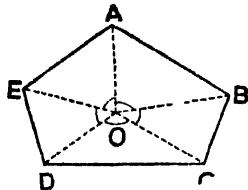
$\therefore \frac{2}{3}\angle B - \frac{1}{3}\angle B = \frac{1}{3}\angle A$ বা $\frac{1}{3}\angle B = \frac{1}{3}\angle A$ $\therefore$ $\angle A = \angle B$ $\therefore$ $\angle ACF = \frac{2}{3}$. $\angle A$. কিন্তু ইহারা একান্তরকোণ, অতএব CF, ∠Aর ত্রিখণ্ডকের সমান্তরাল।]

28. ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D ; DE||BC, ABCর দ্বিখণ্ডক BE, DEর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর AEB সমকোণী ত্রিভুজ।

29. ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয়, O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে A বিন্দু হইতে এই দ্বিখণ্ডকের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$র সমান।

30. ABC ত্রিভুজের B ও C কোণের বহিঃদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে A বিন্দু হইতে এই দুই দ্বিখণ্ডকের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$এর সমান।

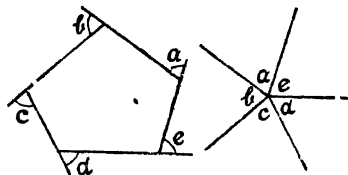
25. ঋজুরেখক্ষেত্র সম্পর্কীয়

উপপাদ্য 7. কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি ঐ ক্ষেত্রটি যে কয়টি বাহুর দ্বারা গঠিত তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সমকোণ অপেক্ষা চারি সমকোণ কম।

অর্থাৎ n সংখ্যক বাহু বিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণের সমষ্টি $= (2n-4)$ সমকোণ।

ABCDE ক্ষেত্রে

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = (2n-4)$ সম $\angle$.

$= (2\cdot 5-4)$ সম $\angle = 6$ সম $\angle$.

উপপাদ্য 8. কোন প্রবৃদ্ধ কোণ শূন্য ঋজুরেখ ক্ষেত্রের বাহুগুলি একই ক্রমে বর্ধিত হইলে, যে বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হয় তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 4$ সম $\angle$.

অনুসিদ্ধান্ত :—n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট সুষম ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেকটি অন্তঃকোণ $= \frac{2n-4}{n}$ **সমকোণ** $= \frac{2n-4}{n} \times 90^\circ = \frac{n-2}{n} \times 180^\circ$.

প্রত্যেক বহিঃকোণ $= \frac{4}{n}$ **সমকোণ** $= \frac{360^\circ}{n}$.

অনুশীলনী 2·5

[1 হইতে 7 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. কোন সপ্তভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি ও বহিঃকোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

∵ n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের অন্তঃকোণের সমষ্টি $=(2n-4)$ সমকোণ,

∴ সপ্তভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি $-\ 2\times 7-4)=10$ সম $\angle=900^\circ$.

এবং বহিঃকোণের পরিমাণ$=\frac{4}{n}$ সম $\angle=\frac{360^\circ}{7}=51\frac{3^\circ}{7}$.

9 কোন ষড়ভুজের প্রত্যেক অন্তঃকোণের এবং বহিঃকোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

প্রত্যেক অন্তঃকোণ$=\frac{n-2}{n}\times 180^\circ=\frac{6-2}{6}\times 180^\circ=\frac{2}{3}\times 180=120^\circ$.

প্রত্যেকটি বহিঃকোণ$=\frac{4}{n}$ সম $\angle=\frac{4}{6}\times 90^\circ=60^\circ$.

3. কোন সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ 40° হইলে, ইহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেক বহিঃকোণ $=\frac{360^\circ}{n}$

∴ প্রশ্নানুসারে, $\frac{360^\circ}{n}=40^\circ$ ∴ $n=\frac{360^\circ}{40^\circ}=9$.

4. কোন বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি 540° হইলে, উহার বাহুসংখ্যা নি^র্ষ কর।

∵ বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি $=(2n-4)$ সমকোণ ∴ $(2n-4)\times 90^\circ=540^\circ$

∴ $2n-4=540\div 90=6$ $2n=6+4=10$ $n=5$.

5. কোন সুষম বহুভুজের একটি বহিঃকোণ উহার একটি অন্তঃকোণের দ্বিগুণ হইলে বহুভুজটির বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর। [C. U. 1949]

প্রত্যেকটি অন্তঃকোণ $=\frac{2n-4}{-}$ সমকোণ এবং প্রত্যেকটি বহিঃকোণ

$=\frac{4}{n}$ সমকোণ।

∴ প্রশ্নানুসারে $\frac{2\times(2n-4)}{n}=\frac{4}{n}$ বা, $n-2=1$. ∴ $n=3$. ∴ বাহুসংখ্যা $=3$.

6. প্রত্যেকটির অন্তঃকোণের সমষ্টি নির্ণয় কর, বহুভুজের বাহুসংখ্যা যদি (*a*) 6, (*b*) 8, (*c*) 10, (*d*) 12, (*e*) 25 হয়।

7. প্রত্যেকটি বাহুর সংখ্যা নির্ণয় কর, বহুভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি যদি (*a*) 360°, (*b*) 900°, (*c*) 540°, (*d*) 2340° হয়।

8. কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ 156° হইলে, উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর। [C. S. 1917]

9. প্রবৃদ্ধ কোণশূন্য কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি ইহার বহিঃকোণগুলির সমষ্টির সমান। উহার বাহুসংখ্যা কত? [C. S. 1944]

10. কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণের পরিমাণ 2 সমকোণের $\frac{9}{10}$; উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর। [C U. 1877]

11. ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি আট সমকোণ। [W B. S. F. 1953]

12. কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ সমষ্টি বহিঃকোণ সমষ্টির চারগুণ। বাহুসংখ্যা কত?

13. কোন সুষম বহুভুজের প্রতিটি অন্তঃকোণ প্রতিটি বহিঃকোণের অর্ধেক। উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

14. কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ বহিঃকোণের পাঁচ গুণ। বাহুসংখ্যা কত?

15. কোন পঞ্চভুজের চারিটি কোণ পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকে পঞ্চম কোণের দ্বিগুণ। কোণগুলি নির্ণয় কর।

16. কোন সুষম বহুভুজের অন্তঃকোণ বহিঃকোণের আট গুণ, বহুভুজের বাহুর সংখ্যা কত?

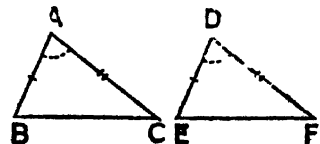
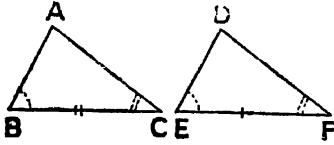
17. কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের প্রত্যেক অন্তঃকোণ 2 সমকোণের $\frac{7}{9}$, উহার বাহুসংখ্যা নির্ণয় কর।

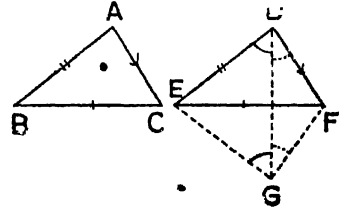
18. একটি পঞ্চভুজ ও একটি ষড়ভুজের কতগুলি কর্ণ আছে?

19. প্রমাণ কর যে অষ্টভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি, বহিঃকোণের সমষ্টির তিন গুণ।

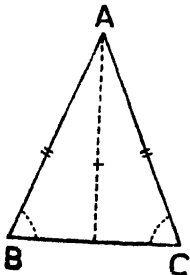
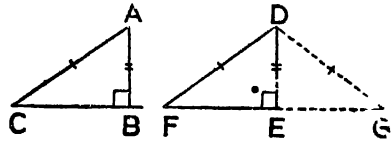
26 ত্রিভুজের সর্বসমতা :—

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 4 যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুই বাহু ও তাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

যদি AB = DE, AC = DF, অন্তর্ভুক্ত ∠BAC = ∠EDF হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 5. যদি দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইটি কোণ যথাক্রমে অপর ত্রিভুজের দুইটি কোণের সমান হয় এবং একটি ত্রিভুজের একটি বাহু অপরটির অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

যদি $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $BC = EF$ হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

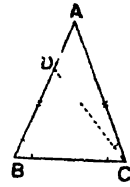
উপপাদ্য 9. যদি দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির তিনটি বাহু যথাক্রমে অপরটির তিনটি বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

যদি $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$ হয়, তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

উপপাদ্য 10. যদি দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যে একটির অতিভুজ এবং একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির অতিভুজ ও অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

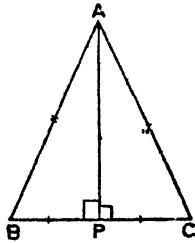
যদি $AC = DF$, $AB = DE$ হয় তবে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

উপপাদ্য 11. কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে, ঐ সমান বাহুদ্বয়ের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

$AB = AC$ হইলে, $\angle B = \angle C$ হইবে।

উপপাদ্য 12. কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে, ঐ সমান কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

$\angle B = \angle C$ হইলে, $AB = AC$ হইবে।

অনুশীলনী 2.6

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে করা যাউক সমদ্বিবাহু $\triangle$ ABC-তে AB = AC $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক AP, BC ভূমির P বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে $BP = PC$ এবং $AP \perp BC$.

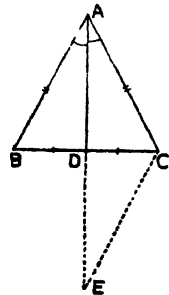
প্রমাণ : $\triangle ABP$, ACPর মধ্যে, $AB = AC$ (কল্পনা), AP সাধারণ এবং অন্তর্ভূত $\angle BAP = = \angle CAP$ (কল্পনা)

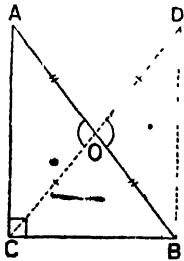
$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। অতএব $BP = CP$, এবং $\angle APB = \angle APC$. কিন্তু সন্নিহিত $\angle APB + \angle APC = 2$ সম $\angle$. $\therefore$ উহারা প্রত্যেকেই সম $\angle$, অতএব $AP \perp BC$.

2. যদি কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। [C. U. '37, D. B. '36 ; C. S. '36]

মনে করা যাউক $\triangle ABC$র A-র সমদ্বিখণ্ডক AD, ভূমি BCকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\triangle$ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন : AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া $AD = DE$ করা হইল এবং EC যোগ করা হইল।

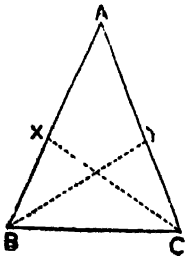
প্রমাণ : $\triangle$ ABD ও $\triangle$ DCEর মধ্যে $BD = DC$ (কল্পনা) $AD = DE$ (অঙ্কন) এবং অন্তর্ভূত $\angle ADB =$ অন্তর্ভূত $\angle CDE$ (বিপ্রতীপ কোণ) $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $AB = CE$ এবং

$\angle CED = \angle BAD = \angle CAD$ (∵ AD $\angle A$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে)। এক্ষণে $\triangle ACE$র $\angle CEA = \angle CAE$ ∴ AC = CE, কিন্তু CE = AB ∴ AC = AB, সুতরাং $\triangle$ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

3. সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু ও অতিভুজের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা ঐ ত্রিভুজের অতিভুজের অর্ধেক। [C. U. '19, D. B. '33 P. U. '35]

সমকোণী $\triangle$ ABCর $\angle ACB$ সমকোণ এবং অতিভুজ ABর মধ্যবিন্দু O ; CO যুক্ত করিয়া প্রমাণ করিতে হইবে $CO = \frac{1}{2}$ AB

অঙ্কন : COর সমান OD করিয়া COকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল এবং BD যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : ∵ $\angle ACB = 1$ সম $\angle$. $\angle BAC + \angle ABC = 1$ সম$\angle$, .. $\triangle AOC$ ও $\triangle$ BODর মধ্যে AO = BO (কল্পনা), CO = DO (অঙ্কন), অন্তর্ভূত $\angle AOC$ = অন্তর্ভূত $\angle BOD$. [বিপ্রতীপ কোণ বলিয়া] ∴ ত্রিভুজদ্বয় সবসম।

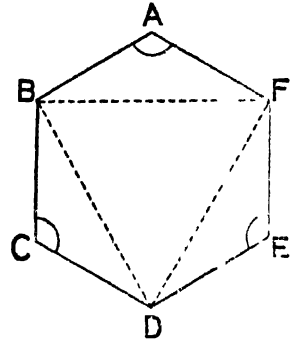
∴ BD = AC এবং $\angle OBD = \angle OAC$ $\angle DBC = \angle ABD + \angle ABC = \angle BAC + \angle ABC = 1$ সম $\angle$. এক্ষণে $\triangle$ ABC ও $\triangle$ DBCর মধ্যে AC = BD, BC সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূত $\angle ACB$ = অন্তর্ভূত $\angle DBC$ (সমকোণ বলিয়া) ∴ ত্রিভুজদ্বয় সবসম। অতএব DC = AB. $OC = \frac{1}{2}$ DC $= \frac{1}{2}$AB.

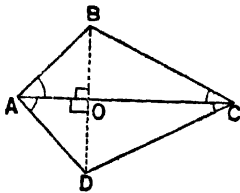
4. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, উহার AB = AC, AB ও ACর উপর যথাক্রমে X ও Y এমন দুইটি বিন্দু লওয়া হইল যেন AX = AY হয়। প্রমাণ করিতে হইবে BY = CX।

মনে করা যাউক, সমদ্বিবাহু $\triangle$AB Cর AB = AC এবং AY = AX. CX ও BY যুক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে BY = CX.

প্রমাণ : $\triangle$ ABY ও $\triangle$ ACXর মধ্যে AB = AC (কল্পনা), AY = AX (কল্পনা) এবং অন্তর্ভূত $\angle A$, সাধারণ ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব BY = CX.

5. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে BDE একটি সমবাহু ত্রিভুজ। [C. U 1911]

মনে করা যাউক ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। BD, DF, FB যুক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে △BDF একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

প্রমাণ ঃ সুষম ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সকল বাহু ও সকল কোণ পরস্পর সমান। △ ABF ও △BCDর মধ্যে AB = CD, AF = BC, অন্তর্ভূর্ত ∠BAF = অন্তর্ভূর্ত ∠BCD. .. ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব BD = BF. এইরূপ প্রমাণ করা যায় △BCD ও △ DEF সর্বসম ∴ BD = DF. অতএব △ BDF সমবাহু ত্রিভুজ।

6. ABCD চতুর্ভুর্জের AC কর্ণ যদি ∠BAD ও ∠BCD কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তবে প্রমাণ কর যে AC অপর কর্ণ BDকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

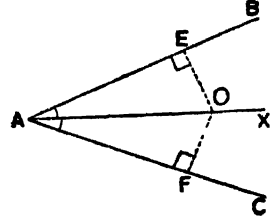
[C U. 1948]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুর্জের কর্ণ AC ∠BAD এবং ∠BCDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AC, BDকে O বিন্দুতে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ ঃ △ ABC ও △ ADCর মধ্যে ∠BAC = ∠DAC (কল্পনা), ∠BCA = ∠DCA (কল্পনা) এবং AC সাধারণ বাহু।

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∵ AB = AD. পুনরায় △ ABO এবং △ ADOর মধ্যে AB = AD (প্রমাণিত), AO সাধারণ বাহু। অন্তর্ভূর্ত ∠BAO = অন্তর্ভূর্ত ∠DAO (কল্পনা) ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ BO = DO এবং ∠AOB = ∠AOD. কিন্তু ইহারা সন্নিহিত ∠ ∵ প্রত্যেকে 1 সম ∠ ∴ AO অর্থাৎ AC, BDর উপর লম্ব।

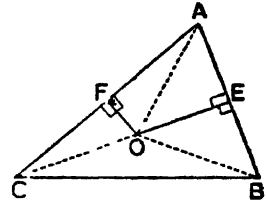
7.. কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যে কোন বিন্দু উহার বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী। [C. U. '50, D. B. '35]

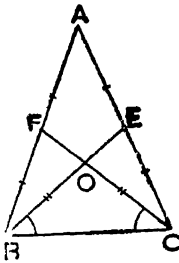
মনে করা যাউক AX ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক। AXর উপর O যে কোনও বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে AB এবং AC হইতে O সমদূরবর্তী।

O হইতে OE এবং OF যথাক্রমে AB এবং ACর উপর দুইটি লম্ব।

প্রমাণ ঃ △ OEA এবং △ OFAর মধ্যে ∠OEA=সম ∠OFA (অঙ্কন), ∠OAE=∠OAF (কল্পনা) এবং AO সাধারণ বাহু। . ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ; ∴ OE=OF.

. AB ও AC হইতে O সমদূরবর্তী।

৪. একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর OE ও OF যথাক্রমে লম্বদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AO, BO, CO যুক্ত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে AO=BO=CO.

প্রমাণ ঃ △ AOF ও △ COF এর মধ্যে AF=CF (কল্পনা), ∠AFO=∠CFO কারণ প্রত্যেকেই 1 সমকোণ। OF সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AO=CO. এইরূপে প্রমাণ করা যায় △ AOE এবং △ BOE সর্বসম। ∴ AO=BO. অতএব AO=BO=CO.

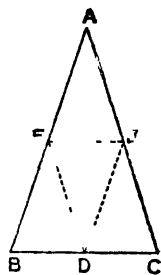
9. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় বিপরীত বাহু পর্যন্ত বর্ধিত করিলে, উহারা পরস্পর সমান। [C. U. '27, '29, D. B. '41]

মনে করা যাউক ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, উহার AB=AC. BE ও CF যথাক্রমে ∠ABC ও ∠ACBর সমদ্বিখণ্ডক এবং উহারা AC ও ABতে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে BE =CF.

প্রমাণ ঃ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় সমান। ∴ ∠ABC=∠ACB. ∴ $\frac{1}{2}$ ∠ABC=$\frac{1}{2}$ ∠ACB অর্থাৎ ∠ABE=∠ACF. এক্ষণে △ ABE ও △ ACFর মধ্যে

AB = AC (কল্পনা), $\angle ABE = \angle ACF$ (প্রমাণিত) এবং $\angle A$ সাধারণ কোণ।
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব BE = CF

10. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু ও সমান বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা দুইটি সমান। [C. U 1951]

মনে করা যাউক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের BC ভূমি। D, E, F যথাক্রমে BC, CA, ABর মধ্যবিন্দু। DE ও DF যুক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে যে DE = DF.

প্রমাণ ঃ ∵ AB = AC ∴ $\frac{1}{2}$ AB = $\frac{1}{2}$ AC.
∴ BF = CE, এক্ষণে Δ BDF ও ΔDCEর মধ্যে BD = DC (কল্পনা), BF = CE প্রমাণিত, এবং অন্তর্ভূ'ত $\angle FBD$ = অন্তর্ভূ'ত $\angle DCE$. ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।
∴ DF = DE.

11. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, ইহার AB = AC ; AB ও AC কে যথাক্রমে X ও Y পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া BX = CY করা হইয়াছে। প্রমাণ কর CX = BY.

12. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

13. বর্গক্ষেত্র এবং আযতক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

14. দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ কর যে উহাদের প্রান্তবিন্দুগুলি একই ক্রমে যোগ করিলে যে চতুভু জ উৎপন্ন হইবে তাহাব বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, এবং দুই জোড়া সর্বসম ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

15. ABCD একটি বর্গক্ষেত্র। উহার বাহুগুলির উপর M, N, O, P এই চারিটি বিন্দু এরূপ লওয়া হইযাছে যেন AM = BN = CO = DP হয়। প্রমাণ কর যে MNOP চতুর্ভু'জটি রম্বস।

16 একটি সমবাহু ত্রিভুজের AB = AC ; D, E এবং F যথাক্রমে AB, BC ও CAর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে DE = EF এবং $\angle ADE = \angle AFE$ [C U. 1932]

17. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত দুই এর অধিক সমান সরলরেখা অঙ্কিত করা যায় না। [C U 1920]

18. ABCD একটি রম্বসের মধ্যে O এরূপ একটি বিন্দু যেন OA = OC হয়। প্রমাণ কর যে OB এবং OD একই সরলরেখায় অবস্থিত।

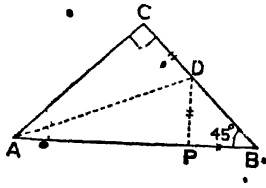
19. ABC ত্রিভুজের D এবং E যথাক্রমে BC ও CAর মধ্যবিন্দু। ঐ বিন্দু দুইটিতে BC ও CAর উপর DO এবং EO লম্বদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle OAB = \angle OBA$

20. ABC ও DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ একই ভূমি BCর উপর এবং উহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। AD, BCকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর AD উভয় কোণ BAC ও BDCর সমদ্বিখণ্ডক এবং BE = CE. [C. U. '28, '33]

21. যদি কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা বাহু দুইটির প্রত্যেকটির উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে ঐ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

22. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপরিস্থ দুইটি বিন্দু যদি ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হয় তবে তাহারা শীর্ষ হইতে সমদূরবর্তী।

অনুশীলনী 2·7

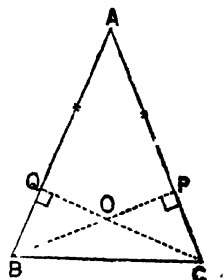
1. ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, উহার AB অতিভুজ। AD $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক BCর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $AC + CD = AB$। [B. U. 1923]

মনে করা যাউক ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB অতিভুজ। AD $\angle BAC$র সমদ্বিখণ্ডক BCর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $AC + CD = AB$.

অঙ্কন : D হইতে ABর উপর DP লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle$ ACD ও ADPর মধ্যে $\angle CAD = \angle DAP$ (কল্পনা), $\angle ACD = \angle DAP$ (প্রত্যেকেই সমকোণ) এবং AD সাধারণ বাহু। $\therefore$, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $AC = AP$ এবং $CD = DP$. $\therefore$ $AC + CD = AP + PD$, আবার ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলিয়া $\angle CAB = \angle CBA$, এবং $\angle CBA + \angle CAB =$ 1 সম $\angle$. $\therefore$ $\angle DBP = 45^\circ$: $\triangle$ DPBর মধ্যে $\angle DPB = 1$ সম $\angle$. $\therefore$ $\angle PDB + \angle PBD = 1$ সম $\angle$. $\therefore$ $\angle PBD = 45^\circ$ $\therefore$ $\angle PDB = \angle PBD$; অতএব $PB = PD$ $\therefore$ $AC + CD = AP + DP = AP + BP = AB$.

2 কোন ত্রিভুজের যে কোন বাহুর প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অপর বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [W.B.S.F 1955]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের BC বাহুর B ও C বিন্দু হইতে AC ও ABর উপর যথাক্রমে BP ও CQ দুইটি সমান লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে ABC ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

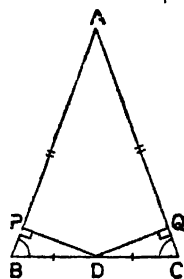
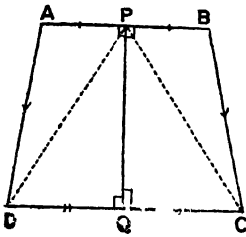
প্রমাণ :- △ APB ও △ AQCর মধ্যে ∠APB = ∠AQC (কারণ প্রত্যেকেই সমকোণ)। BP = CQ (কল্পনা). ∠A সাধারণ কোণ। ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। অতএব AB = AC. ∴ ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

3. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দু দুইটি হইতে বিপরীত বাহু দুইটির উপর যথাক্রমে BP ও CQ লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিলে প্রমাণ কর △ BOC সমদ্বিবাহু। [D. B 1926]

মনে করা যাউক ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC ও B C হইতে যথাক্রমে AC ও ABর উপর BP ও CQ দুইটি লম্ব C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে △ BOC সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ : ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলিয়া ∠ABC = ∠ACB অর্থাৎ ∠QBC = ∠PCB. △ BPCর মধ্যে ∠BPC = 1 সম ∠. সুতরাং ∠PCB + ∠PBC = 1 সম ∠. তদ্রূপ ∠QBC + ∠QCB = 1 সম ∠, ∴ ∠PCB + ∠PBC = ∠QBC + ∠QCB কিন্তু ∠QBC = ∠PCB ∴ ∠PBC = ∠QCB অর্থাৎ ∠OBC = ∠OCB ∴ OB = OC. অতএব OBC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

4. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে উহার সমান বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান।

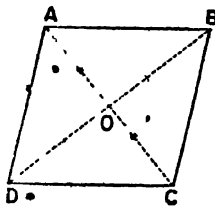
মনে করা যাউক ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, উহার AB = AC. BC ভূমির মধ্যবিন্দু D হইতে AB ও ACর উপর যথাক্রমে DP ও DQ দুইটি লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে DP = DQ.

প্রমাণ : △ ABC সমদ্বিবাহু বলিয়া ∠ABC = ∠ACB, অর্থাৎ ∠PBD = ∠QCD. এক্ষণে △ BPD ও △ CDQর মধ্যে BD = CD (কল্পনা), ∠BPD = ∠DQC (প্রত্যেকেই সম ∠). ∠PBD = ∠QCD. (প্রমাণিত) ∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। অতএব DP = DQ.

5. কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা ঐ বাহু দুইটির প্রত্যেকটির উপর লম্ব হইলে, ঐ চতুর্ভুজের অপর বাহুদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AB ও CDর মধ্যবিন্দুদ্বয় P ও Q. PQ সরলরেখা AB ও CDর উপর লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে AD = BC.

অঙ্কন : PD ও PC যোগ করা হইল।

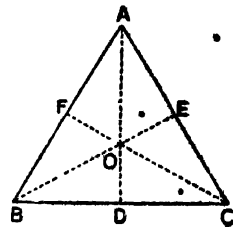
প্রমাণ : △ PDQ ও △ PCQর মধ্যে DQ = CQ (কল্পনা), PQ সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূত ∠PQD = অন্তর্ভূত ∠PQC (কারণ প্রত্যেকেই সম ∠) ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব PD = PC এবং ∠DPQ = ∠CPQ, ইহাদের পূরককোণদ্বয়ও সমান। ∴ ∠APD = ∠BPC। এক্ষণে △ APD ও △ BPCর মধ্যে PD = PC (প্রমাণিত), AP = BP (কল্পনা) এবং অন্তর্ভূত ∠APD = অন্তর্ভূত ∠BPC (প্রমাণিত) ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব AD = BC.

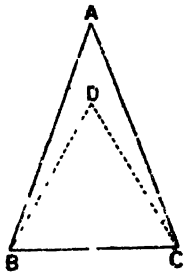
6. প্রমাণ কর যে রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[C. U. '36, G. U. '53, D. B. '25, W. B. S. F. '60]

মনে করা যাউক ABCD রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে AO = CO, BO = DO এবং AO ⊥ BD.

প্রমাণ : △ ABC ও △ ADCর মধ্যে AB = AD, BC = DC (কল্পনা) এবং AC সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব ∠BAO = ∠DAO, পুনরায় △ ABO ও △ ADOর মধ্যে AB = AD (কল্পনা), AO সাধারণ বাহু, অন্তর্ভূত ∠BAO = অন্তর্ভূত ∠DAO. ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব BO = DO এবং ∠AOD = ∠AOB ; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সম∠, ∴ AO ⊥ BD ; এইরূপে প্রমাণ করা যায় AO = CO.

7. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি পরস্পর সমান।

মনে করা যাউক ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে AD = BE = CF.

প্রমাণ : F, ABর মধ্যবিন্দু। ∴ AF = $\frac{1}{2}$ AB, তদ্রূপ AE = $\frac{1}{2}$ AC, কিন্তু AB = AC ∴ AF = AE. এক্ষণে △ ABE ও △ ACFর মধ্যে AB = AC (কল্পনা), AE = AF. (প্রমাণিত) এবং অন্তর্ভূত ∠A সাধারণ ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব BE = CF, এইরূপে প্রমাণ করা যায় AD = BE = CF.

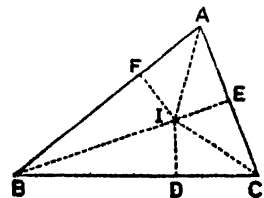
8. একই ভূমির উপর এবং একই পার্শ্বে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ দণ্ডায়মান হইলে, একটি ত্রিভুজ সম্পূর্ণভাবে অপরটির মধ্যে পড়িবে। [C. U. 1914]

মনে করা যাউক ABC ও DBC দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ একই ভূমি BCর উপর দণ্ডায়মান। প্রমাণ করিতে হইবে একটি ত্রিভুজ সম্পূর্ণভাবে অপরটির ভিতর পড়িবে।

প্রমাণ : সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ দুইটি ভূমির একই দিকে অবস্থিত। উহাদের ভূমিসংলগ্ন কোণগুলি পরস্পর সমান নহে; কারণ সমান হইলে একটি আর একটির উপর সমপাতিত হইয়া যাইবে।

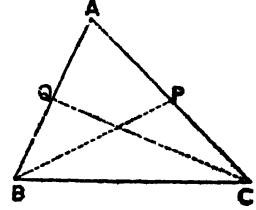
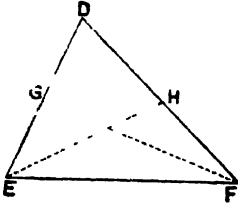
মনে করা যাউক ∠ABC > ∠DBC. ∴ উভয় কোণের BC বাহু সাধারণ ∴ BD বাহু অবশ্যই ∠ABCর মধ্যে পড়িবে। অনুরূপে DC বাহু অবশ্যই ∠ACBর মধ্যে পড়িবে। ∠DBC = ∠DCB এবং ∠ABC = ∠ACB এবং ∠ABC > ∠DBC। ∴ ∠ACB > ∠DCB, এবং D, DB ও DCর ছেদবিন্দুও △ ABCর মধ্যে পড়িবে। অতএব △ DBC সম্পূর্ণভাবে △ ABCর মধ্যে পড়িবে।

9. ABC ত্রিভুজের ∠B ও ∠Cর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AI ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক।

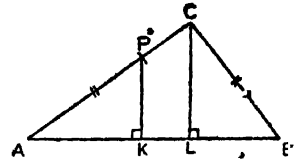
মনে করা যাউক △ ABCর ∠B ও ∠Cর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় BI ও CI, I বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AI ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : I হইতে BC, CA, ABর উপর যথাক্রমে ID, IE ও IF লম্ব টানা হইল।

প্রমাণ : △ BDI ও △ BFIর মধ্যে ∠DBI = ∠FBI (কল্পনা), ∠BDI = ∠BFI (প্রত্যেকে সম ∠) এবং BI সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব ID = IF, অনুরূপে প্রমাণ করা যায় ID = IE ; অতএব IE = IF, এক্ষণে △ AIF ও △ AIEরমধ্যে সম ∠ AEI = সম ∠AFI, IE = IF এবং AI সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠IAF = ∠IAE. অতএব AI ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক।

10. যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইবাহু অপরটির অনুরূপ দুইটি বাহুর সমান হয় এবং তাহাদের অনুরূপ সমান বাহুদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমাদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হইবে।

মনে করা যাউক ABC ও DEF দুইটি ত্রিভুজের AB = DE, AC = DF এবং অনুরূপ মধ্যমা BP = EH ও CQ = FG. প্রমাণ করিতে হইবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।

প্রমাণ : $\because$ AC = DF, $\therefore \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}DF$. অতএব AP = DH ; এক্ষণে $\triangle$ ABP ও $\triangle$ DEHর মধ্যে AB = DE (কল্পনা), BP = EH (কল্পনা), AP = DH (প্রমাণিত) $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore \angle A = \angle D$.

পুনরায় $\triangle$ ABC ও $\triangle$ DEFর মধ্যে AB = DE এবং AC = DF (কল্পনা) এবং অন্তর্ভূক্ত $\angle A$ = অন্তর্ভূক্ত $\angle D$ $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

11. সমকোণী ত্রিভুজ ABCর $\angle C$ সমকোণ এবং AC বাহু BC বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। AC হইতে BCর সমান করিয়া AP কাটিয়া লওয়া হইল। P ও C হইতে ABর উপর PK ও CL দুইটি লম্ব। প্রমাণ কর PK = BL.

মনে করা যাউক সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ এবং AC > BC, AC হইতে BCর সমান করিয়া AP অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। C ও P হইতে ABর উপর যথাক্রমে CL, PK লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে PK = BL.

প্রমাণ।: $\because \angle C = 1$ সম$\angle$ $\therefore \angle CBL + \angle PAK = 1$ সম $\angle$, কিন্তু PK, ABর উপর লম্ব বলিয়া $\angle PKA = 1$ সম$\angle$. $\angle PAK + \angle APK = 1$ সম $\angle$. অতএব $\angle CBL = \angle APK$. এক্ষণে $\triangle CBL$ ও $\triangle APK$র মধ্যে BC = AP (কল্পনা), $\angle BLC = \angle PKA$, প্রত্যেকেই সম $\angle$ এবং $\angle CBL = \angle APK$, $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং BL = PK.

12. সমবাহু ত্রিভুজ ABCর AB, BC, CA বাহু তিনটির উপর P, Q, R এমন তিনটি বিন্দু লওয়া হইল যেন AP = BQ = CR হয়। প্রমাণ কর PQR একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

13. কোন ত্রিভুজের ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব দুইটি পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

[W.B S.F '55, D.B. '30]

14. ABC ত্রিভুজের B হইতে AC বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব ACকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে প্রমাণ্ কর A এবং C হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় পরস্পর সমান হইবে। [W. B. S. F. 1954]

15. রম্বসের কর্ণ যে দুই কোণের মধ্য দিয়া যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. 1916]

16. কোন ত্রিভুজের ভূমি উভয় দিকে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তাহারা পরস্পর সমান হইলে, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। [C. U. 1924]

17. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটি একই ক্রমে বর্ধিত করিলে যে তিনটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান হইলে, প্রমাণ কব যে ত্রিভুজটি সমবাহু।

[C U '24, G. U. '55]

18. একই ভূমি BCর উপর অবস্থিত দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC ও DBC; প্রমাণ কর যে AD অথবা বর্ধিত AD, BC ভূমিকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[C. U. 1938]

19. কোন বৃত্তের O কেন্দ্র, এবং AB একটা জ্যা। ABকে উভয়দিকে C ও D পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করা হইয়াছে যে $\angle DOA = \angle COB$; প্রমাণ কর যে $BC = AD$.

[B. U. 1916]

20. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC$; D, ভূমি BCর উপর যে কোনও বিন্দু। BCর উপব D বিন্দুতে DEF লম্বটি AB ও বর্ধিত AC কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AEF সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

21. ABCD চতুর্ভুজের DC বাহুর E এমন একটি বিন্দু যেন $AD = AE$ এবং $AE \parallel BC$; প্রমাণ কর যে $\angle ADC = \angle BCD$

22. দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ পরস্পর সমান। ত্রিভুজ দুইটির শীর্ষবিন্দু সাধারণ ; প্রমাণ কর যে, উহাদের অপর কৌণিক বিন্দুদ্বয় যোগ করিলে যে সরলরেখা-গুলি হইবে তাহাদের মধ্যে দুইটি সরলরেখা পরস্পর সমান।

23. AOB একটি সমকোণের অভ্যন্তরে P একটি বিন্দু হইতে PM, AOর উপর লম্ব। PMকে Q পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া $PM = QM$ করা হইল। পুনরায় OBর উপর PN লম্বটি বর্ধিত করিয়া $PN = NR$ করা হইল। প্রমাণ কর QR, O বিন্দুগামী সরলরেখা। [B. U]

24 দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখার প্রান্তবিন্দুগুলিকে একই দিকে যে সরলরেখা দ্বারা যোগ করা হয়, তাহারা পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

25. ত্রিভুজ ABCর BA, CA বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত এইরূপভাবে বর্ধিত করা হইয়াছে যেন AD = AB এবং AE = AC হয়। প্রমাণ কর DE, BCর সমান্তরাল। [B. U.]

26. যদি চতুর্ভুজের একটি কর্ণ অপর কর্ণকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে প্রমাণ কর যে প্রথমোক্ত কর্ণটি চতুর্ভুজকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিবে। [M. U.]

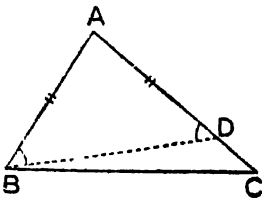
27. যদি দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির দুইটি বাহু অপরের অনুরূপ দুইটি বাহুর সহিত সমান হয়, এবং সমান বাহু দুইটির বিপরীত কোণগুলি সমান হয়, তবে অপর সমান বাহু দুইটির বিপরীত কোণ দুইটিও সমান অথবা সম্পূরক।

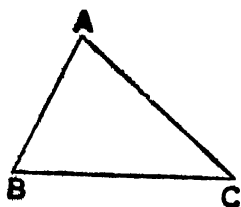
28. একই ভূমি ABর উপর একই দিকে ACB, ADB দুইটি ত্রিভুজ দণ্ডায়মান এবং AC = BD ও AD = BD ; যদি AD ও BC O-বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর OAC এবং OBD ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

29 ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করা হইল। B ও C কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর O বিন্দুটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু হইতে সমদূরবর্তী।

30. ABC ত্রিভুজের BC ভূমির Q মধ্যবিন্দু। Qর মধ্য দিয়া PQR সরলরেখা AB ও AC কে P ও R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AP = AR হয়, প্রমাণ কর যে $BP = CR = \frac{1}{2}(AC \sim AB)$.

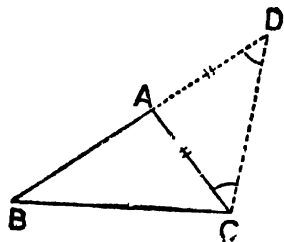
2·8. ত্রিভুজের বাহু ও কোণ বিষয়ক উপপাদ্য :

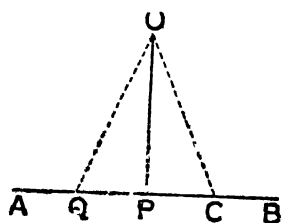
উপপাদ্য—13. কোন ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

ABC ত্রিভুজের যদি AC > AB হয়, তাহা হইলে $\angle ABC > \angle ACB$ হইবে।

উপপাদ্য—14. কোন ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণটির বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণটির বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ABC ত্রিভুজের যদি $\angle ABC > \angle ACB$ হয়, তাহা হইলে $AC > AB$ হইবে।

[ইহা উপপাদ্য 13 এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা (Converse)]

উপপাদ্য—15. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ABC ত্রিভুজের যদি BC বৃহত্তম বাহু হয়, তাহা হইলে $(AB + AC) > BC$ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত : ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। $AC + BC > AB$, $AB < AC + BC$ $\therefore$ $AB - AC < BC$

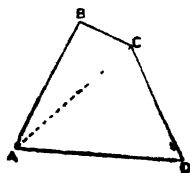
উপপাদ্য—16. কোন সরলেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা টানা যায়, লম্বই তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম।

O হইতে AB সরলরেখার উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যাইবে তন্মধ্যে লম্ব OPই ক্ষুদ্রতম।

অনুশীলনী 28

[1 হইতে 14 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ]

1. ABCD চতুর্ভুজের AD বৃহত্তম বাহু এবং BC ক্ষুদ্রতম বাহু। প্রমাণ কর যে, $\angle BCD > \angle BAD$, $\angle ABC > \angle ADC$. [C. U '40, '18]

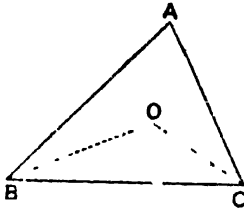
মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AD বৃহত্তম বাহু এবং BC ক্ষুদ্রতম বাহু। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle BCD > \angle BAD$ এবং $\angle ABC > \angle ADC$। AC যোগ করা হইল।

প্রমাণ : $\because$ $AB > BC$, $\therefore$ $\angle ACB > \angle BAC$ $\because$ $AD > DC$, $\therefore$ $\angle ACD > \angle DAC$, $\therefore$ যোগ করিয়া $\angle BCD > \angle BAD$, এইরূপে BD যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় $\angle ABC > ADC$.

2. ABC ত্রিভুজের AC অপেক্ষা AB বৃহত্তর। BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD সরলরেখা BCর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে BD>DC

অঙ্কন : ACর সমান করিয়া AB হইতে AE অংশ কাটিয়া ED যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : △ADC ও △AEDর মধ্যে AC=AE (অঙ্কন)। AD সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূক্ত ∠DAC= অন্তর্ভূক্ত ∠DAE (কল্পনা) ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∵ DC=DE এবং ∠ADC=∠ADE. △ ADEর বহিঃ ∠BED> ∠ADE অর্থাৎ ∠BED>∠ADC. পুনরায় △ABDর বহিঃ∠ADC>∠ABD ; অর্থাৎ ∠ADC>∠EBD.

∴ ∠BED>∠EBD. অতএব BD>DE ; কিন্তু DE=DC BD>DC.

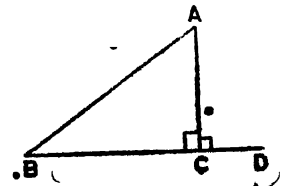
3. ABC ত্রিভুজের AB>AC. BO এবং CO যথাক্রমে ∠B ও ∠Cর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর OB>OC. [D. B. 1943]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB>AC এবং BO ও CO ∠B ও ∠Cর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে BO>CO.

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজের AB>AC ∴ ∠ACB>∠ABC বা $\frac{1}{2}$ ∠ACB>$\frac{1}{2}$∠ABC. অর্থাৎ ∠OCB>∠OBC. অতএব OB>OC.

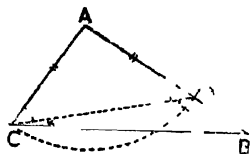
4. **সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজটি উহার বৃহত্তম বাহু।**

[C. U. '35, '28, '15]

মনে করা যাউক ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠ACB সমকোণ এবং AB অতিভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে AB ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহু।

অঙ্কন : BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

প্রমাণ : △ABCর বহিঃকোণ ACD বিপরীত অন্তঃস্থ ∠BAC ও ∠ABCর প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর। কিন্তু ACB সমকোণ ; তাহা হইলে উহার সম্পূরক ACDও সমকোণ। অতএব ∠ACB, ∠BAC এবং ∠ABC প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

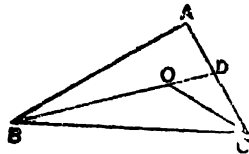
∴ বৃহত্তম ∠ACBর বিপরীত বাহু AB অপর দুইটি কোণের বিপরীত বাহু BC ও AC অপেক্ষা বৃহত্তর। অতএব সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজই বৃহত্তম বাহু।

5. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর অন্তর উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
[W. B. S. F. '52, C. U. '34]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB>AC. প্রমান করিতে হইবে (AB − AC)<BC.

অঙ্কন : ACর সমান করিয়া AB হইতে AD অংশ কাটিয়া DC যুক্ত করা হইল।

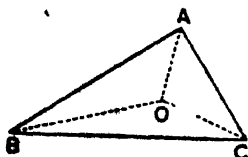
প্রমাণ : △ADC-র AC=AD ∴ ∠ACD = ∠ADC: △BDCর BD বাহু বর্ধিত হওয়ায় বহিঃকোণ ADC>∠DCB, অর্থাৎ ∠ACD.<∠DCB ; পুনরায় ∠ADCর বাহু বর্ধিত হওয়ায় বহিঃকোণ BDC> ∠ACD ∴ ∠BDC >∠DCB অতএব BC>BD কিন্তু BD=AB−AD =AB−AC ∴ BC>(AB−AC). অর্থাৎ (AB−AC)<BC.

6. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে O যে কোনও একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, (i) ∠BOC>∠BAC এবং (ii) (AB+AC)>(OB+OC)
[W. B. S. F. '53, C. U. 1891. D. B. '27]

মনে করা যাউক O △ABCর অভ্যন্তরে যে কোনও বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে (i) ∠BOC >∠BAC, (ii (AB+AC >(OB+OC).

অঙ্কন : BOকে বর্ধিত করিয়া ACর D বিন্দুতে মিলিত করা হইল।

প্রমাণ : ODC ত্রিভুজের বহিঃকোণ BOC>∠ODC. এবং ABD ত্রিভুজের বহিঃকোণ ODC>∠BAD ∴ ∠BOC>∠ODC>∠BAD অর্থাৎ ∠BOC >∠BAC........(i)

△ ABDর (AB+AD)>BD অর্থাৎ (AB+AD)>(BO+OD); আবার △ODCর (OD+DC)>OC ∴ যোগ করিয়া পাওয়া যায় (AB+AD+OD+OC) >(BO+OD+OC); উভয় পক্ষ হইতে সাধারণ বাহু OD বাদ দেওয়া হইল। ∴ (AB+AD+DC)>(BO+OC) অর্থাৎ (AB+AC)>(BO+OC).......(ii)

7. ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরে O যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর (i) (AB+BC+CA)>(OA+OB+OC) ; (ii) (OA+OB+OC)>$\frac{1}{2}$(AB+BC+CA)
[C. U. '27, '39]

মনে করা যাউক O, ABC ত্রিভুজের ভিতর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে,

(i) (AB+BC+CA)>(OA+OB+OC)

(ii) (OA+OB+OC)>$\frac{1}{2}$(AB+BC+CA)

প্রমাণ : (AB+AC)>(OB+OC)

$(AC+BC)>(OB+OA)$; $(BC+AB)>(OA+OC)$.

∴ যোগ করিয়া পাওয়া যায় $2(AB+BC+CA)>2(OA+OB+OC)$.

অতএব $(AB+BC+CA)>(OA+OB+OC)$ ... . (i)

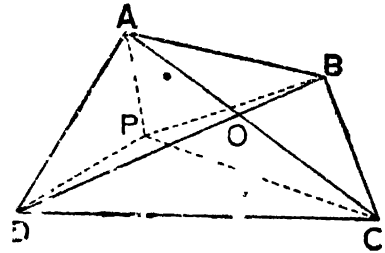
পুনরায়, $(OA+OB)>AB$, $(OB+OC)>BC$, $(OC+OA)>CA$.

∴ যোগ করিয়া পাওয়া যায় $2(OA+OB+OC)>(AB+BC+CA)$.

অতএব $(OA+OB+OC)>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$ ... ... (ii)

8 কোন চতুর্ভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার কৌণিক বিন্দু চারিটির দূরত্বের সমষ্টি চতুর্ভুজটির কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর। চতুর্ভুজটির অভ্যন্তরে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যে ঐ বিন্দু হইতে কৌণিক বিন্দু চারিটির দূরত্বের সমষ্টি ক্ষুদ্রতম।

[C. U. 1944]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। P চতুর্ভুজের অভ্যন্তরে যে কোনও বিন্দু। PA, PB, PC, PD, যুক্ত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$(PA+PB+PC+PD)>(AC+BD)$

এবং P বিন্দু কোন্ স্থানে থাকিলে $(PA+PB+PC+PD)$ ক্ষুদ্রতম হইবে।

প্রমাণ ঃ $\triangle APC$র $(PA+PC)>AC$; এবং $\triangle BPD$র $(PB+PD)>BD$

∴ যোগ করিয়া $(PA+PB+PC+PD)>(AC+BD)$ হইবে। সুতরাং কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণেয় বিন্দু ; কারণ ঐ বিন্দু হইতে কৌণিক বিন্দুচারিটির দূরত্বগুলির সমষ্টি ক্ষুদ্রতম হইবে।

৩ কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহুর সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

[C. U. '20, '50, D. B. '38, G. U '50]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করিতে হইবে যে $(AB+BC+CD+DA)>(AC+BD)$.

প্রমাণ ঃ $\triangle ABC$র $(AB+BC)>AC$, তদ্রূপ $(BC+CD)>BD$, $(CD+DA)>AC$ এবং $(DA+AB)>BD$. ∴ যোগ করিয়া পাওয়া যায় $2(AB+BC+CD+DA)>2(AC+BD)$ ∴ $(AB+BC+CD+DA)>(AC+BD)$.

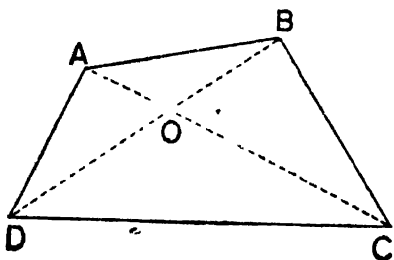
10. চতুর্ভুজের যে কোন তিনটি বাহুর সমষ্টি উহার চতুর্থ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '13, '33]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে ইহার যে-কোন তিনটি বাহু $(AD+AB+BC)>DC$.

অঙ্কন : একটি কর্ণ AC টানা হইল

প্রমাণ : $\triangle ABC$র $(AB+BC)>AC$, উভয়পক্ষে AD যোগ করা হইল।
$\therefore$ $(AB+BC+AD)>(AC+AD)$ কিন্তু $\triangle$ ACDতে $(AC+AD)>DC$.

$$\therefore\ (AB+BC+AD)>DC.$$

11. প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি উহার অর্ধ পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. '43, G. U. '50]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $(AC+BD)>\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$.

প্রমাণ : $\triangle$ ABOতে $(OA+OB)>AB$, অনুরূপে $(OB+OC)>BC$, $(OC+OD)>CD$ এবং $(OD+OA)>DA$.
$\therefore$ যোগ করিয়া পাওয়া যায়, $2(OA+OB+OC+OD)>(AB+BC+CD+DA)$, অথবা, $2(AC+BD)>(AB+BC+CD+DA)$.

$$\therefore\ (AC+BD)>\tfrac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)$$

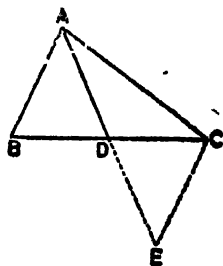
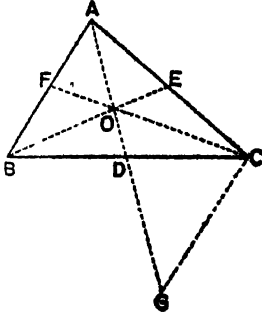
12. ত্রিভুজের যে কোনও দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর। [C U. '23, D. B. '32]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে $(AB+AC)>2AD$. ADকে বর্ধিত করিয়া ADর সমান DE অংশ লওয়া লইল। CE যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle$ ABD ও $\triangle$ DCEর মধ্যে $BD=DC$ (কল্পনা), $AD=DE$ (অঙ্কন) এবং অন্তর্ভূত $\angle ADB=$ অন্তর্ভূত $\angle CDE$ (বিপ্রতীপ কোণ বলিয়া)।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ $AB=CE$

এক্ষণে ACE ত্রিভুজে $(CE+AC)>AE$. অর্থাৎ $(AB+AC)>AE$; বা $(AB+AC)>2AD$.

13. কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
[C. U. '41; W. B. S. F. '54, D B '34, G. U. '48]

মনে করা যাউক AD, BE, CF, ABC ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$(AB+BC+CA)>(AD+BE+CF)$.

অঙ্কন: AD মধ্যমাকে G পর্যন্ত এরূপ বর্ধিত করা হইল যেন $AD=DG$ হয়। CG যোগ করা হইল।

প্রমাণ: ABD ও DCG ত্রিভুজদ্বয়ে

$AD=DG$ (অঙ্কন), $BD=DC$ (কল্পনা), অন্তর্ভূক্ত $\angle ADB=$ অন্তর্ভূক্ত $\angle CDG$ (বিপ্রতীপ কোণ)

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $AB=CG$.

এক্ষণে ACG ত্রিভুজে $(CG+AC)>AG$. ∴ $(AB+AC)>2AD$.

অনুরূপে, $(AC+BC)>2CF$ এবং $(BC+AB)>2BE$.

∴ যোগ করিয়া $2(AB+BC+CA)>2(AD+BE+CF)$

অথবা, $(AB+BC+CA)>(AD+BE+CF)$.

14. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার অর্ধ পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। (13নং প্রশ্নের চিত্র দেখিতে হইবে) [C. U. '41, '46, D. B '34; W. B. S. F '54]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজে AD, BE, CF তিনটি মধ্যমা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $(AD+BE+CF)>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

প্রমাণ: OBD ত্রিভুজের $(OB+OD)>BD$, অনুরূপে $(OD+OC)>DC$. $(OC+OE)>CE$, $(OE+OA)>AE$, $(OA+OF)>AF$, $(OF+OB)>BF$.

বামপক্ষ ও ডানপক্ষ যোগ করিয়া ও সজ্জবদ্ধ করিয়া পাওয়া যায়—

$2[(AO+OD)+(BO+OE)+(CO+OF)]>[(BD+DC)+(CE+EA)+(AF+FB)]$

বা, $2(AD+BE+CF)>(AB+BC+CA)$

∴ $(AD+BE+CF)>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

15. যে কোনও ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু-সংলগ্ন কোণগুলি সূক্ষ্মকোণ।

16. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ বৃহত্তম হইলে, প্রমাণ কর যে, AB, AC এবং 2BC এর সমান বাহুবিশিষ্ট কোন ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব নহে। [C. U. 1946]

17. ABC ত্রিভুজের AB বাহু $>$ CA বাহু ; A কোণের সমদ্বিখণ্ডক AD, BCর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। ADর উপর P যে-কোন বিন্দু। প্রমাণ কর $(BP \sim CP) < (AB - AC)$।

18. ABC ত্রিভুজের $\angle A$র সমদ্বিখণ্ডক AD, BCর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $AB > BD$ এবং $AC > DC$। ইহার সাহায্যে উপপাদ্য 15 প্রমাণ কর।

19. একটি ত্রিভুজের দুই বাহু 2 ও 3। প্রমাণ কর যে, তৃতীয় বাহুটি 5 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কিন্তু 1 অপেক্ষা বৃহত্তর। [C. U. 192¯]

20 কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি উহার যে-কোন বিপরীত বাহুদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

21. কোন চতুর্ভুজের অন্তঃস্থ যে কোন বিন্দু হইতে উহার কৌণিক বিন্দু চারিটির দূরত্বের সমষ্টি উহার অর্ধ পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

22. ABC ত্রিভুজের A কোণের বহিঃদ্বিখণ্ডস্থ যে কোন বিন্দু P। প্রমাণ কর $(AB + AC) < (PB + PC)$.

23 ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। D, ভূমি BCর উপর যে-কোনও বিন্দু। যদি E, ADর মধ্যবিন্দু হয়, প্রমান কর $AE > EB$ অথবা, $< EC$।

24. ABC একটি ত্রিভুজ, উহার মধ্যমা AD এবং AX, BC এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর $AD > AX$। কখন $AD = AX$ হইবে ?

25. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABCর $AB = AC$; শিরঃকোণ BACর সমদ্বিখণ্ডকের উপর ত্রিভুজের ভিতর X যে-কোন বিন্দু। বর্ধিত BC, ACকে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর, $BX > XY$.

26 ABC ত্রিভুজে $AB > AC$ এবং E, $\angle A$র সমদ্বিখণ্ডকের উপর যে কোনও বিন্দু। প্রমাণ কর যে $(AB - AC) > (EB - EC)$.

27. ABC ত্রিভুজের BA বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। $\angle CAD$ ও $\angle CAB$র সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। BE, ACকে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর $EF > AF$.

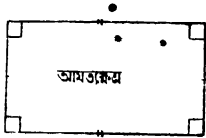
28. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC$; AB ও ACকে যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। BC ও DEকে বর্ধিত করায় F বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর $AD > AE$.

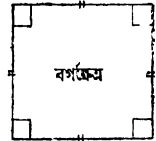
29. ABC ত্রিভুজে $AB < AC$, B ও C কোণের বহিঃদ্বিখণ্ডক D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর $BD > CD$.

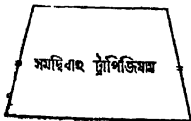
30. ABC ত্রিভুজের ∠A কোণটি সূক্ষ্মকোণ, সমকোণ বা স্থূলকোণ হইবে যদি AC মধ্যমা >, = অথবা < $\frac{1}{2}$ BC হয়।

কতিপয় সংজ্ঞা

3·1. **সামতলিক চতুর্ভুজের বিভিন্ন রূপ :**

(a) যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল, তাহাকে **সামান্তরিক** (Parallelogram) বলে। চতুর্ভুজের বিপরীত কৌণিক বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল-রেখাকে **কর্ণ** (Diagonal) বলে।

(b) যে সামান্তরিকের এক কোণ সমকোণ তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** বা **আয়ত** (Rectangle) বলে।

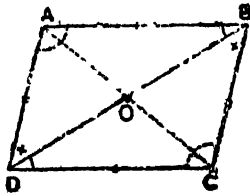
(c) যে আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে।

(d) যে চতুর্ভুজের বাহুগুলি পরস্পর সমান, কিন্তু একটি কোনও সমকোণ নহে, তাহাকে **রম্বস** (Rhombus) বলে।

(e) যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল, অপর জোড়া সমান্তরাল নহে, তাহাকে **ট্রাপিজিয়াম** (Trapezium) বলে।

(f) যে ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুযুগল সমান তাহাকে **সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম** (Isosceles trapezium) বলে।

3·2. চারিটির অধিক সরলরেখা দ্বারা বেষ্টিত ঋজুরেখক্ষেত্রকে **বহুভুজ** (Polygon) বলা হয়। বহুভুজের বাহু সংখ্যা পাঁচটি হইলে ইহাকে **পঞ্চভুজ** (Pentagon), ছয়টি হইলে **ষড়্ভুজ** (Hexagon), সাতটি হইলে **সপ্তভুজ** (Heptagon), আটটি হইলে **অষ্টভুজ** (Octagon) প্রভৃতি বলা হয়।

সামান্তরিক সম্বন্ধীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য 17

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি সমান ; বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

মনে করা যাউক ABCD একটি সামান্তরিক এবং BD ও AC উহার দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(1) AB = DC, AD = BC ; (2) ∠BAD = ∠BCD ; (3) ∠ABC = ∠ADC ;

(4) △ABD ≡ △BDC ; (5) △ABC ≡ △ADC [≡ অর্থ সর্বসম]

প্রমাণ : কল্পনা অনুসারে AB ও DC সমান্তরাল এবং BD উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

∴ ∠ABD = একান্তর ∠BDC ;

পুনরায় AD ও BC সমান্তরাল এবং BD উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

∴ ∠ADB = একান্তর ∠CBD ;

এক্ষণে, ABD ও CBD ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে, ∠ABD = ∠BDC, ∠ADB = ∠CBD এবং BD বাহু সাধারণ।

∵ △ABD ≡ △CBD......(4)

অতএব, AB = DC, AD = BC......(1)

∠BAD = ∠BCD......(2)

∴ ∠ABD = ∠BDC এবং ∠CBD = ∠ADB.

∴ যোগ করিয়া সমগ্র ∠ABC = সমগ্র ∠ADC····· (3)

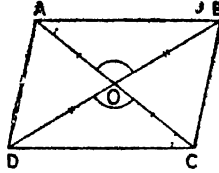
এইরূপে AC কর্ণ যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

△ABC ≡ △ADC......(2)

অনুসিদ্ধান্ত : বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কোণগুলির প্রত্যেকটি সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত : সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে, উহার অপর কোণগুলির প্রত্যেকটি সমকোণ হইবে।

উপপাদ্য 18

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে করা যাউক ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে OA = OC, OB = OD.

প্রমাণ : AB ও DC সমান্তরাল, BD উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

$\angle ABO$ = একান্তর $\angle ODC$.

আবার AD ও BC সমান্তরাল, AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে।

$\therefore$ $\angle BAO$ = একান্তর $\angle DCO$.

এক্ষণে ABO, CDO ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$\angle ABO = \angle ODC$, $\angle BAO = \angle DCO$,

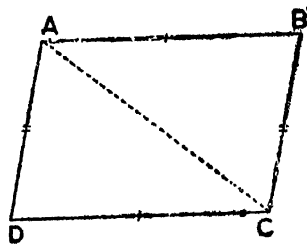
এবং AB = DC. [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া]

$\therefore$ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। অতএব OA = OC ; OB = OD.

অনুসিদ্ধান্ত : রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[অনুশীলনী 2·7 এ 6 নং প্রশ্ন দ্রষ্টব্য]

উপপাদ্য 19

চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান হইলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AB = CD এবং AD = BC ;

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : AC যোগ করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$র মধ্যে

AB = DC, BC = AD [কল্পনা] এবং AC সাধারণ বাহু

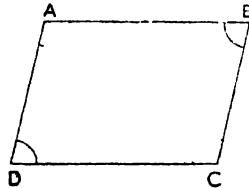
∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

. $\angle BAC = \angle ACD$, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ ; ∴ AB ∥ CD এব $\angle DAC = \angle ACB$, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ ; ∴ AD ∥ BC অর্থাৎ ABCD চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহু সমান্তরাল, অতএব ইহা একটি সামান্তরিক।

অনুসিদ্ধান্ত : রম্বস একটি সামান্তরিক।

অনুসিদ্ধান্ত : সামান্তরিকের এক জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান হইলে, উহার সকল বাহুই সমান হইবে।

উপপাদ্য 20

চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

মনে করা যাউক ABCD একটি চতুর্ভুজ ; উহার $\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : ∵ সকল চতুর্ভুজের অন্তঃকোণের সমষ্টি = 4 সমকোণ

∴ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ, কিন্তু কল্পনা অনুসারে $\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$

∴ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = \angle A + \angle B + \angle A + \angle B.$

$= 2\angle A + 2\angle B = 2(\angle A + \angle B).$

∴ $2(\angle A + \angle B) = 4$ সমকোণ ; অতএব $\angle A + \angle B = 2$ সমকোণ

অর্থাৎ AD ও BC-র ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি 2 সমকোণ হইয়াছে। ∴ AD ও BC পরস্পর সমান্তরাল।

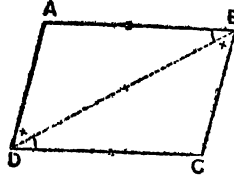
এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, AB ও CD পরস্পর সমান্তরাল।

অতএব ABCD একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য 21

চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হইলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক হইবে।

অথবা,

দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখার একই পার্শ্বস্থ প্রান্ত দুইটির সংযোজক সরলরেখাদ্বয়ও পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AB ও DC সমান ও সমান্তরাল।
প্রমাণ করিতে হইবে ABCD একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : BD যোগ করা হইল।

প্রমাণ : AB ও DC সমান্তরাল এবং BD উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে,

∴ $\angle ABD =$ একান্তর $\angle BDC$.

এক্ষণে, ABD ও BDC ত্রিভুজ দুইটির

AB = CD [কল্পনা], BD সাধারণ বাহু,

এবং অন্তর্ভূত $\angle ABD =$ অন্তর্ভূত $\angle BDC$.

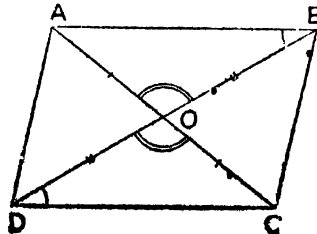
∴ ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। অতএব AD = BC.

এবং $\angle ADB = \angle DBC$. কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ,

AD ও BC সমান্তরাল। অতএব ABCD একটি সামান্তরিক।

অনুসিদ্ধান্ত : সমান্তরাল সরলরেখাগুলির সর্বত্র লম্বদূরত্ব সমান।

উপপাদ্য 22

চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণ দুইটি O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। অর্থাৎ AO = CO, BO = DO.

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : AOB ও COD ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে,

AO = CO, BO = DO [কল্পনা]

এবং অন্তর্ভূক্ত ∠AOB = অন্তর্ভূক্ত ∠COD [বিপ্রতীপ কোণ বলিয়া]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব AB = CD.

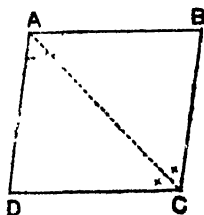
এবং ∠BAO = ∠DCO, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

∵ AB ও CD পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। [উপঃ 21]

অতএব ABCD একটি সামান্তরিক।

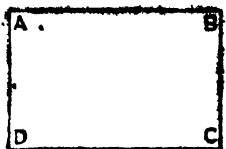
অনুশীলনী 4 1

[1 হইতে 13 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. প্রমাণ কর যে রম্বস একটি সামান্তরিক। [C. U. 1923]

মনে করা যাউক, ABCD একটি রম্বস। প্রমাণ করিতে হইবে ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : কল্পনা অনুসারে রম্বসের সকল বাহুই সমান। অর্থাৎ AB = BC = CD = DA.

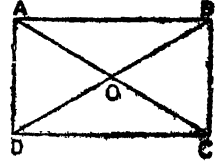
∴ AB = DC এবং AD = BC ∵ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান হইলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে, অতএব ABCD রম্বসটি একটি সামান্তরিক।

2. সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে উহার সকল কোণই সমকোণ হইবে। [C. U. '27]

মনে করা যাউক ABCD সামান্তরিকের ∠A সমকোণ। প্রমাণ করিতে হইবে ∠B, ∠C, ∠D ও সমকোণ।

প্রমাণ : AB ও DC সমান্তরাল এবং AD ইহাদের ছেদক। ∠A + ∠D = 2 সম ∠. কিন্তু ∠A সমকোণ ∴ ∠D ও সমকোণ।

পুনরায় ∠A = ∠C = 1 সম ∠ এবং ∠B = ∠D = 1 সম ∠. অতএব ∠A, ∠B, ∠C, ∠D প্রত্যেকেই সমকোণ।

৩। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। [C. U. '24, D. B. '42]

মনে করা যাউক, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান। প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

প্রমাণ ঃ ADC ও BDC ত্রিভুজদ্বয়ে AD=BC, AC=BD এবং DC সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠ADC=∠BCD। কিন্তু ∠ADC+∠BCD=2 সম ∠ ∴ ∠ADC, ∠BCD প্রত্যেকেই সমকোণ।

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় ∠DAB, ∠ABC ও সমকোণ।

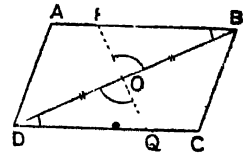
অতএব ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

৮4. একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। [C. U. 1916]

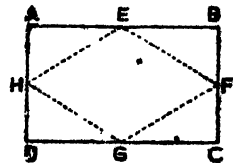
[1 নং প্রশ্নের চিত্র দেখ]। মনে করা যাউক ABC ও ADC সমবাহু ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি ACর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ ঃ সমবাহু ত্রিভুজ বলিয়া AB=AC এবং DC=AC ∴ AB=DC। তদ্রূপ AD=BC. সুতরাং ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু সমান। অতএব ABCD একটি সামান্তরিক।

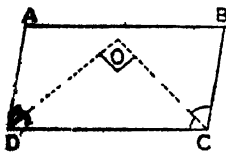
5. সামান্তরিকের যে কোন কর্ণের মধ্যবিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা সামান্তরিকের বিপরীত বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, উহা ঐ মধ্যবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [C. U. '31]

মনে করা যাউক, ABCD সামান্তরিকের DB কর্ণ এবং O, BDর মধ্যবিন্দু। POQ রেখাটি O বিন্দুগামী ও AB, CD দ্বারা সীমাবদ্ধ। প্রমাণ করিতে হইবে PO=QO.

প্রমাণ ঃ AB∥DC এবং BD ইহাদের ছেদক। ∴ ∠PBO=একান্তর ∠QDO ; এক্ষণে PBO, QDO ত্রিভুজদ্বয়ে DO=BO [কল্পনা], ∠PBO=∠QDO, ∠BOP=বিপ্রতীপ∠DOQ ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব PO=QO.

6. আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-চারিটি পর পর যুক্ত করিলে একটি রম্বস উৎপন্ন হয়।

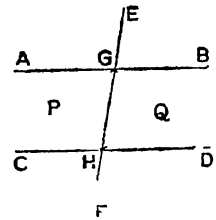
মনে করা যাউক, E, F, G, H, ABCD আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু। বিন্দুগুলি পর পর যুক্ত করিয়া EFGH চতুর্ভুজটি উৎপন্ন হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে EFGH একটি রম্বস।

প্রমাণ ঃ △AEH ও BEFর মধ্যে AE=BE, AH=BF [কারণ AD=BC এবং উহাদের অর্ধাংশ সমান] এবং অন্তর্ভূত ∠EAH

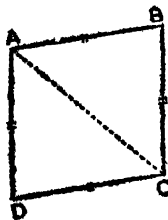
=অন্তর্ভূত $\angle EBF$ [প্রত্যেকেই সমকোণ বলিয়] ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব $EH=EF$; এইরূপে প্রমাণ করা যায় $EF=FG=GH=EH$ $\therefore$ চতুর্ভুজটি রম্বস।

7 সামান্তরিকের যে-কোন বাহু-সংলগ্ন কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমকোণে নত থাকে।

মনে করা যাউক ABCD সামান্তরিকের OD এবং OC যথাক্রমে $\angle D$ ও $\angle C$র সমদ্বিখণ্ডক। উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle COD$=এক সমকোণ।

প্রমাণ : AD∥BC, DC উহাদের ছেদক। $\therefore \angle ADC + \angle BCD = 2$ সম $\angle$. অতএব $\frac{1}{2}\angle ADC + \frac{1}{2}\angle BCD = 1$ সম$\angle$ অর্থাৎ $\angle ODC + \angle OCD = 1$ সম $\angle$ $\therefore \angle DOC$=এক সমকোণ।

8 দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও উহাদের কোন ছেদকের অন্তর্গত অন্তঃস্থ কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক চারিটি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করে।

মনে করা যাউক AB∥CD এবং EGHF ছেদক। GP, HP, HQ এবং GQ যথাক্রমে $\angle AGH$, $\angle GHC$, $\angle CHD$ এবং $\angle BGH$র সমদ্বিখণ্ডক P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে PGQH একটি আয়তক্ষেত্র।

প্রমাণ : AB∥CD এবং EF ইহাদের ছেদক। $\therefore$ একান্তর $\angle AGH$=একান্তর $\angle GHD$ $\therefore \frac{1}{2}\angle AGH = \frac{1}{2}\angle GHD$, বা $\angle PGH = \angle GHQ$ কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ $\therefore$ PG∥HQ এইরূপে প্রমাণ করা যায় GQ∥PH. অতএব PGQH একটি সামান্তরিক। পুনরায় সন্নিহিত $\angle AGH + \angle BGH = 2$ সম $\angle$ $\therefore \frac{1}{2}\angle AGH + \frac{1}{2}\angle BGH = 1$ সম$\angle$. অর্থাৎ $\angle PGH + \angle QGH = 1$ সম $\angle$ বা $\angle PGQ$ সমকোণ। সামান্তরিক PGQH এর একটি কোণ সমকোণ। সুতরাং উহার সকল কোণগুলি সমকোণ। অতএব PGQH একটি আয়তক্ষেত্র।

9 ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ যদি $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে $\angle C$ কেও সমদ্বিখণ্ডিত করিবে এবং সামান্তরিকটি রম্বস হইবে। [C. U. 1926]

মনে করা যাউক ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণ $\angle BAD$কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AC, $\angle BCD$কেও সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে এবং ABCD একটি রম্বস।

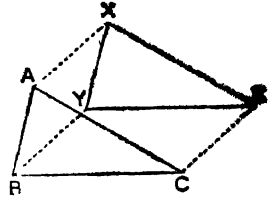
প্রমাণ : $\triangle ABC$ ও $\triangle ADC$র মধ্যে $\angle B = \angle D$, $\angle BAC = \angle DAC$ এবং AC সাধারণ বাহু। $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ তৃতীয় $\angle BAC = \angle DCA$ অতএব AB= AD, কিন্তু AB=DC [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া]

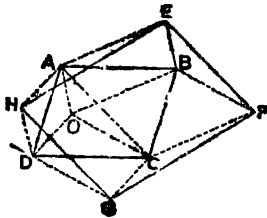
$\therefore$ সামান্তরিকের বাহুগুলি সমান। অতএব ABCD একটি রম্বস।

10 ABC ও XYZ দুইটি ত্রিভুজে AB ও BC যথাক্রমে XY ও YZর সমান ও সমান্তরাল। প্রমাণ কর যে AC ও XZ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। [P.U. 1924]

মনে করা যাউক △ABC এবং △XYZ এর AB =ও ‖XY এবং BC=ও ‖YZ প্রমাণ করিতে হইবে AC=ও ‖XZ.

অঙ্কন : AX, BY ও CZ যোগ করা হইল।

প্রমাণ : যেহেতু AB ও XY সমান ও সমান্তরাল ∴ ABYX একটি সামান্তরিক এবং AX ও BY=ও ‖ পুনরায় BC ও YZ সমান ও সমান্তরাল ∴ BCZY একটি সামান্তরিক এবং BY ও CZ =ও ‖. অতএব AX ও CZ সমান ও সমান্তরাল। ∴ ACZX একটি সামান্তরিক। অতএব AC ও XY সমান ও সমান্তরাল।

11. ABCD সামান্তরিকের মধ্যে O যে কোন একটি বিন্দু। OAEB, OBFC, OCGD, ও ODHA সামান্তরিকগুলি অঙ্কিত করিয়া প্রমাণ কর যে EFGH একটি সামান্তরিক। [C. U. 1923]

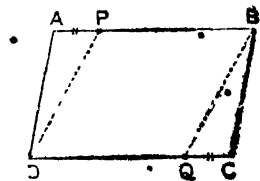
মনে করা যাউক, ABCD সামান্তরিকের মধ্যে O যে কোনও বিন্দু। OAEB, OBFC, OCGD এবং ODHA চারিটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিয়া EFGH চতুর্ভুজ গঠিত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে EFGH একটি সামান্তরিক।

অঙ্কন : AC কর্ণ অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : AEBO সামান্তরিকের AE=ও ‖OB. তদ্রূপ, CF=ও ‖OB ∴ AE=ও ‖CF. অতএব AEFC একটি সামান্তরিক।

∴ EF=ও ‖AC এইরূপে প্রমাণ করা যায় HG=ও ‖ AC অতএব EF=ও ‖HG সুতরাং EFGH একটি সামান্তরিক।

12. ABCD একটি সামান্তরিক P ও Q যথাক্রমে AB ও CDর উপর দুইটি বিন্দু। যদি AP=CQ হয়, তবে প্রমাণ কর BPDQ একটি সামান্তরিক।

মনে করা যাউক ABCD একটি সামান্তরিক। P ও Q যথাক্রমে AB ও CDর উপর দুইটি বিন্দু এবং AP=CQ প্রমাণ করিতে হইবে BPDQ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : AB=CD (AB−AP)=(CD−CQ), অর্থাৎ, BP=DQ এবং BP ও DQ সমান্তরাল। অতএব BPDQ একটি সামান্তরিক।

13. কোন সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয় যোগ করিয়া যে চারিটি চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয়, তাহাদের প্রত্যেকে সামান্তরিক

14. সামান্তরিকের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকগুলি একটি আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করে। বিপরীতক্রমে, চতুর্ভুজের কোণগুলির চারিটি সমদ্বিখণ্ডক দ্বারা আয়তক্ষেত্র উৎপন্ন করিলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

15 রম্বসের কর্ণদ্বয় রম্বসকে চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

16. সামান্তরিকের যে কোন কর্ণের উপর সামান্তরিকের অপর কৌণিক বিন্দু হইতে লম্ব অঙ্কিত করিলে, ঐ লম্ব দুইটি সমান হইবে।

17. কোন ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় সমান হইলে, প্রমাণ কর যে, উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির সংলগ্ন কোণদ্বয় পরস্পর সমান।

18. সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়ামের ভূমিস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান। উহার বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক এবং উহার কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান।

19. বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U 1922]

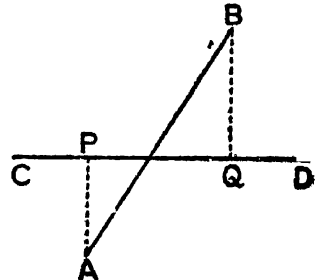
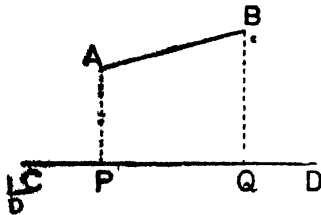
20. ABCD এবং ABPQ দুইটি সামান্তরিকের AB সাধারণ বাহু। প্রমাণ কর যে CDQP একটি সামান্তরিক।

21. ABCD সামান্তরিকের $\angle A$ স্থূলকোণ। ABP ও ADQ দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ সামান্তরিকের বহির্দেশে অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর যে CPQ সমবাহু ত্রিভুজ।

[ইঙ্গিত: $\triangle BCP$ ও $\triangle DCQ$র মধ্যে $BC = AD = DQ$, $BP = AB = DC$. $\angle CBP = \angle CBA + \angle PBA = \angle CDA + \angle ADQ = \angle CDQ$ $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব $PC = CQ$ এবং $\angle BPC + \angle PBA + \angle ABC + \angle BCP$ $\angle BCP + \angle PCQ + \angle DCQ + \angle ABC = 2$ সম $\angle$. কিন্তু $\angle BPC = \angle DCQ$. $\therefore$ $\angle PCQ = \angle PBA = 60^\circ$. অতএব PCQ সমবাহু ত্রিভুজ।]

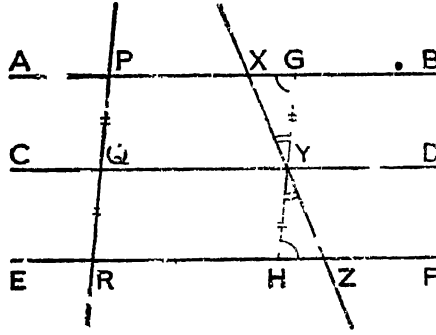
22. BAC কোণের মধ্যবর্তী D যে কোন একটি বিন্দু। Dর মধ্য দিয়া একপ একটি সরলরেখা BDC অঙ্কিত কর যেন $BD = DC$ হয়।

23 একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির উপর দুইটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইল। ঐ বর্গক্ষেত্রের দূরবর্তী কৌণিক বিন্দু দুইটি হইতে বর্ধিত অতিভুজের উপর লম্বদ্বয়ের সমষ্টি অতিভুজের সহিত সমান হইবে।

41 লম্ব অভিক্ষেপ

AD, কি ·
কোন সরলরেখার দুইটি প্রান্ত হইতে অপর কোন সীমাহীন সরলরেখার উপর
∴ সাম।

লম্ব টানিলে ঐ লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দুর দূরত্বকে সরলরেখাটির লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection) বলে। পূর্বপৃষ্ঠার চিত্রে AB সরলরেখার A ও B বিন্দু দুইটি হইতে CD সরলরেখার উপর AP ও BQ দুইটি লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। P ও Q লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দু। PQ, ABর লম্ব অভিক্ষেপ।

উপপাদ্য 22

তিন বা তাহার অধিক সমান্তরাল সরলরেখা, অপর কোন সরলরেখাকে ছেদ করিলে, সমান্তরাল রেখাসমূহের মধ্যস্থিত ঐ ছেদক রেখার অংশগুলি যদি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে ঐ সমান্তরাল রেখাগুলি অপর কোন ছেদক সরলরেখারও অনুরূপ সমান অংশ ছিন্ন করিবে।

মনে করা যাউক AB, CD ও EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা PQR ছেদক হইতে PQ ও QR দুইটি সমান অংশ ছিন্ন করিয়াছে এবং অপর একটি ছেদক XYZ হইতে XY এবং YZ অংশ ছিন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে XY = YZ.

অঙ্কন : Y বিন্দু দিয়া PQR এর সমান্তরাল GYH সরলরেখা ABর সহিত G এবং EFর সহিত H বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ : PG, QY-র সমান্তরাল [কল্পনা] এবং PQ, GY-র সমান্তরাল [অঙ্কন]

∴ PQYG একটি সামান্তরিক।

PQ = GY.

এইরূপ QRHY এক সামান্তরিক ; ∴ QR = YH.

কিন্তু কল্পনানুসারে PQ = QR. ∴ GY = YH.

পুনরায় AB ও EF সমান্তরাল এবং GH উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে।

∴ ∠XGY = একান্তর ∠YHZ.

এক্ষণে GXY ও YZH ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে ∠XGY = ∠YHZ [প্রমাণিত]

∠XYG = বিপ্রতীপ ∠ZYH

এবং GY = YH [প্রমাণিত]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

∴ XY = YZ.

4 2. **অনুসিদ্ধান্ত :** কোন ত্রিভুজের এক বাহুকে কয়েকটি সমান অংশে বিভক্ত করিয়া, প্রত্যেক বিভাগ বিন্দু হইতে ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে, ঐ রেখাগুলি অপর বাহুকে একই সংখ্যক পরস্পর সমান অংশে বিভক্ত করিবে।

ABC একটি ত্রিভুজ। AB বাহু d, e, f, g বিন্দুতে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে। ঐ বিন্দুগুলি হইতে BC-র সমান্তরাল dd_1, ee_1, ff_1, gg_1 সরলরেখা AC বাহুকে d_1, e_1, f_1 ও g_1 বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে $Ad_1 = d_1e_1 = e_1f_1 = f_1g_1 = g_1C$

A বিন্দু হইতে BC-র সমান্তরাল AX সরলরেখা টানা হইল।

প্রমাণ : AX, dd_1, ee_1, ff_1, gg_1, সমান্তরাল রেখা AB ছেদক হইতে Ad, de, ef, fg, gB প্রভৃতি সমান অংশ ছেদ করিয়াছে। ∴ উহারা AC ছেদক হইতেও সমান অংশ ছেদ করিবে। অতএব $Ad_1 = d_1e_1 = e_1f_1 = f_1g_1 = g_1C$

উপপাদ্য 24

ত্রিভুজের একটি বাহুর মধ্যবিন্দু হইতে অপর একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা টানিলে উহা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D হইতে BC বাহুর

সমান্তরাল করিয়া DE রেখা অঙ্কিত হইল। উহা ACর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে AE = CE.

অঙ্কন ঃ E বিন্দু হইতে ABর সমান্তরাল EF সরলরেখা টানা হইল। উহা যেন BCর সহিত F-বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ ঃ DE ও BF সমান্তরাল [কল্পনা]

DB ও EF সমান্তরাল [অঙ্কন]

∵ DEFB একটি সামান্তরিক, EF = BD.

কিন্তু D, ABর মধ্যবিন্দু, ∴ BD = AD, অতএব EF = AD.

পুনরায় EF ও AB সমান্তরাল এবং AC উহাদের সহিত মিলিত হইয়াছে।

∴ $\angle CEF =$ অনুরূপ $\angle DAE$,

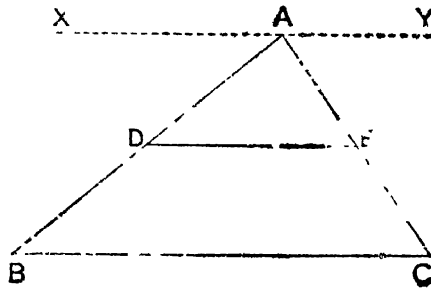
এবং DE ও BC সমান্তরাল এবং AC উহাদের ছেদ করিয়াছে।

$\angle ECF =$ অনুরূপ $\angle AED$.

অতএব CEF, ADE ত্রিভুজ দুইটির

$\angle CEF = \angle DAE$, $\angle ECF = \angle AED$ এবং $EF = AD$

∵ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AE = CE

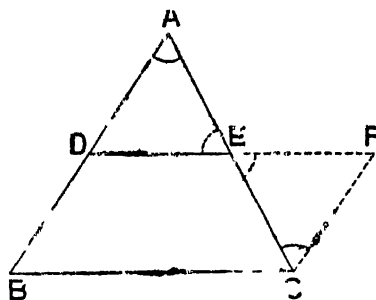
বিকল্প পদ্ধতি ঃ

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের BA বাহুর মধ্যবিন্দু D হইতে BC বাহুর সমান্তরাল DE বাহু। উহা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে AE = CE.

অঙ্কন ঃ BC বাহুর সমান্তরাল করিয়া A বিন্দুতে XAY সরলরেখা অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণ : BC, DE ও XAY তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা, AB ছেদকের AD ও BD দুইটি সমান অংশে ছেদ করিয়াছে। ∴ AC ছেদকেরও অংশ দুইটি সমান হইবে ; অর্থাৎ AE = CE.

উপপাদ্য 25

ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধ।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E, উহাদের DE সরল রেখাদ্বারা যুক্ত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে DE ও BC সমান্তরাল এবং DE = $\frac{1}{2}$BC

অঙ্কন : DE কে F বিন্দু পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হইল যেন DE = EF হয়। CF যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : ADE ও CEF ত্রিভুজ দুইটির

AE = CE [কল্পনা], DE = EF [অঙ্কন]

এবং অন্তর্ভূত ∠AED = অন্তর্ভূত ∠CEF [বিপ্রতীপ কোণ বলিয়া]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AD = CF এবং ∠DAE = ∠ECF, কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

∴ AD ও CF সমান্তরাল অর্থাৎ BD ও CF সমান্তরাল।

[∵ AD ও BD একই সরলরেখায় অবস্থিত]

আবার CF = AD = BD [∵ D, AB র মধ্যবিন্দু]

∴ DB ও CF সমান ও সমান্তরাল। অতএব DB, CF এর প্রান্তবিন্দুগুলি একইক্রমে যুক্ত করিয়া গঠিত চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

∴ DF অর্থাৎ DE ও BC সমান্তরাল। কিন্তু DE = $\frac{1}{2}$ DF (অঙ্কন)।

অতএব DE = $\frac{1}{2}$BC. [∵ DF = BC, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয়]

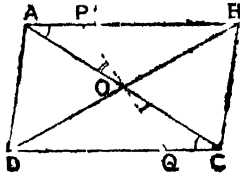
4·3. কর্ণমাপনী (Diagonal Scale):

জ্যামিতি অঙ্কনের জন্য যে সাধারণ মাপনী ব্যবহার হয় তাহাতে কেবল সেন্টিমিটার বা ইঞ্চির দশমাংশ দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়। কিন্তু কর্ণমাপনীর সাহায্যে যে কোন দৈর্ঘ্যের এককের শতাংশ পর্যন্ত দৈর্ঘ্য মাপা যায়।

একটি সরলরেখা ABকে 1 ইঞ্চি অন্তর O, 1, 2, প্রভৃতি দাগ দেওয়া হইয়াছে। OA কে 1, 2, 3, 4 প্রভৃতি সমান 10 ভাগে বিভক্ত করা হইয়াছে। AP⊥AB। APকেও যে কোন সমান 10 ভাগে বিভক্ত করিয়া প্রতিটি বিন্দু হইতে ABর সমান্তরাল সরলরেখা টানা হইয়াছে। এইরূপ দশম সমান্তরাল সরলরেখায় PQ-কেও $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$, প্রভৃতি সমান 10 ভাগে ভাগ করিয়া চিত্রে প্রদর্শিত O বিন্দু $\bar{1}$র সহিত যোগ করিতে হইবে। এইরূপে $1\bar{2}$, $2\bar{3}$, $3\bar{4}$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি সরলরেখা দ্বারা যোগ করিতে হইবে। ABর সমান্তরাল রেখাগুলিকে $O\bar{1}$ রেখা 10টি ভাগে বিভক্ত করিয়াছে। প্রত্যেক ভাগ তাহার নিম্নস্থ রেখার ভাগ অপেক্ষা $\frac{1}{10} \times 1$ ইঞ্চি অধিক, অর্থাৎ 0.1 ইঞ্চি বড়। সেইজন্য এই সরলরেখাগুলি হইতে আমরা শতাংশ ভাগ পাইতে পারি। 2·65 ইঞ্চি দীর্ঘ রেখা অঙ্কিত করিবার প্রয়োজন হইলে 2S রেখার *m* বিন্দু হইতে ABর সমান্তরাল এবং AB হইতে পঞ্চম রেখায় OAর [illegible] দাগের রেখা অর্থাৎ $6\bar{7}$ রেখা যে বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে সেই *n* বিন্দু পর্যন্ত দূরত্ব 2·65 ইঞ্চি হইবে। অর্থাৎ *mn*-র দৈর্ঘ্য 2·65" কাটা কম্পাস দ্বারা এই দূরত্ব মাপিয়া খাতায় দাগ দিয়া সরলরেখা আঁকিয়া লইতে হয়। এইরূপ 1·48 ইঞ্চি দীর্ঘ সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইলে 1R রেখার S বিন্দু হইতে আরম্ভ করিতে হইবে। অষ্টম সমান্তরাল রেখাকে $4\bar{5}$ রেখা যে *t* বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে সেই *t* বিন্দুর 1R রেখার S বিন্দু হইতে দূরত্ব 1·48 ইঞ্চি হইবে। অর্থাৎ $St = 1.48''$।

অনুশীলনী 4·2.

[1 হইতে 11 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত দুইটি বিপরীত বাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ যে কোন সরলরেখা উক্ত ছেদবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। [C U. 1931]

মনে করা যাউক ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O। POQ রেখা O বিন্দুগামী এবং AB ও CD দ্বারা P ও Q বিন্দুতে সীমাবদ্ধ ; প্রমাণ করিতে হইবে PO = QO.

প্রমাণ : △ APO ও △ CQO-র মধ্যে, AO = CO, একান্তর ∠OAP = একান্তর ∠OCQ, এবং ∠AOP = বিপ্রতীপ ∠COQ.

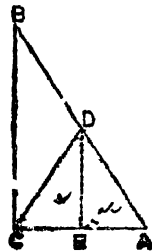
ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব PO = QO

2. সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অতিভুজের অর্ধেক। [C U 1919]

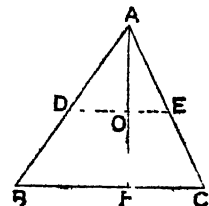
মনে করা যাউক সমকোণী ত্রিভুজ ABC-র ∠C সমকোণ এবং D অতিভুজ AB-র মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে D = $\frac{1}{2}$ AB

অঙ্কন : D হইতে BC-র সমান্তরাল DE রেখা AC-র সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ : AB-র মধ্যবিন্দু D হইতে BC-র সমান্তরাল DE রেখা AC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে অতএব AE = = CE ; পুনরায় DE ∥ BC এবং AC ছেদক।

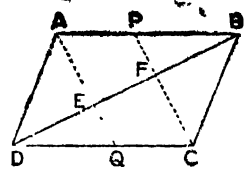
∴ ∠DEA = অনুরূপ ∠BCA, = 1 সম ∠ সন্নিহিত ∠DEC ও এক সমকোণ। এক্ষণে △ DEC ও △ DEA-র মধ্যে, CE = AE, DE সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূত ∠DEC = অন্তর্ভূত ∠DEA ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম অতএব CD = AD = $\frac{1}{2}$AB

3 ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাগুলি উহার অপর দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় D ও E AF যে কোন একটি সরলরেখা A হইতে ভূমি BC পর্যন্ত অঙ্কিত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে AO = OF.

প্রমাণ : ABF ত্রিভুজে AB-র মধ্যবিন্দু D হইতে উহার ভূমি BF-র সমান্তরাল DO রেখা অপর বাহু AF-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। অতএব AO = OF.

4. ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বিপরীত বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q. প্রমাণ কর যে BD কর্ণ AQ ও PC দ্বারা সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হয়।

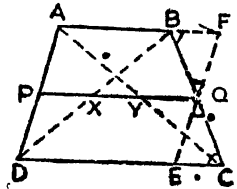
[B. U. 1924]

মনে করা যাউক ABCD সামান্তরিকের ABর মধ্যবিন্দু P এবং CDর মধ্যবিন্দু Q এবং BD একটি কর্ণ। প্রমাণ করিতে হইবে AQ ও PC BD কর্ণকে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করিয়াছে। অর্থাৎ DE = EF = BF.

প্রমাণ : $AP = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}DC = CQ$ [$AB = DC$] $AB \parallel DC$ অর্থাৎ $AP \parallel CQ$ $\therefore$ AP ও CQ সমান ও সমান্তরাল। অতএব AQCP একটি সামান্তরিক। $\therefore PC \parallel AQ$. এক্ষণে BAE ত্রিভুজে AB বাহুর মধ্যবিন্দু P হইতে PF রেখা AEর সমান্তরাল, . BEকে PF সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অর্থাৎ BF = EF পুনরায় DFC ত্রিভুজে, DCর মধ্যবিন্দু Q হইতে CFর সমান্তরাল QE রেখা DFকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অতএব DE = EF, সুতরাং DE = EF = BF, অর্থাৎ BD কর্ণ AQ ও PC দ্বারা তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

5. ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা (a) সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সহিত সমান্তরাল, (b) কর্ণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক, এবং (c) সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধেক। [C. U. 1941, '36, B. U. '35]

মনে করা যাউক, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম ; P ও Q উহার অসমান্তরাল বাহুদ্বয় AD ও BCর মধ্যবিন্দু। AC ও BD ইহার কর্ণ। প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(a) $PQ \parallel AB$ বা $\parallel CD$, (b) AC ও BD কে PQ যথাক্রমে Y ও X বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে এবং (c) $PQ = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

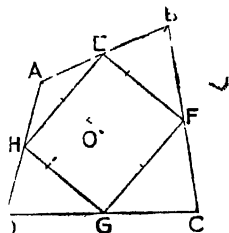
অঙ্কন : Q বিন্দুর মধ্যগামী এবং ADর সমান্তরাল EQF সরলরেখা CDর সহিত E বিন্দুতে এবং বর্ধিত ABর সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ : (a) AFED চতুর্ভুজের $AF \parallel DE$ [কল্পনা]. $AD \parallel EF$ [অঙ্কন] $\therefore$ ইহা একটি সামান্তরিক। $\therefore$ $AD = EF$. $\triangle$ BQF ও $\triangle$ QECর একান্তর $\angle FBQ$ = একান্তর $\angle ECQ$, $\angle BQF$ = বিপ্রতীপ $\angle CQE$ এবং $BQ = CQ$ [কল্পনা] $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব $FQ = QE$ অর্থাৎ $FQ = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}AD = AP$ এবং $FQ \parallel AP$. $\therefore$ APQF একটি সামান্তরিক। অতএব $PQ \parallel AF$ বা $\parallel AB$ এবং

PQ ‖ DE বা ‖ DC⋯ ⋯(a) $PQ=\frac{1}{2}(AF+DE)-\frac{1}{2}[AB+BF+DC-EC]$
$=\frac{1}{2}[AB+DC]$, [BF=EC]⋯ ⋯(c)

△ ABCর মধ্যে BCর মধ্যবিন্দু Q হইতে AB ‖ QY অঙ্কিত হইয়াছে।

∴ QY, AC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অর্থাৎ AC কর্ণ Y বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। · (b)

6 কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে এব উহার বাহু-সমষ্টি ঐ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান হইবে। C U 1881]

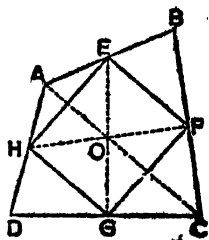
মনে করা যাউক ABCD একটি চতুর্ভুজ। উহার E F, G, H যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA এর মধ্যবিন্দ এব· AC ও BD কর্ণ দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে, EFGHএকটি সামান্তরিক এব· EF+FG+GH+HE=AC+BD

প্রমাণঃ ABD ত্রিভুজে AB ও ADর মধ্যবিন্দ যথাক্রমে E ও H EH ‖ BD এবং $EH=\frac{1}{2}BD$
অনুরূপে FG BD এব· $FG=\frac{1}{2}BD$ EH ও FG সমান ও সমান্তরাল। EFGH একটি সামান্তরিক

এইরূপে $EF=GH=\frac{1}{2}AC$ অতএব $EH+FG+EF+GH=\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}AC+\frac{1}{2}AC=BD+AC$.

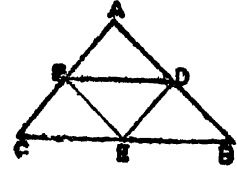
7 চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দ সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C U. 1939]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজের E, F, G H যথাক্রমে AB, BC, CD, DA বাহুগুলির মধ্যবিন্দ। প্রমাণ করিতে হইবে EG ও HF, O বিন্দুতে পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

অঙ্কন। AC কর্ণ যোগ করা হইল।

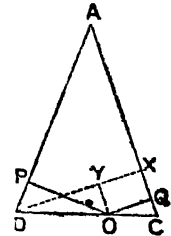
প্রমাণঃ ABC ত্রিভুজে E ও F যথাক্রমে AB ও BCর মধ্যবিন্দুদ্বয়। ∴ EF, ACর সমান্তরাল ও অর্ধেক। অনুরূপে GH, ACর সমান্তরাল ও অর্ধেক। ∴ EFGH একটি সামান্তরিক এবং সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অতএব EG ও FH পরস্পরকে O-বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

8. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু যোগ করিলে তিনটি সামান্তরিক ও চারিটি সর্বসম ত্রিভুজের উৎপত্তি হয়।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB, BC ও AC বাহু তিনটির যথাক্রমে D, E, F মধ্যবিন্দুত্রয়। প্রমাণ করিতে হইবে $\triangle DEF = \triangle DEB = \triangle CEF = \triangle ADF$ এবং ADEF, FDBE ও FDEC এই তিনটি সামান্তরিক।

প্রমাণ ঃ ABC ত্রিভুজের AB ও ACর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও F. ∴ DF, BCর সমান্তরাল ও অর্ধেক অর্থাৎ BEর সহিত সমান। অতএব FDBE একটি সামান্তরিক। এই সামান্তরিকের কর্ণ DE সামান্তরিককে DEF ও BED এই দুইট সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়াছে। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় ADEF এবং FDECও সামান্তরিক এবং তাহাদের কর্ণ FD ও EF, AFD ও DEF এবং DEF ও CEF এই দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়াছে। অতএব চারিটি সর্বসম ত্রিভুজ ও তিনটি সামান্তরিক গঠিত হইয়াছে।

9. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থিত যে কোন বিন্দু হইতে সমান বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্তবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

মনে করা যাউক ADC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; উহার AD = AC এবং O, DC ভূমির উপর যে কোন বিন্দু ; O হইতে AD ও ACর উপর যথাক্রমে OP ও OQ দুইটি লম্ব এবং D হইতে ACর উপর DX একটি লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে OP + OQ = DX.

অঙ্কন ঃ O হইতে DXর উপর OY লম্ব অঙ্কিত হইল।

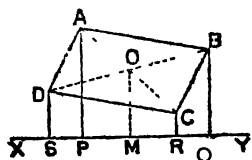
প্রমাণ : OQXY চতুর্ভুজের $\angle OYX = \angle YXQ = \angle OQX = 1$ সমকোণ। কারণ $OY \perp DX$, $YX \perp AC$, $OQ \perp AC$. ∴ চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। অতএব OQ = XY. এক্ষণে $\triangle DPO$ ও $\triangle DYO$র মধ্যে $\angle DPO = \angle DYO = 1$ সম∠, DO সাধারণ বাহু এবং $\angle PDO = \angle ACO$ = অনুরূপ $\angle YOD$ কারণ OY ∥ CA.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব OP = DY অর্থাৎ OP + OQ = DY + XY = DX.

10. ABCD একটি সামান্তরিক এবং XY উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। A, B, C, D হইতে XY-র উপর AP, BQ, CR, DS লম্ব হইলে প্রমাণ কর AP + CR = BQ + DS.

মনে করা যাউক ABCD সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দু A, B, C, D হইতে XYর

উপর যথাক্রমে AP, BQ, CR, DS চারিটি লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে AP+CR=BQ+DS.

অঙ্কন : BD ও AC কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিল। O হইতে XYর উপর OM লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : একই সরলরেখা XYর উপর AP, BQ, CR, CS ও OM লম্ব বলিয়া উহারা সমান্তরাল। ACRP চতুর্ভুজটির AP ∥ CR এবং ACর মধ্যবিন্দু O হইতে অঙ্কিত, OM, AP ও CRর সহিত সমান্তরাল। M, PRর মধ্যবিন্দু। .. ACRPটি একটি ট্রাপিজিয়াম এবং AP+CR=2OM অনুরূপে BDSQ ট্রাপিজিযামে BQ+DS=2OM অতএব AP+CR=BQ+DS.

11 সমবাহু ত্রিভুজের যে কোন বিন্দু হইতে তিনটি বাহুর উপর লম্ব তিনটির সমষ্টি ত্রিভুজের যে কোন কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

12 কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর মধ্যবিন্দুর অবস্থান প্রদত্ত থাকিলে ত্রিভুজটি কিরূপে অঙ্কন করিবে?

13. CD একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O উহার মধ্যবিন্দু। C, O, D হইতে অপর একটি সরলরেখা ABর উপর CP, OQ এবং DR লম্ব। প্রমাণ কর যে, C ও D বিন্দুদ্বয় AB-র একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, $OQ=\frac{1}{2}(CD+DR)$ এবং উহারা বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, $OQ=\frac{1}{2}(CP\sim DR)$।

14 ট্রাপিজিয়মের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুর সমান্তরাল হইবে।

15 ত্রিভুজের শীর্ষ দিয়া অঙ্কিত যে কোন সরলরেখার উপর ভূমির প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে দুইটি লম্ব টানিলে, এই লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দু দুইটি ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

16. চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু দুইটির সহিত যুক্ত করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

17. রম্বসের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি একইক্রমে যুক্ত করিলে একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। এই আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি একইক্রমে যুক্ত করিলে একটি রম্বস হইবে।

18. যে কোন সরলরেখার উপর দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

19. সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির দ্বিগুণ হইলে, অতিভুজ ক্ষুদ্রতর বাহুর দ্বিগুণ হইবে। [C. U. 1945, '58 ; W. B S. F. 1956]

20. ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা ত্রিভুজকে 1 : 3 অনুপাতে বিভক্ত করে এবং উহা তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

21. ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুগামী XOY সরলরেখা AD ও BCকে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং X ও Y বিন্দু হইতে CD ও AB র উপর যথাক্রমে XM ও YN লম্ব। প্রমাণ কর XNYM একটি সামান্তরিক।

22. ABC ত্রিভুজের AP = $\frac{1}{2}$ AB, এবং AQ = $\frac{1}{2}$ AC প্রমাণ কর PQ = $\frac{1}{2}$BC

23. ABC ত্রিভুজে AB = 2AC BA কে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় বহিঃকোণ CADর সমদ্বিখণ্ডক AE বর্ধিত BC কে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর C বিন্দুতে BE সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

24 কোনও ত্রিভুজের ভূমির মধ্যবিন্দু দিয়া যে কোন একটি বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করা যায়। প্রমাণ কর যে এই সরলরেখার শীর্ষকোণের অন্তঃদ্বিখণ্ডক ও বহিঃদ্বিখণ্ডক দ্বারা কর্তিত অংশ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান হইবে। [M U.]

25. ABC সমকোণী ত্রিভুজে ACB সমকোণ। D, E, F যথাক্রমে BC, CA. ABর মধ্যবিন্দু। C হইতে ABর উপর CHG লম্বকে DF ও EF, প্রয়োজন হইলে বর্ধিত করিয়া যথাক্রমে H ও G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর AG ও BH সমান্তরাল। [M. U.]

5

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

রেখা, কোণ, সমান্তরাল

পুনরালোচনা

5·1. **স্বীকার্য** (Postulates)ঃ জ্যামিতিতে কতকগুলি অতি সহজ অঙ্কন কার্য আছে যেগুলির সম্পাদন সম্ভাবনা কোনরূপ প্রমাণের প্রয়োজন হয় না। ইহা আপনা হইতেই স্পষ্টই প্রতীয়মান হয়। এইগুলিকে স্বীকার করিয়া লওয়া হয় বলিয়া ইহাদের স্বীকার্য বলে। যথা :

1. যে-কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অপর যে-কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু পর্যন্ত কেবলমাত্র একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়।

2. যে-কোন একটি সসীম নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উভয় দিকে যতদূর ইচ্ছা বর্ধিত করা যায়।

3 যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন পরিমাণ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

এই তিনটি স্বীকার্যের সাহায্যে জ্যামিতির অন্তর্গত যাবতীয় অঙ্কন কার্য সম্পন্ন করিতে পারা যায়। সেইজন্য সরলরেখার জন্য **মাপনী** (Ruler) এবং বৃত্তের জন্য **কম্পাস** (Compass) এই দুইটি যন্ত্রই কেবলমাত্র জ্যামিতির সম্পাদ্য সম্পাদনে ব্যবহার করিতে হয়।

5·2 **কাল্পনিক অঙ্কন** (Hypothetical Construction) : সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞায় উপরোক্ত তিনটি স্বীকার্য ব্যতীত অন্য কোন অঙ্কন কার্য প্রমাণ ব্যতীত গৃহীত হয় না। কিন্তু উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার প্রমাণের জন্যও আরও কয়েকটি অঙ্কন কার্যের সম্ভাবনা প্রমাণ ব্যতীত স্বীকৃত হইয়া থাকে, ইহাদের কাল্পনিক অঙ্কন বলে। যথা :

1. কোন সরলরেখার উপরিস্থ বা বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি মাত্র লম্ব অঙ্কিত করা যায়।

2 কোন সসীম সরলরেখাকে একটি বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা যায়।

3. কোন নির্দিষ্ট কোণকে একটি সরলরেখার দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা যায়।

4. কোন নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কিত করা যায়।

5. একটি সরলরেখার যে-কোন বিন্দুতে একটি প্রদত্ত কোণের সমান করিয়া আর একটি কোণ অঙ্কিত করা যায়।

5·3. **সম্পাদ্য** (Problems): উপপাদ্য প্রতিজ্ঞার ন্যায় সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞার নির্বচনও দুইটি অংশে বিভক্ত:

1. **উপাত্ত** (Data): যাহা দেওয়া থাকে তাহা প্রথম অংশে বলা হয়।

2. **করণীয়** (Quaesita): যে অঙ্কন কার্য সম্পন্ন করিতে হইবে, তাহা দ্বিতীয় অংশে বলা হয়।

সম্পাদ্য সমাধান করিবার সময় **অঙ্কন চিত্রগুলি** (Traces of Construction) ও **প্রমাণ** (Proof) দিতে হইবে।

5·4. **সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ প্রণালী** (Synthesis and Analysis): প্রশ্নে যে সকল উপাত্ত (data) প্রদত্ত থাকে, তাহা হইতে বিচার ও যুক্তির সাহায্যে নির্ণেয় বিষয়ে প্রতিষ্ঠিত বা উপনীত হওয়ার নামকে **সংশ্লেষণ প্রণালী** বলে। ইহাতে প্রথমে কল্পনা হইতে উপাত্তগুলি সংগ্রহ করিয়া পূর্বে প্রমাণিত জ্যামিতির সত্যের সাহায্যে ক্রমে ক্রমে সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে হয়।

আর নির্ণেয় বিষয়কে প্রথমেই সত্য বলিয়া ধরিয়া লইয়া বিচার ও যুক্তির সাহায্যে প্রদত্ত বিষয়ে উপনীত হওয়ার নামকে **বিশ্লেষণ প্রণালী** বলে।

সাধারণতঃ সংশ্লেষণ প্রণালীই অবলম্বিত হয়। কিন্তু কঠিন সম্পাদ্য সমাধানে বিশ্লেষণ প্রণালী দ্বারা প্রথমে স্থির করিয়া তারপর সংশ্লেষণ প্রণালী দ্বারা প্রদত্ত উপাত্তগুলি হইতে এই স্থিরীকৃত সত্যগুলির সাহায্যে অঙ্কনকার্য সমাধান করা হয়।

সম্পাদ্য 1

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

B
P
O
A
Q
C

মনে করা যাউক BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ। ইহাকে একটি সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : কৌণিক বিন্দু A কে কেন্দ্র করিয়া ও যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল ; উহা AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। P ও Q বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PQ বা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিলে উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিল। AO যুক্ত করিলে উহা BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ : PO এবং QO যুক্ত করা হইল।

APO ও AQO ত্রিভুজদ্বয়ে

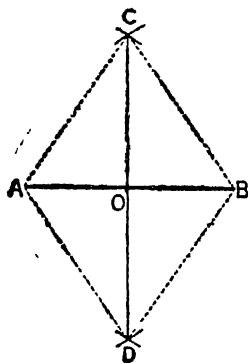
AP = AQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ], PO = QO [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং AO সাধারণ বাহু, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\angle PAO = \angle QAO$. অর্থাৎ AO, BAC কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

দ্রষ্টব্য : P ও Q বিন্দুকে কেন্দ্র ও PQ ব্যাসার্ধ লইয়া অথবা PQর অর্ধেকের অধিক ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ আঁকা যায়। অর্ধেকের অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধ হইলে বৃত্তচাপ দুইটি ছেদ করিবে না।

সম্পাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

মনে করা যাউক AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও AB কিংবা ABর অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হইল।

সেইরূপ B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও পূর্বের ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার উভয়পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত হইল। ইহারা পূর্বচাপ দুইটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। C ও D যোগ করিলে উহা AB সরলরেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে, AB সরলরেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ : AC, BC, AD এবং BD যুক্ত করা হইল।

এক্ষণে, ACD ও BCD ত্রিভুজদ্বয়ে, AC = BC [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

AD = BD [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং CD সাধারণ বাহু।

ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\angle ACD = \angle BCD$ বা $\angle ACO = \angle BCO$

পুনরায়, ACO ও BCO ত্রিভুজদ্বয়ে, AC = BC,

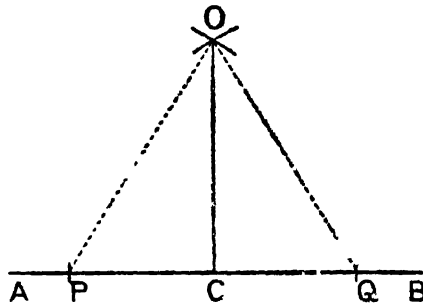
CO সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূত $\angle ACO$ = অন্তর্ভূত $\angle BCO$ [প্রমাণিত]

ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম। AO = BO

অতএব AB সরলরেখা O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য : ACO ও BCO ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম. $\angle AOC = \angle BOC$; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ। অতএব CO, ABর উপর লম্ব। অর্থাৎ CD সরলরেখা AB সরলরেখার **লম্ব সমদ্বিখণ্ডক** (Perpendicular bisector)।

সম্পাদ্য 3

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে সরলরেখাটির উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে করা যাউক C বিন্দু AB সরলরেখার উপর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু। C বিন্দুতে AB সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত হইল যাহারা AB সরলরেখাকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

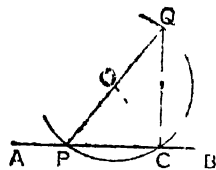
P ও Qকে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রত্যেক ক্ষেত্রে PC অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার একই পার্শ্বে এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত হইল যাহারা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। CO যুক্ত করিলে CO সরলরেখা ABর উপর C বিন্দুতে লম্ব হইল।

প্রমাণ : OP ও OQ যুক্ত করা হইল।

OPC ও OQC ত্রিভুজদ্বয়ে,

CP = CQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ], OP = OQ [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং OC সাধারণ বাহু। ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

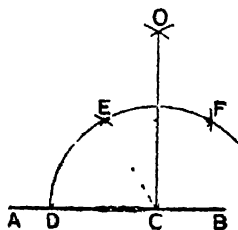
∠OCP = OCQ, কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ অতএব OC, ABর উপর C বিন্দুতে লম্ব।

দ্বিতীয় প্রণালী : অঙ্কন : AB সরলরেখার বহিঃস্থ যে কোন একটি বিন্দু O লওয়া হইল। O কে কেন্দ্র করিয়া OC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা ABকে P বিন্দুতে ছেদ করিল। PO যোগ করিয়া বর্ধিত করিলে উহা বৃত্তটিতে Q বিন্দুতে মিলিত হইল। QC যোগ করিলে QC সরলরেখা AB সরলরেখার উপর C বিন্দুতে লম্ব হইল।

প্রমাণ : OC যুক্ত করা হইল।

যেহেতু OC = OP [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] ∠OPC = ∠OCP,

পুনরায়, OC = OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] ∴ ∠OQC = ∠OCQ

PCQ = ∠OCP + ∠OCQ = ∠OPC + ∠OQC = ∠QPC + ∠PQC = 2 সমকোণের অর্ধ এক সমকোণ। QC, AB এর উপর C বিন্দুতে লম্ব।

তৃতীয় প্রণালী : অঙ্কন : Cকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত DEF চাপটি AB সরলরেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। Dকে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ পূর্বের DEF চাপকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন E কে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের ন্যায় একই ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত করা হইল যাহা পূর্বের DEF চাপকে F বিন্দুতে ছেদ করিল। অতঃপর E এবং F কে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের ন্যায় একই ব্যাসার্ধ লইয়া

AB সরলরেখার একই পার্শ্বে দুইটি চাপ অঙ্কিত করিলে উহারা O বিন্দুতে ছেদ

করিল। OC যোগ করিলে OC সরলরেখা AB সরলরেখার উপর C বিন্দুতে লম্ব হইল।

প্রমাণ : CE, CF, EF ও DE যুক্ত করা হইল।

অঙ্কন অনুসারে DCE ও ECF দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ।

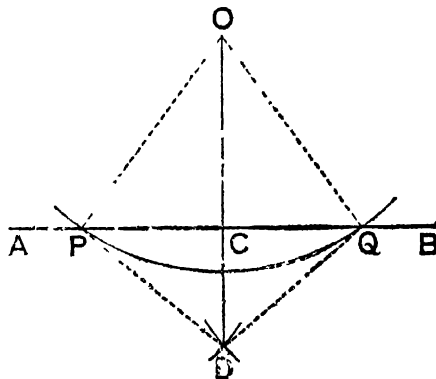
∴ উহাদের প্রত্যেকটি কোণ 60 .

পুনরায় CO ∠ECFর সমদ্বিখণ্ডক, ∴ $\angle OCE = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$.

অতএব, $\angle OCD = \angle DCE + \angle OCE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$;

অর্থাৎ OC সরলরেখা AB সরলরেখার উপর O বিন্দুতে লম্ব।

সম্পাদ্য 4

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরল রেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত কবিতে হইবে

মনে করা যাউক AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O উহার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু। O হইতে AB সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : O কে কেন্দ্র করিয়া এরূপ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করা হইল যেন ঐ চাপ AB সরলরেখাকে P ও Q দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

এক্ষণে P ও Q কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতিক্ষেত্রে PQর অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লইয়া, AB সরলরেখার যে দিকে O আছে তাহার বিপরীত দিকে, এমন দুইটি চাপ অঙ্কিত করা হইল যেন উহারা পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।

O এবং D যুক্ত করিলে OD সরলরেখা AB সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে OC সরলরেখা প্রদত্ত O বিন্দু হইতে AB সরলরেখার উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ : OP, OQ, PD এবং QD যোগ করা হইল।

এখন OPD ও OQD ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

OP = OQ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ], PD = QD [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং OD সাধারণ। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ $\angle POD = \angle QOD$. অর্থাৎ $\angle POC = \angle QOC$.

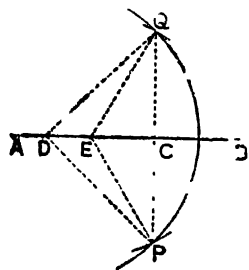
পুনরায় OPC ও OQC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

OP = OQ, OC সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূক্ত $\angle POC$ = অন্তর্ভূক্ত $\angle QOC$

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $\angle OCP = \angle OCQ$।

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ।

অতএব OC, AB সরলরেখার উপর লম্ব।

দ্বিতীয় প্রণালী : অঙ্কন : AB সরলরেখার উপর D ও E দুইটি বিন্দু লওয়া হইল। Dকে কেন্দ্র করিয়া DQ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত করা হইল। পুনরায় Eকে কেন্দ্র করিয়া EQ ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত করা হইল যাহা পূর্বের চাপকে Q ও P বিন্দুতে ছেদ করিল। QP যুক্ত করিলে উহা ABকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে QC, Q বিন্দু হইতে ABর উপর লম্ব হইল।

প্রমাণ : DQE ও DPE ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে,

DQ = DP [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ], EQ = EP [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ],

এবং DE সাধারণ বাহু ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

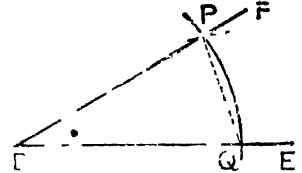
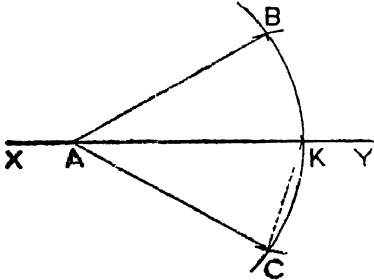
∴ $\angle QDE = \angle PDE$, অর্থাৎ $\angle QDC = \angle PDC$.

পুনরায় DQC ও DPC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে DQ = DP, CD সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূক্ত $\angle QDC$ = অন্তর্ভূক্ত $\angle PDC$.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $\angle DCQ = \angle DCP$.

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে এক সমকোণ। অতএব QC Q বিন্দু হইতে AB সরলরেখার উপর লম্ব।

সম্পাদ্য 5

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান একটি কোণ অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে করা যাউক EDF একটি নির্দিষ্ট কোণ এবং XY একটি সরলরেখার উপর A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। XY সরলরেখার A বিন্দুতে EDF কোণের সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : Dকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল যাহা DF ও DEকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।

Aকে কেন্দ্র করিয়া DQ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল যাহা XYকে K বিন্দুতে ছেদ করিল।

K বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া PQ ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল যাহা পূর্বচাপকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যুক্ত করা হইলে, AB সরলরেখার উভয় পার্শ্বে BAK ও CAK দুইটি কোণ EDF কোণের সমান হইল।

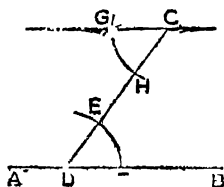
প্রমাণ : BK ও PQ যুক্ত করা হইল। এক্ষণে ABK ও DPQ ত্রিভুজদ্বয়ে,

AB = DP, AK = DQ এবং BK = PQ [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব ∠BAK = ∠PDQ = ∠EDF

অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, ∠CAK = ∠PDQ = ∠EDF.

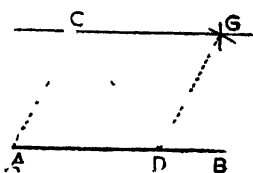
সম্পাদ্য 6

কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে কর যাউক C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। ABর সমান্তরাল করিয়া C বিন্দুগামী একটি সরলরেখা অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB সরলরেখার পর D যে-কোন একটি বিন্দু লইয়া CD যুক্ত করা হইল। এখন CD সরলরেখার C বিন্দুতে CDB কোণের সমান এবং উহার একান্তর DCG কোণ অঙ্কন করা হইল। তাহা হইলে CG সরলরেখা C বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সমান্তরাল সরলরেখা হইল।

প্রমাণ : CD সরলরেখা AB ও CG সরলরেখার সহিত মিলিত হইয়া CDB ও DCG দুইটি সমান একান্তর কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

CG ও AB পরস্পর সমান্তরাল।

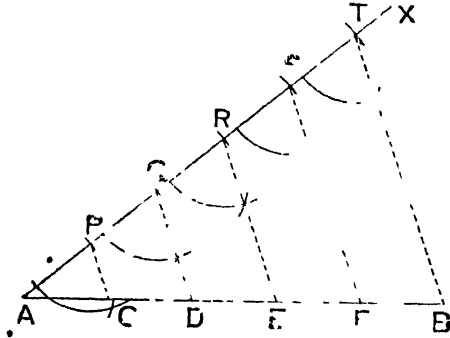
দ্বিতীয় প্রণালী : অঙ্কন : AB সরলরেখার উপর D যে কোন একটি বিন্দু লওয়া হইল। C কে কেন্দ্র করিয়া AD ব্যাসার্ধ লইয়া ABর যে পার্শ্বে C আছে সেই পার্শ্বে একটি চাপ অঙ্কন করা হইল। এক্ষণে D কে কেন্দ্র করিয়া AC ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপ পূর্বের অঙ্কিত চাপকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। CG যোগ করিলে উহা C বিন্দুগামী এবং AB সরলরেখার সমান্তরাল হইল।

প্রমাণ : AC, DC ও DG যুক্ত করা হইল। ACGD চতুর্ভুজে,

CG = AD এবং AC = DG [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়]

∴ ACGD একটি সামান্তরিক, অতএব CG ও AD অর্থাৎ AB সমান্তরাল।

দ্রষ্টব্য : অনুরূপ কোণগুলি সমান সমান করিয়া অঙ্কন করিলেও সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কন করা যায়।

সম্পাদ্য 7

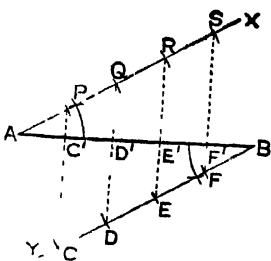
একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে নির্দিষ্ট সংখ্যক সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

মনে করা যাউক, AB সরলরেখাকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন: AB সরলরেখার A বিন্দুতে যে কোনও কোণ BAX অঙ্কিত করিয়া AX বাহু হইতে পাঁচটি সমান অংশ AP=PQ=QR=RS=ST পর পর কাটিয়া লওয়া হইল। BT যুক্ত করিয়া এবং ∠ATB সমান করিয়া P, Q, R, S বিন্দুতে APC, AQD, ARE এবং ASF কোণগুলি অঙ্কিত করা হইল। এই কোণগুলির PC, QD, RE, SF বাহুগুলি AB সরলরেখাকে C, D, E, F বিন্দুতে ছেদ করিয়া AC, CD, DE, EF ও FB এই পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত করিল।

প্রমাণ: যেহেতু অনুরূপকোণগুলি $\angle APC = \angle AQD = \angle ARE$
$= \angle ASF = \angle ATB$;

PC, QD, RE, SF, TB পরস্পর সমান্তরাল।

সুতরাং AB ছেদকের AC = CD = DE = EF = FB অতএব AB সরলরেখা সমান পাঁচটি অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

দ্বিতীয় প্রণালী: AB সরলরেখার একপার্শ্বে যে কোনও কোণ BAX টানিয়া উহার AX বাহুর সমান্তরাল BY বাহু অঙ্কিত হইল। AX সরলরেখা হইতে যে কোন দৈর্ঘ্যের সমান চারটি অংশ AP, PQ, QR ও RS এবং BY সরলরেখা হইতে AX এর অংশগুলির সমান করিয়া BF, FE, ED এবং DC অঙ্কিত করা হইল। এক্ষণে PC, QD, RE, SF যুক্ত করিলে

সরলরেখাগুলি AB সরলরেখাকে C′, D, E, F বিন্দুতে ছেদ করিল। তাহা হইলে AB সরলরেখা C′, D, E′ ও F′ বিন্দুতে সমান পাঁচটি অংশে বিভক্ত হইল।

প্রমাণ। PQ ও CD সমান ও সমান্তরাল। PC ‖ QD ;

অনুরূপে QD ‖ RE ‖ SF

যেহেতু AP = PQ = QR = RS, AC = CD = DE′ = E′F′.

পুনরায়, FF ‖ EE ‖ D′D ‖ CC এবং BF = FE = ED = DC

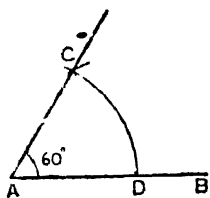
∴ BF = FE′ = ED = DC′

অতএব AC = CD = DE = EF = FB

অনুশীলনী 5 1

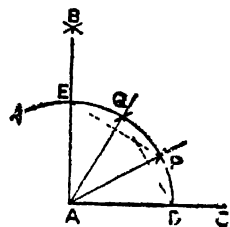
[1 হইতে 5 পর্যন্ত ক্লাসে কর ; বাকী বাড়ীর কাজ।]

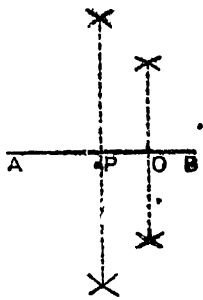
1 একটি মাপনী ও কম্পাসের সাহায্যে 60° কোণ আঁক

অঙ্কন : AB সরলরেখার A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও যে কোনও ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত করা হইল, উহা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। D কে কেন্দ্র করিয়া পূর্বের ADর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি চাপ অঙ্কিত করা হইল, উহা পূর্ব-চাপকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC যোগ করিলে BAC কোণটি 60° হইবে।

প্রমাণ। DC যুক্ত করা হইল। ADC ত্রিভুজে AD = AC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)। পুনরায় AD = DC (সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ) ∴ AD = AC = DC অর্থাৎ ত্রিভুজটি সমবাহু। ∴ প্রত্যেক কোণ সমান এবং প্রত্যেকটি 180° এর তৃতীয়াংশ অর্থাৎ 60°

2 একটি সমকোণকে সমত্রিখণ্ডিত কর।

মনে করা যাউক BAC একটি সমকোণ। ইহাকে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত করিতে হইবে

অঙ্কন। A কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত হইল। ইহা AB ও AC কে যথাক্রমে E ও D বিন্দুতে ছেদ করিল। E ও D কে কেন্দ্র করিয়া ও পূর্বের ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত হইল, যাহারা পূর্বের বৃত্তচাপকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল AP ও AQ যোগ করিলে ইহারা BAC সমকোণকে সমত্রিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ। EP ও DQ যোগ করা হইল। অঙ্কনানুসারে $\triangle EAP$ ও $\triangle DAQ$ সমবাহু ত্রিভুজ। $\therefore$ উহাদের প্রত্যেক কোণ 60° অর্থাৎ $\angle EAP = \angle DAQ = \angle 60^\circ$. অতএব অবশিষ্ট $\angle PAD$ ও $\angle EAQ$র প্রত্যেকে $\angle 90^\circ - \angle 60^\circ = \angle 30^\circ$ এবং $\angle PAQ = 90^\circ - \angle PAD - \angle EAQ = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ$ $\therefore$ AP ও AQ $\angle BAC$ সমকোণকে সমান তিনটি কোণে বিভক্ত করিয়াছে।

3. একটি সরলরেখাকে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন এক অংশ অপর অংশের তিন গুন হয়।

মনে করা যাউক AB একটি সরলরেখা, উহাকে এমন-ভাবে বিভক্ত করিতে হইবে যে উহার এক অংশ অপর অংশের তিনগুণ হয়।

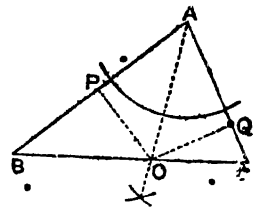
অঙ্কন। AB সরলরেখাকে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। তাহা হইলে, $BP = \frac{1}{2} AB$ হইল। পুনরায় PB অংশকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। তাহা হইলে $OB = \frac{1}{2} BP = \frac{1}{4} AB$ এবং $OA = AP + PO = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4})AB = \frac{3}{4}AB.$

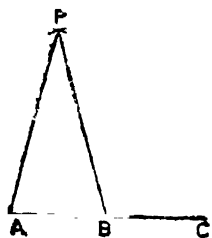
অতএব OA, OBর তিনগুণ।

4. ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার ভূমি BCর উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী হয়।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের ভূমি BC ; BCর উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যাহা AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী।

অঙ্কন। BAC কোণকে AO সরলরেখা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। AO, BC ভূমির সহিত O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। Oই নির্ণেয় বিন্দু।

প্রমাণ। O হইতে AB ও ACর উপর OP ও OQ লম্ব অঙ্কিত করা হইল। APO ও AQO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে, অতিভুজ AO সাধারণ, $\angle PAO = \angle QAO$ $\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব $OP = OQ$ অর্থাৎ O বিন্দু AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী।

5. AB সরলরেখার উপর এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর যাহার প্রত্যেক সমান বাহুদ্বয় ABর দ্বিগুণ। [C. U. 1887]

মনে করা যাউক AB একটি সরলরেখা। AB ভূমির উপর একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটি 2AB হয়।

অঙ্কন। ABকে C পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া ABর সমান BC অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। তাহা হইলে AC = 2AB. A ও Bকে কেন্দ্র করিয়া AC ব্যাসার্ধ লইয়া ABর একই পার্শ্বে দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল, উহারা P বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিল। AP ও BP যোগ করিলে APB ত্রিভুজটি উৎপন্ন হইবে।

প্রমাণ। অঙ্কন অনুসারে AP = AC = 2AB এবং BP = AC = 2AB.

∴ APB একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ; উহার AP = BP = 2AB.

6. পাঁচ সেন্টিমিটার দীর্ঘ একটি সরলরেখাকে চারিটি সমান অংশে বিভক্ত কর।

7. 6.7 সেন্টিমিটার দীর্ঘ একটি সরলরেখাকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত কর।

8. XY একটি সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু O নির্ণয় কর যেন A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে O বিন্দুটি সমদূরবর্তী হয়।

9. একটি ত্রিভুজের কোণ তিনটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। দেখ উহারা একই বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে কিনা।

10. একটি ত্রিভুজের বাহু তিনটির সমদ্বিখণ্ডক আঁক। দেখ উহারা একই বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে কিনা। ঐ ছেদবিন্দু ও কোণগুলির দূরত্ব মাপিয়া দেখ।

11. একটি সমকোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া 45° কোণ আঁক। এই 45° কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক আঁকিয়া দেখ উহারা পরস্পর লম্ব।

12. একটি ত্রিভুজের মধ্যমাগুলি অঙ্কিত কর। উহারা একই বিন্দুতে মিলিত হয় কিনা দেখ।

• 13. 135° কোণ আঁকিয়া এমন দুই ভাগে ভাগ কর যেন একভাগ অপর ভাগের তিনগুণ হয়।

14. AB সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু P নির্ণয় কর যাহা XY ও CD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী।

15. P বিন্দুগামী এমন একটি সরলরেখা আঁক যেন A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এই সরলরেখার উপর লম্বদ্বয় সমান হয়।

16. তিনটি সরলরেখা একই বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। এমন একটি সরলরেখা অঙ্কিত কর যেন তিনটি সরলরেখা দ্বারা কর্তিত অংশ দুইটি পরস্পর সমান হয়।

17. ABCD চতুর্ভুজে এমন একটি E বিন্দু নির্ণয় কর যেন EA = ED এবং EB = EC হয়।

18. ABC ত্রিভুজের BC বাহুতে এমন একটি D বিন্দু লও যেন AD = $\frac{1}{2}$(AB + AC) হয়।

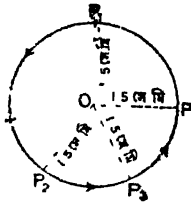
19. ABC ত্রিভুজের AB বাহু অথবা বর্ধিত AB বাহুর উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যেন ঐ বিন্দু B ও C হইতে সমদূরবর্তী হয়।

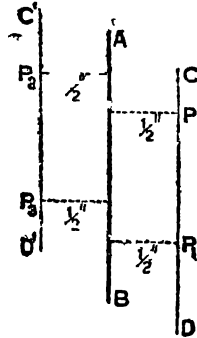
20. ABC সমকোণী ত্রিভুজ। ABর উপর একটি বিন্দু D নির্ণয় কর যেন D বিন্দু হইতে ACর উপর লম্ব BDর সমান হয়। [C U 1894, B U, 1883]

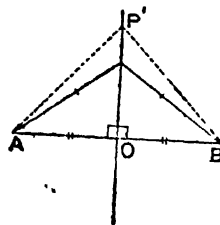
6

সঞ্চারপথ

LOCI

6·1. **সঞ্চারপথ :** কোন নির্দিষ্ট জ্যামিতিক নিয়মাধীনে থাকিয়া কোন বিন্দু যে পথে চলে বা সঞ্চরণ করে সেই পথকেই বিন্দুটির সঞ্চারপথ বা Locus বলে। Locus এর বহুবচন Loci.

মনে করা যাউক P একটি চলমান বিন্দু। O অপর একটি স্থির বিন্দু হইতে P সর্বদা 1·5 সে মি. দূরে থাকিয়া চলিতেছে। তাহা হইলে তীর-চিহ্নিত বক্ররেখাটি P বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে। ইহা একটি বৃত্তের পরিধি, নির্দিষ্ট বিন্দু O বৃত্তের কেন্দ্র ও 1·5 সে মি. বৃত্তের ব্যাসার্ধ। এখানে জ্যামিতিক সর্ত বা নিয়ম হইতেছে যে, O বিন্দু হইতে P বিন্দুটির দূরত্ব সর্বদাই 1·5 সে. মি হইবে।

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। P একটি চলমান বিন্দু AB হইতে সর্বদা $\frac{1}{2}$ দূরে থাকিয়া যে পথে চলিতেছে তাহা CD ও C'D' দুইটি AB-র উভয়পার্শ্বে অবস্থিত। এই দুইটি রেখা P বিন্দুটির সঞ্চারপথ। P বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থানে (P_1, P_2, P ……) AB হইতে সর্বদা $\frac{1}{2}'$ দূরে অবস্থিত। এখানে জ্যামিতিক সর্ত, AB হইতে সর্বদা $\frac{1}{2}$ দূরে P বিন্দুটি থাকিবে।

উপপাদ্য 26

দুইটি স্থির বিন্দু হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী কোন গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত স্থিরবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

মনে করা যাউক A এবং B দুইটি স্থিরবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে A ও B

হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী কোন গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ AB সরলরেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : AB যুক্ত করিয়া তাহার মধ্যবিন্দু O বাহির করা হইল ; P′ চলমান বিন্দুটির যে কোন একটি অবস্থানের সহিত O বিন্দুটি যুক্ত করা হইল। AP′ ও BP′ যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : যেহেতু O, AB-র মধ্যবিন্দু, ∴ AO = BO ;

অতএব O চলমান বিন্দুটির একটি অবস্থান।

এক্ষণে AOP′ ও BOP′ ত্রিভুজদ্বয়ে,

যেহেতু OA = OB (অঙ্কন), AP′ = BP′ (কল্পনা) এবং OP′ সাধারণ বাহু,

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠P′OA = ∠P′OB.

কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ।

অতএব OP′, ABর লম্ব-দ্বিখণ্ডক। অর্থাৎ A ও B হইতে সমদূরবর্তী যে কোন বিন্দু P′, AB সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

দ্বিতীয়তঃ, আবার মনে করা যাউক P AB-র লম্বদ্বিখণ্ডক O′P-র বা বর্ধিত OP′-র উপর যে কোন বিন্দু

প্রমাণ করিতে হইবে AP′ = BP′.

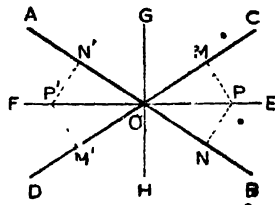
অঙ্কন : AB যুক্ত করিয়া উহার মধ্যবিন্দু O বাহির করা হইল। P O, AP′ ও BP′ যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : AOP ও BOP ত্রিভুজদ্বয়ে,

AO = BO (অঙ্কনানুসারে), OP′ সাধারণ, এবং অন্তর্ভূত ∠AOP = ∠BOP [সমকোণ বলিয়া] ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব AP = BP″.

∴ ABর লম্ব-দ্বিখণ্ডক P′ বিন্দুর সঞ্চারপথ।

উপপাদ্য 27

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী কোন চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত সরলরেখা দুইটির অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয় হইবে।

মনে করা যাউক, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে (1) AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী কোন P বিন্দুর সঞ্চারপথ AB ও CD এর অন্তর্ভূত, BOC এবং AOC কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের যে কোনও একটি হইবে ; এবং (2) ঐ সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু P, AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

অঙ্কন : মনে করা যাউক AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী P একটি বিন্দু অর্থাৎ P বিন্দু হইতে AB ও CD-র উপর PN ও PM লম্বদ্বয় পরস্পর সমান।

PO যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : POM ও PON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

PM = PN (কল্পনা), অতিভুজ OP সাধারণ। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ ∠POM = ∠PON অর্থাৎ OP, BOC কোণের সমদ্বিখণ্ডক ; এবং P, BOC কোণের মধ্যে অবস্থিত হইলে উহা BOC কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

এইরূপে প্রমাণ করা যায় AOC কোণের মধ্যে P অবস্থিত থাকিলে উহা AOC কোণের সমদ্বিখণ্ডক GO-র উপর অবস্থিত হইবে। সুতরাং P বিন্দু AB ও CD হইতে সর্বদা সমদূরে থাকিয়া চলিতে থাকিলে উহার সঞ্চারপথ AB ও CD-র অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় হইবে।

(2) মনে করা যাউক, P′, AOD কোণের সমদ্বিখণ্ডক OF এর উপর যে কোনও একটি বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে P′M = PN।

অঙ্কন : P′ হইতে AB ও CD-র উপর যথাক্রমে PN ও P′M দুইটি লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণ : P′OM ও PON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

OP সাধারণ বাহু, ∠POM = ∠P′ON [কল্পনা] ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ PM′ = PN অর্থাৎ OF সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত যে কোনও বিন্দু P, AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী। এইরূপে OH বা OGর উপর যে কোনও বিন্দু Q লইয়াও প্রমাণ করা যায় যে Q, AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

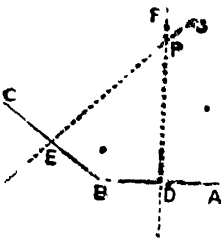
সুতরাং প্রমাণিত হইল যে দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ AB ও CD এর অন্তর্ভূত কোণের সঞ্চারপথ।

6·2. **সঞ্চারপথের ছেদবিন্দু** (Point of intersection of Loci) : যখন কোন চলমান বিন্দু যুগপৎ একাধিক জ্যামিতিক সর্তাধীন থাকিয়া ভিন্ন ভিন্ন সঞ্চারপথের সৃষ্টি করে, তাহাদের ছেদবিন্দুদ্বারা বিন্দুটির প্রকৃত অবস্থা নির্ণয় করা যায়

অনুশীলনী 6·1.

[1 হইতে 5 পর্যন্ত ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ তিনটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর। [C. U. 1912]

মনে করা যাউক A, B ও C তিনটি বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে। অর্থাৎ AB ও BC এক সরলরেখা নহে।

A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

(1) A ও B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ AB সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক DF এবং

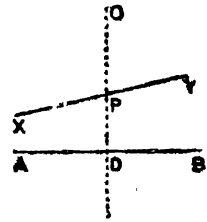
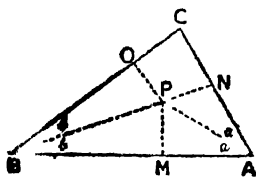
(2) B ও C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ BC সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক EG.

সুতরাং নির্ণেয় বিন্দুটি FD ও EG উভয় সরলরেখার উপর অবস্থিত। কিন্তু AB ও BC একই সরলরেখা নহে বলিয়া উহাদের লম্বদ্বিখণ্ডক DF ও EG সমান্তরাল নহে। অতএব উহাদের বর্ধিত করিলে যে কোন একটি বিন্দু P তে ছেদ করিবে।

এক্ষণে এই দুইটি সঞ্চারপথের ছেদবিন্দু P উভয় সর্ত যুগপৎ নিরপেক্ষভাবে পালন করিতেছে বলিয়া P বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

2. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর।

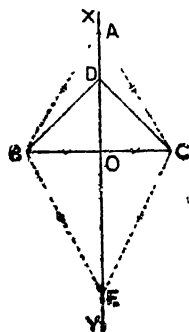
মনে করা যাউক A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। XYর উপর অবস্থিত এবং A ও B হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ABর লম্বসমদ্বিখণ্ডক OD। আবার নির্ণেয় বিন্দুটি XYর উপরও থাকিবে। সুতরাং উক্ত লম্বদ্বিখণ্ডক OD, XYকে যে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, সেই বিন্দুই উভয় সর্ত যুগপৎ নিরপেক্ষভাবে পালন করিয়াছে। ∴ নির্ণেয় বিন্দুর অবস্থান P.

3. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 1957]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB, BC ও CA বাহু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

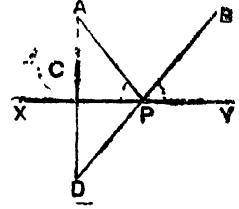
AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক AP। পুনরায় AB ও BC হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চার-পথ ∠ABCর সমদ্বিখণ্ডক BP। এই দুই সমদ্বিখণ্ডক AP ও BP পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ∴ P বিন্দু উভয় স৹ যুগপৎ নিরপেক্ষ ভাবে পালন করিয়াছে অর্থাৎ লম্বত্রয় PM = PN = PO। অতএব নির্ণেয় বিন্দুর অবস্থান P.

4. একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর যে সকল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায় তাহাদের শীর্ষগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 1952]

মনে করা যাউক BC নির্দিষ্ট ভূমি। BCর উপর দণ্ডায়মান BCর উভয় পার্শ্বে যে সকল সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যায় তাহাদের শীর্ষগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে করা যাউক ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ BCর উপর দণ্ডায়মান। AB = AC। যেহেতু A বিন্দু B ও C হইতে সমদূরবর্তী, সুতরাং BC সরলরেখার XY লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখাই A বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে। এই XY রেখার উপর অন্য কোন বিন্দু E বা D লইয়া প্রমাণ করা যায় যে BE = CE এবং BD = CD. ∴ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজগুলির একই ভূমি থাকিলে উহাদের শিরঃবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ, BC সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডক XY হইবে।

5. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যে, ঐ বিন্দু এবং উক্ত সরলরেখার একই পার্শ্বস্থ অপর দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাদ্বয় ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

মনে করা যাউক XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং A ও B উহার একই পার্শ্বে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। XY সরলরেখার উপর এমন একটি P বিন্দু নির্ণয় করিতে হইবে যেন ∠APX ও ∠BPY পরস্পর সমান হয়।

অঙ্কন : A হইতে XYর উপর AC লম্ব অঙ্কিত হইল এবং ACকে D পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে CD = AC কাটিয়া লওয়া হইল। BD যুক্ত করিলে উহা XY কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P-ই নির্দিষ্ট বিন্দু।

প্রমাণ : AP যুক্ত করা হইল। অঙ্কনানুসারে XY AD-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক বলিয়া XY, A ও D হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ। অতএব AP = PD এখন ACP ও CDP ত্রিভুজদ্বয়ে, AC = CD [অঙ্কন], AP = PD এবং PC সাধারণ বাহু। অতএব ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠APC = ∠CPD = বিপ্রতীপ ∠BPY

6. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ, ঐ সরলরেখার উভয়পার্শ্বে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা হইবে।

7. PQ সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা AB ও CD সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী।

8. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। C. U. 1883]

*9 একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে অতিভুজ করিয়া যে-সকল সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যায়, উহাদের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*10. দুইটি পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত নির্দিষ্ট সরলরেখার সহিত অপর একটি সরলরেখার প্রান্তদ্বয় সর্বদা সংলগ্ন থাকিলে, উহার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*11. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি অথবা অন্তর ধ্রুবক। তাহার সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

*12. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যে সকল বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তাহাদের কেন্দ্রগুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

13. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর থাকিবে।

14, একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

15. একটি ত্রিভুজের ভূমি নির্দিষ্ট এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট। ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

7

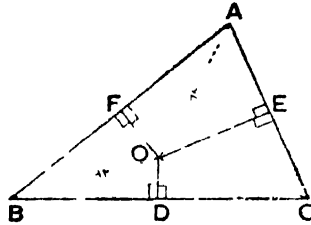
সমবিন্দু সরলরেখা

Concurrence of Straight Lines

7·1 তিন বা তাহার অধিক সরলরেখা একটিমাত্র বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হইলে, উহাদিগকে **সমবিন্দু সরলরেখা** (Concurrent Straight Lines) বলে। যে বিন্দুতে সরলরেখাগুলি মিলিত হয় তাহাকে ঐ সরলরেখাগুলির **সম্পাতবিন্দু** (Point of concurrence) বলে।

7·2 তিন বা তাহার অধিক বিন্দু একই সরলরেখার উপর থাকিলে বিন্দুগুলিকে **সমরেখ বা একরেখীয়** (Collinear) বিন্দু বলে।

উপপাদ্য 28

ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

মনে করা যাউক, ABC ত্রিভুজের D, E ও F যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু। AB ও AC বাহুর F ও E বিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব FO ও EO পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। OD যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে OD সরলরেখা BC-র উপর লম্ব।

অঙ্কন : OA, OB, OC, যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : FO, AB সরলরেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, সুতরাং FO সরলরেখা A ও B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ ∴ OB = OA

পুনরায় EO, AC সরলরেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক। অতএব EO সরলরেখা A ও C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ। ∴ OA = OC

অতএব OB = OA = OC অর্থাৎ OB = OC

এক্ষণে OBD ও OCD ত্রিভুজদ্বয়ে

OB = OC, BD = CD (কল্পনা) এবং OD সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

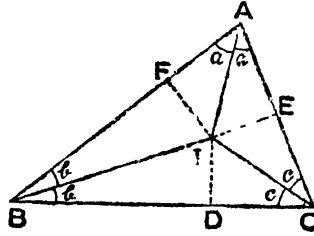
অতএব ∠ODB = ∠ODC ; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকে সমকোণ।

অতএব OD, BC-র উপর লম্ব।

অর্থাৎ ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

সংজ্ঞা : ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক তিনটির সম্পাতবিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) বলে। পূর্ববর্তী চিত্রে O বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। যেহেতু OA = OB = OC, সুতরাং পরিকেন্দ্র O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OA-কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহা B ও C বিন্দু দিয়া যাইবে। এই বৃত্ত ত্রিভুজকে পরিবেষ্টিত করিয়া থাকে ; ইহাকে **পরিবৃত্ত** (Circum-circle এবং OA, OB ও OC-কে **পরিব্যাসার্ধ** (Circum-radius) **বলে**।

উপপাদ্য 29

ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

মনে করা যাউক, ABC ত্রিভুজের ABC ও ACB কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি I-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। AI যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ করিতে হইবে AI, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন : I বিন্দু হইতে BC, CA ও AB-র উপর যথাক্রমে ID, IE ও IF লম্ব অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণ : BI সরলরেখা ABC কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং BI সরলরেখা AB ও BC হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ। অতএব IF = ID.

এইরূপে CI সরলরেখা ACB কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং CI সরলরেখা BC ও CA হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ। অতএব ID = IE.

∴ IF = ID = IE, অর্থাৎ IF = IE.

এক্ষণে AEI ও AFI সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। কারণ IF = IE ও AI সাধারণ।

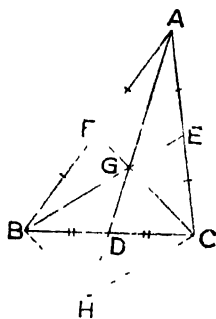
∴ ∠EAI = ∠FAI. অতএব AI, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

সুতরাং ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

সংজ্ঞা : ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক তিনটির সম্পাতবিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) বলে। পূর্ববর্তী চিত্রে I-বিন্দু ABC ত্রিভুজের

অন্তঃকেন্দ্র। I-কে কেন্দ্র করিয়া ID সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা BC, CA ও AB কে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। এই বৃত্তকে ABC ত্রিভুজের **অন্তঃবৃত্ত** (Inscribed circle বা In-circle) বলে। উহার ব্যাসার্ধকে **অন্তঃব্যাসার্ধ** (In-radius) বলে।

উপপাদ্য 30

ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু। ত্রিভুজের প্রত্যেক মধ্যমা ভরকেন্দ্রে ত্রিখণ্ডিত হয় এবং উহাদের কৌণিক বিন্দুর দিকের অংশ অপর অংশের দ্বিগুণ হয়।

মনে করা হউক, ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার BE ও CF মধ্যমা দুইটি পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AG যুক্ত করিয়া উহা বর্ধিত করা হইল।

মনে করা যাউক উহা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AD, ABC ত্রিভুজের তৃতীয় মধ্যমা। অর্থাৎ BC-র মধ্যবিন্দু D ; এবং AG = 2GD.

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে BE-র সমান্তরাল CH সরলরেখা বর্ধিত AD-র সহিত H বিন্দুতে মিলিত হইল। BH যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : ACH ত্রিভুজের E, AC-র মধ্যবিন্দু এবং অঙ্কনানুসারে EG, CH-র সমান্তরাল। সুতরাং G, AH-র মধ্যবিন্দু।

পুনরায়, ABH ত্রিভুজের F, AB-র মধ্যবিন্দু (কল্পনা) এবং G, AH-র মধ্যবিন্দু (প্রমাণিত)। সুতরাং FG, BH-র সমান্তরাল অর্থাৎ GC, BH-র সমান্তরাল।

অতএব BGCH চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুযুগল সমান্তরাল, সুতরাং ইহা একটি সামান্তরিক এবং BC ও GH উহার দুইটি কর্ণ।

যেহেতু সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

সুতরাং BD = DC, অর্থাৎ D, BCর মধ্যবিন্দু।

অতএব AD ত্রিভুজের তৃতীয় মধ্যমা। সুতরাং ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি সমবিন্দু।

যেহেতু G, AH-র মধ্যবিন্দু, AG = GH, $GD = DH = \frac{1}{2}GH = \frac{1}{2}AG$.

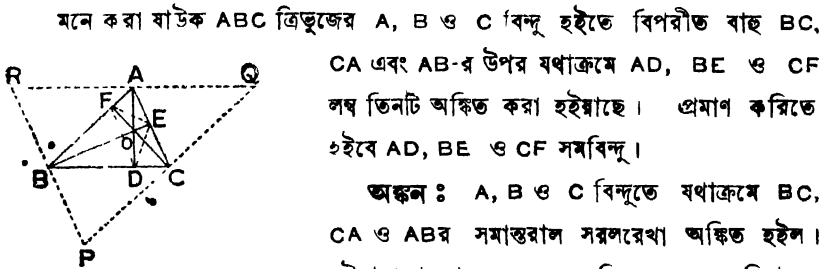
অতএব AG, GDর দ্বিগুণ। সুতরাং G বিন্দু AD মধ্যমাকে সম্পাতবিন্দু G-তে ত্রিখণ্ডিত করিয়াছে।

অতএব $GD = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{3}AD$. তদ্রূপ $GE = \frac{1}{3}$ BE এবং $GF = \frac{1}{3}$ CF.

সংজ্ঞা : ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটির সম্পাতবিন্দুকে ভরকেন্দ্র (Centroid) বলে। পূর্বের চিত্রে G ভরকেন্দ্র।

অনুশীলনী 7 1.

[1 হইতে 5 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্ব তিনটি সমবিন্দু।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের A, B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহু BC, CA এবং AB-র উপর যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্ব তিনটি অঙ্কিত করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AD, BE ও CF সমবিন্দু।

অঙ্কন : A, B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে BC, CA ও ABর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত হইল। উহারা পরস্পর P, Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, ACBR, ABCQ, ABPC প্রত্যেকটি সামান্তরিক।

AR = BC = AQ (সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া)। অতএব A, QR-র মধ্যবিন্দু। AD, BC-র উপর লম্ব এবং BC, QR সমান্তরাল। ∴ AD, QR-র A মধ্যবিন্দুতে লম্ব।

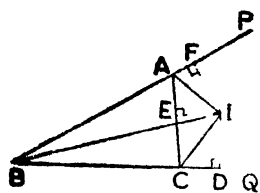
অনুরূপে BE, PR বাহুর B মধ্যবিন্দুতে লম্ব এবং CF, PQ বাহুর C মধ্যবিন্দুতে লম্ব। অর্থাৎ PQR ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুতে AD, BE ও CF লম্ব তিনটি বাহুগুলির উপর লম্ব। সুতরাং AD, BE ও CF সমবিন্দু।

সংজ্ঞা : কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব

তিনটির ছেদবিন্দুকে **লম্ব-বিন্দু** (Ortho-centre) বলে। ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু।

কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর পাতিত লম্ব তিনটির পাদবিন্দু পরস্পর যুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তাহাকে **পাদ-ত্রিভুজ** (Pedal triangle বা Orthocentric triangle) বলে। ABC ত্রিভুজের DEF ত্রিভুজ পাদ-ত্রিভুজ।

2. কোন ত্রিভুজের একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং অপর দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের BC ও BA বাহু যথাক্রমে Q ও P বিন্দু পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে। AI ও CI যথাক্রমে CAP ও ACQ কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় I-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। BI যুক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে BI, ABC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন: I হইতে বর্ধিত BC, AC ও বর্ধিত BAর উপর যথাক্রমে ID IE ও IF লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ: CI, ACQ কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং CI, AC ও CQ হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ। অতএব DI = EI, অনুরূপে AI, CAP কোণের সমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং AI, AC ও AP হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ। অতএব FI = EI DI = FI এক্ষণে BDI ও BFI সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে, DI = FI, অতিভুজ BI সাধারণ। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব $\angle DBI = \angle FBI$ অর্থাৎ BI, ABC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

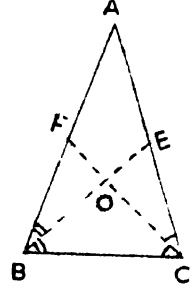
সংজ্ঞা: কোন ত্রিভুজের একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও অপর দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকের সম্পাতবিন্দুকে ঐ ত্রিভুজের **বহিঃকেন্দ্র** (Ex-centre) বলে। পূর্ববর্তী চিত্রের I, ABC ত্রিভুজের বহিঃকেন্দ্র। I-কে কেন্দ্র করিয়া ID সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা D, E ও F বিন্দু দিয়া যাইবে এবং AC, বর্ধিত BC ও BA-কে স্পর্শ করিবে। এই বৃত্তকে ABC ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (Escribed-circle বা Ex-circle) বলে।

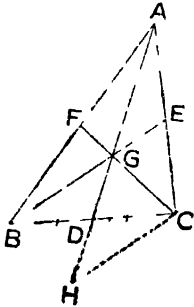
3. কোন ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা সমান হইলে ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে।

[C. U. 1943,'48 ; W. B. S. F. '54]

মনে করা যাউক ABC একটি ত্রিভুজ। উহার BE ও CF মধ্যমাদ্বয় পরস্পর

সমান এবং উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB = AC.

প্রমাণ : কল্পনা অনুসারে BE = CF ∴ $\frac{2}{3}$ BE = $\frac{2}{3}$ CF অর্থাৎ BO = CO ∴ BOC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; ইহার ∠OBC = ∠OCB অর্থাৎ ∠EBC = ∠FCB. এক্ষণে △ EBC ও △ FBCর মধ্যে BE = CF (কল্পনা), BC সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূত ∠EBC = অন্তর্ভূত ∠FCB ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব CE = BF এবং ইহাদের দ্বিগুণও সমান ; সুতরাং AB = AC

4. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি মধ্যমার দৈর্ঘ্যসমষ্টি তৃতীয় মধ্যমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে কোন দুইটি মধ্যমার যোগফল তৃতীয় মধ্যমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন ঃ ADকে H পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হইল যেন GD = DH হয়। CH যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ ঃ মধ্যমাগুলি G ভরকেন্দ্রে ত্রিখণ্ডিত হয় ∴ BG = $\frac{2}{3}$ BE AG = $\frac{2}{3}$ AD এবং CG = $\frac{2}{3}$ CF

△ BDG ও △ CDH-র মধ্যে BD = CD (কল্পনা), GD = DH (অঙ্কন), অন্তর্ভূত ∠BDG = অন্তর্ভূত ∠CDH (বিপ্রতীপ কোণ)। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ BG = CH, GH = 2GD = 2.$\frac{1}{3}$ AD = AG এক্ষণে CGH ত্রিভুজে (CG + CH) > GH বা (CG + BG) > AG অথবা $\frac{2}{3}$ CF + $\frac{2}{3}$BE > $\frac{2}{3}$AD অর্থাৎ (CF + BE) > AD. অনুরূপে প্রমাণ করা যায় অপর যে কোন মধ্যমাদ্বয়ের সমষ্টি তৃতীয় মধ্যমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

5. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার পরিসীমার তিন-চতুর্থাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর। [B. C. S. 1946]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা পরস্পর G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে (AD + BE + CF) > $\frac{3}{4}$ (AB + BC + CA)

প্রমাণ : ABG ত্রিভুজে $(AG+BG)>AB$, তদ্রূপ $(AG+CG)>AC$ এবং $(BG+CG)>BC$ এক্ষণে যোগ করিয়া পাওয়া যায় $2(AG+BG+CG)>(AB+BC+CA)$ বা $2(\frac{2}{3}AD+\frac{2}{3}BE+\frac{2}{3}CF)>(AB+BC+CA)$ বা $\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>(AB+BC+CA)$ অর্থাৎ $(AD+BE+CF)>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$.

6. ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা পরস্পর সমান হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

7 কোন ত্রিভুজের এক বাহু অপর এক বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে বৃহত্তর বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা, ক্ষুদ্রতর বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

8 সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণ দুইটির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক অথবা বহিঃসমদ্বিখণ্ডক দুইটি এবং ত্রিভুজটির ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা সমবিন্দু হইবে।

9 ABC ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বদ্বিখণ্ডক তিনটি O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle BOC$ $2\angle BAC$

10. ABC ত্রিভুজের G ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, $\triangle BGC=\frac{1}{3}\triangle ABC$.

11 ABC ত্রিভুজের G ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, $\triangle BGC=\triangle CGA=\triangle AGB$

12 ABC ত্রিভুজের BI ও CI যথাক্রমে $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-র সমদ্বিখণ্ডক। উহারা I-বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle BIC=90°+\angle\frac{A}{2}$.

13 প্রমাণ কর যে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির লম্বদ্বিখণ্ডকের ও কোণগুলির দ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু, লম্ববিন্দু ও ভরকেন্দ্র একই বিন্দু হইবে।

14 কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি বর্ধিত করা হইলে বর্ধিতাংশের উপর যে কোনে বিন্দু হইতে সমান বাহু দুইটির লম্ব-দূরত্বের অন্তর ধ্রুবক।

15 ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু E ও F ; প্রমাণ কর যে DE ও BF, AC কর্ণকে ত্রিখণ্ডিত করে।

16. কোন ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর পাতিত লম্বের মধ্যবর্তী কোণ, ভূমি-সংলগ্ন কোণের অন্তরের অর্ধ।

17. ABC ত্রিভুজের G ভরকেন্দ্র। প্রমাণ কর যে, $\triangle BGC=$ চতুর্ভুজ AFGE।

18. কোন ত্রিভুজের মধ্যমা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের চারগুণ, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান।

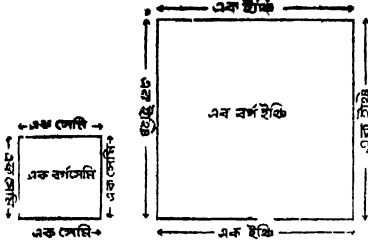
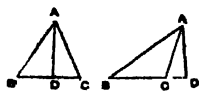
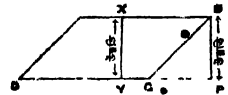
19. ABC ত্রিভুজের O লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে $\angle BOC=180°-\angle A$.

20. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র S, অন্তঃকেন্দ্র I ও লম্ববিন্দু O হইলে, প্রমাণ কর যে AI রেখা SAO কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

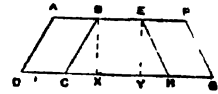
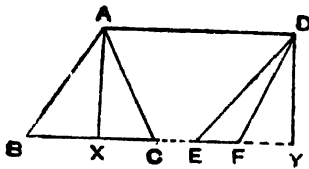
8

ক্ষেত্রফল ও তৎসম্পর্কিত উপপাদ্য

8·1. **ক্ষেত্রফল** (Area) : সীমারেখা দ্বারা পরিবেষ্টিত সামতলিক ক্ষেত্রের মধ্যবর্তী স্থানের পরিমাণকে **ক্ষেত্রফল** বা কালি বলে।

8·2. **ক্ষেত্রফলের একক** (Unit of area) : একক দৈর্ঘ্যের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে ক্ষেত্রফলের একক ধরা হয়। ইহাকে এক বর্গএকক বলে। বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহু এক সেন্টিমিটার হইলে উহার ক্ষেত্রফল এক বর্গ সেন্টিমিটার এবং এক ইঞ্চি বাহু-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এক বর্গইঞ্চি। সেইরূপ এক বর্গগজ, এক বর্গমাইল, এক বর্গ কিলোমিটার প্রভৃতিকে ক্ষেত্রফলের একক ও ধরা হয়।

8.3. **সামান্তরিকের উন্নতি বা উচ্চতা** (Altitude বা Height) : সামান্তরিকের যে-কোন বাহুকে ভূমি ধরিয়া উহার বিপরীত বাহুর যে-কোন বিন্দু হইতে ঐ ভূমির উপর পাতিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে **উচ্চতা** বা **উন্নতি** বলে। ABCD সামান্তরিকের DC ভূমি হইতে XY এবং BP উহার উন্নতি। প্রয়োজনবোধে DC-কে বর্ধিত করিয়া BP লম্ব অঙ্কিত করা হইয়াছে।

8·31. **ত্রিভুজের উন্নতি বা উচ্চতা :** যে কোন বাহুকে ভূমি ধরিয়া উহার বিপরীত শীর্ষকোণ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যকে ত্রিভুজের উন্নতি বা উচ্চতা (Altitude) বলে। △ABC-র ভূমি BC ধরিলে উভয় চিত্রে AD উচ্চতা। ডানদিকের চিত্রে বর্ধিত BCর উপর AD লম্ব।

8.4 **একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত :** যখন দুইটি কিংবা তাহার অধিক সামান্তরিকের ভূমি দুইটি একই সরলরেখা বা বর্ধিত সরলরেখার উপর থাকে এবং উহাদের বিপরীত বাহুগুলি এই ভূমির সহিত সমান্তরাল একটি সরলরেখার উপর থাকে, তখন তাহাদের একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের বা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত (between the same parallels) বলে।

▱ABCD ও ▱EFGH দুইটির ভূমি DC ও HG একই সরলরেখা DG-র উপর অবস্থিত। উহাদের বিপরীত বাহুদ্বয় AB ও EF একই সমান্তরাল সরলরেখা AFর উপর আছে এবং AF∥DG ; সেইজন্য সামান্তরিকদ্বয় একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। ▱ABCDর উচ্চতা BX ও ▱EFGH র উচ্চতা EY। BX ও EY একই সরলরেখা XYর উপর লম্ব বলিয়া উহারা পরস্পর সমান্তরাল। ∴ BEYX একটি আয়তক্ষেত্র। অতএব BX = EY সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকের উচ্চতাও সমান।

8.41. যদি দুই বা তাহার অধিক ত্রিভুজের ভূমিগুলি একই রেখা বা বর্ধিত রেখার উপর থাকে এবং উহাদের শীর্ষবিন্দুগুলির সংযোজক সরলরেখা ভূমির সহিত সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইবে। ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের BC ও EF ভূমিদ্বয় একই সরলরেখা BE-র উপর অবস্থিত। উহাদের শীর্ষবিন্দু সংযোজক সরলরেখা AD ∥ BF। ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। AX, △ABC-র উন্নতি এবং DY, △DEF-র উন্নতি। ADYX একটি আয়তক্ষেত্র। ∴ AX = DY. অতএব একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির উন্নতি সমান।

8.5. **আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :** আয়তাকার ক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুগুলি যত একক দীর্ঘ হয়, তাহাদের একটিকে দৈর্ঘ্য আর অপরটিকে প্রস্থ ধরিয়া উহাদের গুণ করিলে ঐ গুণফলই আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হইবে।

সুতরাং,

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = ক্ষেত্রফল ÷ প্রস্থ।

আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = ক্ষেত্রফল ÷ দৈর্ঘ্য।

আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2(দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)।

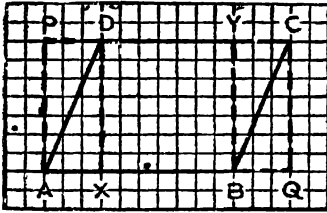
বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বাহু × বাহু = (বাহু)^2।

বর্গক্ষেত্রের বাহু = $\sqrt{\text{ক্ষেত্রফল}}$।

বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 4 × একটি বাহু।

ABCD আয়তক্ষেত্রকে AB. BC বা AC বা BD এইরূপে প্রকাশ করা হয়।
ABCD বর্গক্ষেত্রকে AB^2 বা BC^2 বা AC বা BD এইরূপে প্রকাশ করা হয়।

8·6. **সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :** সমকোণী ত্রিভুজ ABCর ∠ABC সমকোণ। উহার AB বাহু 8 একক এবং BC বাহু 5 একক দীর্ঘ। ABCD আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত হইল। AC কর্ণ উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। ABCD আয়তক্ষেত্রের AB ও BC বাহুদ্বয় যথাক্রমে 8 ও 5 একক দীর্ঘ। ∴ উহার ক্ষেত্রফল $8\times5=40$ বর্গএকক ; এবং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times40=20$ বর্গএকক। অর্থাৎ উহার ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times8\times5=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\times$ সমকোণের পার্শ্ববর্তী বাহুর গুণফল।

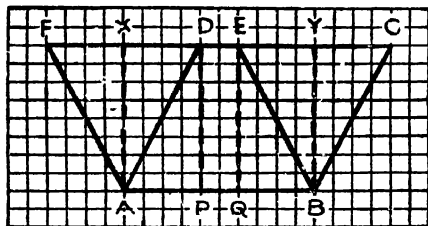
8.7. **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল :** ▭ABCDর D ও C বিন্দু হইতে AB ভূমির উপর DX ও CQ দুইটি লম্ব এবং A ও B বিন্দু হইতে DC বাহুর উপর AP ও BY দুইটি লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। AB 10 একক দীর্ঘ এবং উচ্চতা DX, 7 একক দীর্ঘ। আয়তক্ষেত্র PABYর ক্ষেত্রফল $=10\times7=70$ বর্গ একক। এক্ষণে ▭ABCD-র ক্ষেত্রফল = AQCP আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল — সমকোণী △APD — সমকোণী △CBQ = AQ × AP বর্গ একক $-\frac{1}{2}$. PD × A আয়তক্ষেত্র $-\frac{1}{2}$. YCQB আয়তক্ষেত্র $=13\times7-\frac{1}{2}\times7\times3-\frac{1}{2}\times7\times3$ বর্গ একক $=91-\frac{1}{2}.21$ বর্গএকক $-\frac{1}{2}.21$ বর্গএকক $=91-21=70$ বর্গএকক।

সুতরাং PABY আয়তক্ষেত্র ও ▭ABCD একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল AB ও PCর মধ্যে অবস্থিত এবং উহাদের ক্ষেত্রফল সমান। অতএব,

সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সহিত সমান।

কিন্তু আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা। অতএব,

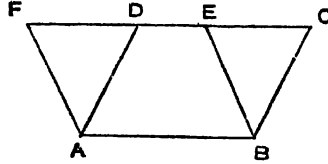
সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা।

8·8. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত দুইটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে পরীক্ষামূলক প্রমাণ :

▱ABCD ও ▱ABEF একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AB ও FCর মধ্যে অবস্থিত। ABCDর উন্নতি DP এবং ABEF-র উন্নতি EQ। AB ভূমি 10 একক দীর্ঘ এবং DP ও EQ প্রত্যেকে 8 একক দীর্ঘ। AB ও CF সমান্তরাল বলিয়া DP ও EQ দুইটি সমান। এক্ষণে ▱ABCDর ক্ষেত্রফল $= AB \times DP = 10 \times 8 = 80$ বর্গ একক। ▱ABEF-র ক্ষেত্রফল $= AB \times EQ = 10 \times 8$ বর্গ একক। সুতরাং সামান্তরিকদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান। অতএব. **একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল সমান।**

দ্রষ্টব্য : FD ও EC প্রত্যেকেই 8 একক দীর্ঘ এবং উহারা ADF ও BEC ত্রিভুজদ্বয়ের ভূমি এবং AX ও BY উহাদের উন্নতি। ইহারা প্রত্যেকেই 8 একক দীর্ঘ। $\therefore$ ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ FD AX $= \frac{1}{2}.\ 8 \times 8 = 32$ বর্গ একক এবং BCE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$. EC. BY $= \frac{1}{2}.\ 8 \times 8 = 32$ বর্গ একক। $\therefore$ ADF ও BCE ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান। এখন AFCB ক্ষেত্র হইতে ADF ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করিলে ▱ABCD অবশিষ্ট থাকে এবং BCE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বিয়োগ করিলে ▱ABFE অবশিষ্ট থাকে। একই ক্ষেত্রফল হইতে সমান সমান ক্ষেত্রফল বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট অংশগুলি নিশ্চয় সমান হইবে।

অতএব ▱ ABCD = ▱ABEF। অপর পৃষ্ঠায় ঔপপত্তিক প্রমাণ (Formal Proof) প্রদত্ত হইল।

উপপাদ্য 31

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত (অর্থাৎ একই উন্নতি বিশিষ্ট) সামান্তরিকসমূহের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান

মনে করা যাউক, ABCD ও ABEF সামান্তরিকদ্বয় একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AB ও CF-র মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ও ABEF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

প্রমাণ ঃ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া FE = AB = DC. উভয় পক্ষ হইতে DE বিয়োগ করিলে FD = CE. পুনরায় AF ও BE সমান্তরাল এবং CF উহাদের ছেদ করিয়াছে।

সুতরাং অনুরূপ ∠AFD = অনুরূপ ∠BEC.

তদ্রূপ AD ও BC সমান্তরাল এবং CF উহাদের ছেদ করিয়াছে।

সুতরাং অনুরূপ ∠ADF = অনুরূপ ∠BCE.

এখন ADF ও BEC ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

∠AFD = ∠BEC, ∠ADF = ∠BCE এবং FD = CE

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব ক্ষেত্রফলও সমান।

∴ চতুর্ভুজ ABCF − △ADF = চতুর্ভুজ ABCF − △BCE

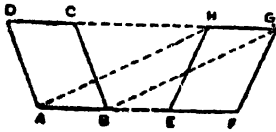
অর্থাৎ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ABEF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

দ্রষ্টব্য : ADF ও BCE সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সাধারণ ABED যোগও করা যাইতে পারে। অর্থাৎ চতুর্ভুজ ABED + △ADF = চতুর্ভুজ ABED + △BCE ∴ সামান্তরিক ABEF-র ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক ABCD-র ক্ষেত্রফল।

অনুসিদ্ধান্ত 1. একই ভূমির উপর এবং একই উন্নতিবিশিষ্ট সামান্তরিক সমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

একই উন্নতিবিশিষ্ট হইলে সামান্তরিকগুলি একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে। সুতরাং উহাদের ক্ষেত্রফলগুলিও সমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2 সামান্তরিকের ভূমিগুলি সমান এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে, উহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

মনে করা যাউক, ▱ABCD ও ▱EFGH-এর AB ও EF ভূমিদ্বয় সমান এবং AF ও DG দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যে অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

অঙ্কন: AB বর্ধিত করিয়া EF-র সহিত এবং DC বর্ধিত করিয়া HG-র সহিত সংযুক্ত করা হইল। AH ও BG যুক্ত করা হইল।

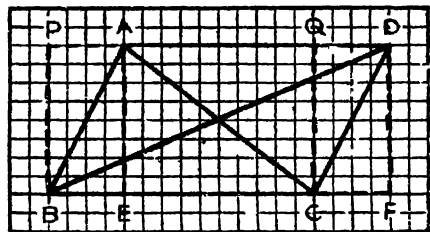
প্রমাণ: কল্পনানুসারে, AB = EF = HG [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু] এবং AB ও HG সমান্তরাল [কল্পনা] ; ∴ ABGH একটি সামান্তরিক।

▱ABCD = ▱ABGH ∴ একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয় AB ও DG র মধ্যে অবস্থিত ; পুনরায় সামান্তরিক ABGH = সামান্তরিক EFGH ∴ একই ভূমি HG-র উপর এবং একই সমান্তরাল HG ও AF-র মধ্যে অবস্থিত। ∴ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = EFGH সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

অনুসিদ্ধান্ত 3. সামান্তরিকের ভূমিগুলি সমান এবং উহাদের উন্নতি সমান হইলে উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

8.9. একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত দুইটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে পরীক্ষামূলক প্রমাণ:

ABC ও DBC দুইটি ত্রিভুজ একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC ও ADর মধ্যে অবস্থিত।

DAকে P পর্যন্ত ও BCকে F পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। A ও D হইতে BFর উপর AE ও DF লম্ব অঙ্কিত হইল। তদ্রূপ, C ও B হইতে PD-র উপর CQ ও BP লম্ব অঙ্কিত হইল। AE = CQ = DF = PB। ইহারা 8 একক দীর্ঘ, BC 14 একক ও CF এবং BE প্রত্যেকে 4 একক দীর্ঘ। এখন ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$=\triangle ABE+\triangle AEC=$ আয়ত APBE-র অর্ধ + আয়ত ABCQর অর্ধ $=\frac{1}{2}AE\times BE+\frac{1}{2}AE\times EC=\frac{1}{2}.8\ 4.+\frac{1}{2}.8.10=16+40=56$ বর্গ একক।

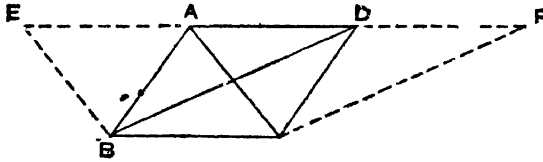
পুনরায় ত্রিভুজ DBCর ক্ষেত্রফল $=\triangle DBF-\triangle DCF=$ আয়ত PDFBর অর্ধ − আয়ত DQCFর অর্ধ $=\frac{1}{2}BF\times DF-\frac{1}{2}CF\times DF=\frac{1}{2}.\ 18.8-\frac{1}{2}.\ 4\ 8=72-16=56$ বর্গ একক।

অতএব একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল সমান। অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজের ভূমি সমান হইলে উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

দ্রষ্টব্য : ত্রিভুজগুলি একই ভূমির উপর অবস্থিত ও সমান উন্নতি বিশিষ্ট হইলে তাহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

উন্নতিগুলি সমান হইলে ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে থাকিবে। সুতরাং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে। নিম্নে উপপাদ্যিক প্রমাণ প্রদত্ত হইল।

উপপাদ্য 32

একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত (অর্থাৎ একই উন্নতি-বিশিষ্ট) ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

মনে করা যাউক, ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয়ের একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC ও AD-র মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ও DBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

অঙ্কন : B বিন্দু হইতে ACর সহিত সমান্তরাল BE সরলরেখা অঙ্কিত করা হইল। ইহা বর্ধিত DAর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল। C বিন্দু হইতে BD-র

সহিত সমান্তরাল CF সরলরেখা অঙ্কিত করা হইল। ইহা বর্ধিত AD-র সহিত F বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ : ACBE চতুর্ভুজের AC ও BE সমান্তরাল [অঙ্কনানুসারে]

AE ও BC সমান্তরাল [কল্পনা],

∴ ACBE একটি সামান্তরিক।

অনুরূপে DBCF চতুর্ভুজের CF ও DB সমান্তরাল। [অঙ্কনানুসারে],

DF ও BC সমান্তরাল [কল্পনা]

∴ DBCF একটি সামান্তরিক।

ACBE ও DBCF সামান্তরিক দুইটি ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC ও EF-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ ACBE-র ক্ষেত্রফল = DBCF-র ক্ষেত্রফল।

কিন্তু AB কর্ণ ACBE সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

∴ $\triangle$ ABC = $\frac{1}{2}$ সামান্তরিক ACBE.

অনুরূপে $\triangle$ DBC = ^{1} সামান্তরিক DBCF.

যেহেতু সামান্তরিক ACBE = সামান্তরিক DBCF,

সুতরাং উহাদের অর্ধাংশগুলিও সমান।

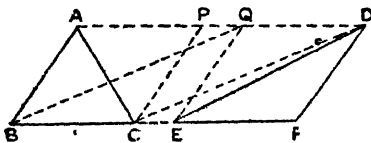
অতএব $\triangle$ ABC-র ক্ষেত্রফল = $\triangle$ DBC-র ক্ষেত্রফল।

অনুসিদ্ধান্ত 1 : একই ভূমির উপব এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

একই উচ্চতা হইলে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলির সংযোজক সরলরেখা ভূমির সহিত সমান্তরাল হইবে। সুতরাং উহাদের ক্ষেত্রফলও সমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2 : সমান ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরল-রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

মনে করা যাউক ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের BC ও EF ভূমিদ্বয় সমান এবং উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BF ও AD-র মধ্যে অবস্থিত।

অঙ্কন : C বিন্দু হইতে CP∥AB, AD-র সহিত P বিন্দুতে মিলিত হইল। E বিন্দু হইতে EQ ∥ FD, AD-র সহিত Q বিন্দুতে মিলিত হইল। BQ এবং CD সংযুক্ত হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে ABCP এবং EFDQ দুইটি সামান্তরিক। AC কর্ণ ABC▱-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে বলিয়া △ ABC = ½▱ABCP ; তদ্রূপ △DEF = ½▱EFDQ। সামান্তরিকের বিপরীত বাহু বলিয়া QD = EF = BC এবং ইহারা সমান্তরাল। ∴ BCDQ একটি সামান্তরিক।

এখন একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ▱ABCP = ▱BCDQ এবং একই কারণে ▱BCDQ = ▱EFDQ.
∴ ▱ABCP = ▱EFDQ, উহাদের অর্ধও সমান। ∴ △ ABC = △DEF.

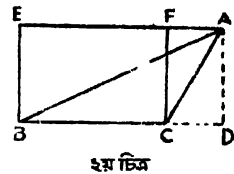
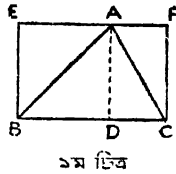
অনুসিদ্ধান্ত 3 : ত্রিভুজের ভূমিগুলি সমান হইলে এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট হইলে উহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 4 : মধ্যমা ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

8. 10. **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :** একটি ত্রিভুজ এবং একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে অর্থাৎ উভয়ই একই উন্নতিবিশিষ্ট হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজ ও BCFE আয়তক্ষেত্র একই ভূমি BC ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BC ও EF (বা EFA)-র মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং উহাদের উন্নতি AD (BE বা CF)। প্রমাণ করিতে হইবে △ ABC = ½□BCFE.

E A F B D C
১ম চিত্র

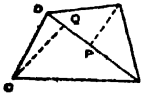
E F A B C D
২য় চিত্র

অঙ্কন : AD উন্নতি অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : AD ⊥ BC বলিয়া BDAE ও ADCF প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্র ; AB ও AC কর্ণদ্বয় উহাদের সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। △ ABD = ½ BDAE এবং △ ADC = ½ ADCF

১ম চিত্রে △ ABC = △ABD + △ADC = ½□BDAE + ½ □ ADCF
= ½ BD. AD + ½ DC. AD = ½AD. (BD + DC) = ½ AD. BC.

২য় চিত্রে △ABC = △ABD − △ADC = ½□BDAE − ½□ADCF = ½ BD. AD − ½ DC. AD = ½ AD (BD − DC) = ½ AD. BC.

অতএব, **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = ½ ভূমি × উচ্চতা।**

8.11. **চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল :** মনে করা যাউক ABCD একটি চতুর্ভুজ। BD উহার কর্ণ। BD-র উপর A ও C হইতে AP ও CQ লম্ব অঙ্কিত হইল।

এক্ষণে ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \triangle ABD + \triangle BDC = \frac{1}{2}$ BD. AP $+ \frac{1}{2}$BD. CQ $= \frac{1}{2}$BD. (AP$+$CQ). অতএব **চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণ $\times$ (কর্ণের উপর প্রশাখাদ্বয়ের সমষ্টি)।**

সংজ্ঞা : চতুর্ভুজের কর্ণের উপর কৌণিক বিন্দু হইতে লম্বকে ঐ কর্ণের **প্রশাখা** (offset) বলে। AP ও CQ, BD কর্ণের প্রশাখা।

8.12. **ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল :** মনে করা যাউক, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম ; উহার AB ॥ CD. AC কর্ণ অঙ্কিত হইল। A বিন্দু হইতে DCর উপর AP লম্ব ও C হইতে বর্ধিত ABর উপর CQ লম্ব অঙ্কিত হইল।

এক্ষণে ABCD ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= \triangle ADC + \triangle ABC = \frac{1}{2}$DC. AP $+ \frac{1}{2}$AB. CQ [কিন্তু AP$=$CQ যেহেতু AB ॥ CD] $\therefore$ ABCDর ক্ষেত্রফল$=$ $\frac{1}{2}$DC. AP$+ \frac{1}{2}$AB.AP $= \frac{1}{2}$AP. (DC$+$AB). অতএব,

ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল = সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধ × সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব (লম্ব দূরত্ব)।

8.13. **রম্বসের ক্ষেত্রফল :** মনে করা যাউক ABCD একটি রম্বস। ইহার বাহুগুলি পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে বলিয়া AO $=$CO এবং AO ও CO, BD-র উপর লম্ব।

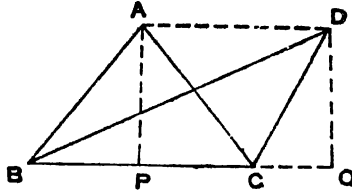
এক্ষণে ABCD রম্বসের ক্ষেত্রফল$= \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{1}{2}$. BD. AO$+ \frac{1}{2}$BD. CO$= \frac{1}{2}$ BD. AO$+ \frac{1}{2}$ BD. AO$= \frac{1}{2}$ BD (AO$+$AO)$= \frac{1}{2}$ BD. 2AO$= \frac{1}{2}$BD. AC. অতএব,

রম্বসের ক্ষেত্রফল = কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধ।

8.14. একই ভূমির উপর এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, সুতরাং ইহাদের উন্নতিও সমান।

ইহার পরীক্ষামূলক প্রমাণ 8.9 অনুচ্ছেদ হইতে সহজে বাহির করা যায়। ইহা উপপাদ্য 32এর বিপরীত প্রতিজ্ঞা। উহার ঔপপত্তিক প্রমাণ অপর পৃষ্ঠায় প্রদত্ত হইল।

উপপাদ্য 33

একই ভূমির উপর এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

মনে করা যাউক, ABC ও DBC ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি BC-র একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং উহাদের ক্ষেত্রফল সমান। প্রমাণ করিতে হইবে AD ও BC সমান্তরাল।

অঙ্কন: A ও D হইতে BC ও বর্ধিত BC-র উপর যথাক্রমে AP ও DQ লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। তাহা হইলে AP ও DQ যথাক্রমে ABC ও DBC ত্রিভুজ দুইটির উন্নতি হইয়াছে।

প্রমাণ: $\triangle ABC=\frac{1}{2}$ BC. AP এবং $\triangle DBC=\frac{1}{2}$ BC. DQ. কিন্তু কল্পনানুসারে $\triangle ABC=\triangle DBC$. $\frac{1}{2}$ BC. AP $=\frac{1}{2}$ BC. DQ $\therefore$ AP = DQ.

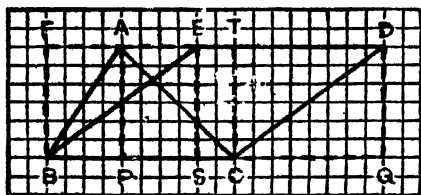
AP ও DQ একই সরলরেখা BQ-এর উপর লম্ব। $\therefore$ AP ও DQ সমান্তরাল। অতএব AP ও DQ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। $\therefore$ উহাদের প্রান্তবিন্দুগুলি একই ক্রমে যুক্ত করিয়া যে APQD চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইয়াছে তাহা একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ AD ও PQ সমান্তরাল। অর্থাৎ AD ও BC সমান্তরাল।

অনুসিদ্ধান্ত: সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ভূমিগুলি সমান হইলে উহাদের উন্নতিও সমান হইবে।

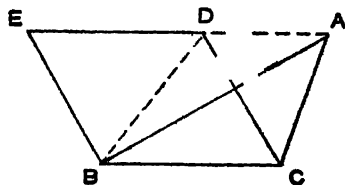
8.15 একটি ত্রিভুজ ও একটি সামান্তরিক একই ভূমি ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে তৎসম্বন্ধে পরীক্ষামূলক প্রমাণ।

$\triangle$ABC এবং সামান্তরিক EBCD একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি BC ও FD-র মধ্যে অবস্থিত। $\because$ BC ‖ FD, উহাদের

লম্ব-দূরত্ব সর্বদা সমান এবং AP=BF=ES=TC=DQ=6 একক দীর্ঘ। এক্ষণে ABC ত্রিভুজ $= \triangle ABP + \triangle APC = \frac{1}{2}APBF + \frac{1}{2}APCT = \frac{1}{2} BP.\ AP + \frac{1}{2}PC.\ AP$

$= \frac{1}{2}.4\ 6 + \frac{1}{2}.6.6 = 12 + 18$
$= 30$ বর্গ একক।

পুনরায় সামান্তরিক EBCD $=$ BQDF আয়তক্ষেত্র $- \triangle BEF - \triangle DCQ = BQ.\ BF - \frac{1}{2}\ EF.\ BF - \frac{1}{2}\ CQ.\ DQ = 18.6 - \frac{1}{2}.8.6 - \frac{1}{2}.\ 8.6 = 108 - 24 - 24 = 60$ বর্গ একক। অতএব ▱ EBCD-র ক্ষেত্রফল △ABC-র ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। নিম্নে ইহার ঔপপত্তিক প্রমাণ প্রদত্ত হইল।

উপপাদ্য 34

একটি ত্রিভুজ এবং একটি সামান্তরিক একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ঐ সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

মনে করা যাউক, ABC ত্রিভুজ এবং EBCD সামান্তরিক একই ভূমি BC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় EA ও BC-র মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল EBCD সমান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধ।

অঙ্কন : BD যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : EBCD একটি সামান্তরিক, সুতরাং BD কর্ণ উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

∴ BDC ত্রিভুজ, EBCD সামান্তরিকের অর্ধ।

কিন্তু ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC-র উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় DA ও BC-র মধ্যে অবস্থিত।

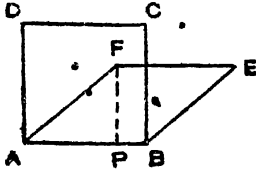
∴ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল BDC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান।

অতএব ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল EBCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধ।

অনুশীলনী 8A

[1 হইতে 15 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

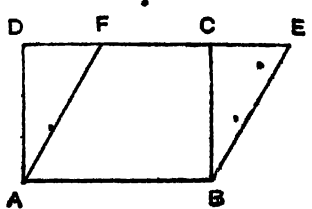
1. একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি রম্বস একই ভূমির উপর অবস্থিত হইলে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, রম্বসের ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে [C. U. '40, G. U. '54.]

মনে করা যাউক ABCD বর্গক্ষেত্র এবং ABEF রম্বস একই ভূমি AB র উপর অবস্থিত। প্রমাণ করিতে হইবে ABCD-র ক্ষেত্রফল ABEF-র ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন : F বিন্দু হইতে AB ভূমির উপর FP লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : □ABCD-র প্রত্যেক বাহু সমান এবং ABEF রম্বসের প্রত্যেক বাহু সমান। ∴ AB = AD = AF. সমকোণী △APF-র অতিভুজ AF বৃহত্তম বাহু। ∴ AF > FP. □ABCD-র ক্ষেত্রফল = AB. AD = AB. AF এবং ABEF রম্বসের ক্ষেত্রফল = AB × FP ∴ (AB.AF) > (AB.FP). অতএব □ABCD-র ক্ষেত্রফল রম্বস ABEF-র ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বৃহত্তর।

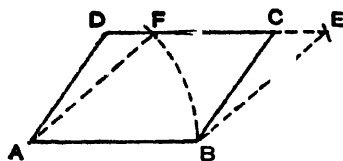
2. সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র ও একটি সামান্তরিক একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের পরিসীমা আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

(বিশেষ নির্বচন দাও)

প্রমাণ : □ABCD-র পরিসীমা = 2 (AB + AD) এবং ▱ABEF-র পরিসীমা = 2(AB + AF), কিন্তু AFD সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AF > AD. ∴ 2(AB + AF) > 2(AB + AD).

অতএব ▱ ABEF-র পরিসীমা □ABCD-র পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

3. একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ঐ সামান্তরিকের ভূমির উপর একটি রম্বস আঁক। কখন অঙ্কন অসম্ভব হইবে ? [C. U. 1935]

(বিশেষ নির্বচন দাও)

অঙ্কন : A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া AB ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তচাপ DC-কে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ বর্ধিত DC কে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AF ও BE যুক্ত করা হইল।

এখন ABEF উদ্দিষ্ট রম্বস হইল। ক্ষুদ্রতর বাহুকে ব্যাসার্ধ ধরিলে অঙ্কন অসম্ভব হইবে।

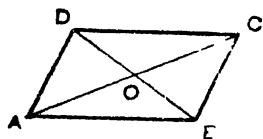
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে AB = AF = BE = EF. ∴ ABEF একটি রম্বস। ABEF ও ABCD একই ভূমি AB-র উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AB ও DEর মধ্যে অবস্থিত।

∴ উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

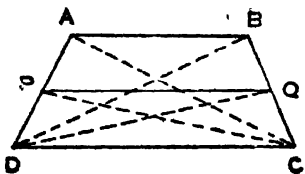
4 একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ভূমির উপর একটি রম্বস আঁক। [C. U. 1933]

5 সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিককে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে। [C. U 1915, 1950, D B. '35, '49, '52]

(বিশেষ নির্বচন দাও)

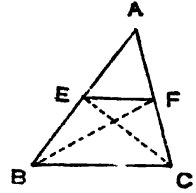
প্রমাণ : সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। O বিন্দু AC ও BD উভয়েরই মধ্যবিন্দু। △ABD-র AO মধ্যমা ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অতএব △AOB = △AOD অনুরূপে △AOB = △BOC △BOC = △COD এবং △AOD = △COD অতএব ত্রিভুজ চারিটির ক্ষেত্রফল সমান।

6 ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির সমান্তরাল। [C. U 1926]

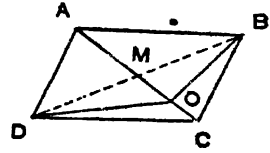
ইঙ্গিত : AC, BD, PC, QD যুক্ত করা হইল

প্রমাণ : AP = PD বলিয়া PC, △ACD-র মধ্যমা। ∴ △PDC = ½ △ADC, তদ্রূপ △DQC = ½△BDC, কিন্তু △ADC = △BDC ∵ একই ভূমি DC, একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AB ও DC-র মধ্যে অবস্থিত। ∴ △PDC = △DQC এবং উহারা একই ভূমি DC-র একই পার্শ্বে অবস্থিত, সুতরাং ইহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত ∴ PQ ∥ DC এবং ∵ DC∥AB ∴ PQ∥AB.

7. ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।

মনে করা যাউক E ও F, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়। প্রমাণ করিতে হইবে EF, BC-র সমান্তরাল।

অঙ্কন : EC ও BF যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : যেহেতু E, AB-র মধ্যবিন্দু; $\therefore$ EC, ABC ত্রিভুজের মধ্যমা। $\therefore$ $\triangle BEC = \frac{1}{2}\triangle ABC$ তদ্রূপ $\triangle BFC = \frac{1}{2}\triangle ABC$। অতএব $\triangle BEC = \triangle BFC$, কিন্তু ইহারা একই ভূমি BC-র উপর একই পার্শ্বে অবস্থিত। $\therefore$ উহারা একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। অতএব EF ∥ BC.

8. ABCD সামান্তরিকের কর্ণ AC-র উপর O যে কোন একটি বিন্দু। OB, OD যোগ করিয়া প্রমাণ কর যে, BAO এবং DAO ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

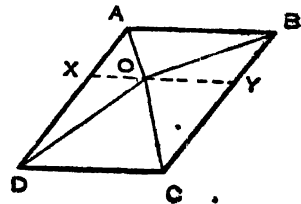
মনে করা যাউক ▭ABCD এর AC কর্ণের উপর O যে-কোন একটি বিন্দু। OB ও OD সংযুক্ত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\triangle BAO$ ও $\triangle DAO$-র ক্ষেত্রফল সমান।

অঙ্কন : BD কর্ণ অঙ্কিত হইল।

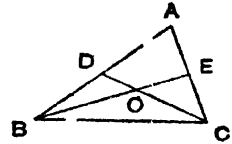
প্রমাণ : AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর M বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। অর্থাৎ DM = BM. $\therefore$ AM, ABD ত্রিভুজের মধ্যমা, উহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। $\therefore$ $\triangle ABM = \triangle ADM$. OM, OBD ত্রিভুজের মধ্যমা। $\therefore$ $\triangle OBM = \triangle ODM$. অতএব $\triangle ABM + \triangle OBM = \triangle ADM + \triangle ODM$ অর্থাৎ $\triangle ABO = \triangle ADO$.

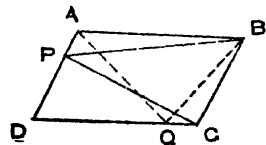
9. ABCD সামান্তরিকের মধ্যে O যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, AOB ও COD ত্রিভুজ দুইটি একত্রে ABCD-র ক্ষেত্রফলের অর্ধ [C. U 1930]

ইঙ্গিত : O বিন্দুতে XOY সরলরেখা AB-র সমান্তরাল অঙ্কিত হইয়াছে। উহা AD ও BC-র সহিত যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

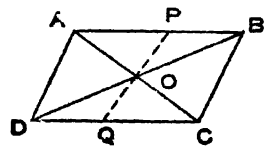
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে ABYX ও DCYX দুইটি সামান্তরিক। $\triangle AOB = \frac{1}{2}$▭ABYX, কারণ উহারা একই ভূমি AB এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত। অনুরূপে $\triangle COD = \frac{1}{2}$▭DCYX

$\therefore$ $\triangle AOB + \triangle COD = \frac{1}{2}$ (▭ABYX + ▭DCYX) $= \frac{1}{2}$▭ABCD.

10 ABC একটি ত্রিভুজ, D ও E যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু। BE ও CD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\triangle BOC$ এর ক্ষেত্রফল ADOE চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান। [D. B. 1927]

ও E যথাক্রমে AB ও AC-র মধ্যবিন্দু, $\therefore$ CD ও BE $\triangle ABC$-র মধ্যমা। $\therefore$ $\triangle BDC=\frac{1}{2}$ $\triangle ABC$ এবং $\triangle ABE=\frac{1}{2}$ $\triangle ABC$. $\therefore$ $\triangle BDC=\triangle ABE$. $\therefore$ $\triangle BDC-\triangle BDO=\triangle ABE-\triangle BDO$. অর্থাৎ $\triangle BOC=$ চতুর্ভুজ ADOE

11 ABCD একটি সামান্তরিক। P ও Q যথাক্রমে AD ও CD-এর উপরিস্থ যে কোন দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\triangle ABQ$ এবং $\triangle BPC$-এর ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

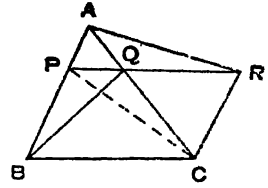
মনে করা যাউক, ▱ABCD-র AD ও CD বাহুর উপরিস্থ P ও Q যে কোন দুইটি বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে $\triangle ABQ=\triangle BPC$

প্রমাণ : $\triangle ABQ$ ও সামান্তরিক ABCD একই ভূমি AB ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AB ও CD-র মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ $\triangle APQ=\frac{1}{2}$▱ABCD অনুরূপভাবে $\triangle BPC=\frac{1}{2}$▱ABCD। $\therefore$ $\triangle ABQ=\triangle BPC$

12 সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [W. B S F 1962]

ইঙ্গিত : APO ও CQO ত্রিভুজদ্বয়ে, $\angle OAP=$ একান্তর $\angle OCQ$, $\angle APO=$ একান্তর $\angle OQC$ এবং $OA=OC$ $\therefore$ $\triangle APO\equiv\triangle OCQ$. AC কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। $\therefore$ $\triangle ABC=\triangle ADC$ বা $\triangle APO$ + চতুর্ভুজ BPAC = $\triangle OCQ$ + চতুর্ভুজ AOQD

$\therefore$ চতুর্ভুজ BPOC = চতুর্ভুজ AOQD, বা চতুর্ভুজ BPOC + $\triangle OCQ$ = চতুর্ভুজ AOQD + $\triangle APO$, অর্থাৎ চতুর্ভুজ BCQP = চতুর্ভুজ APQD.

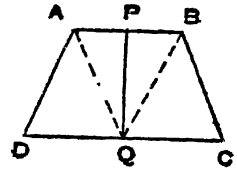
13. ABC ত্রিভুজের AB বাহুর উপর P যে কোন বিন্দু। P বিন্দু হইতে BC-র সমান ও সমান্তরাল PQR সরলরেখা AC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর AQR ও PQB ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান। [B. U. 1922]

ইঙ্গিত : PC ও CR সংযুক্ত হইল।

$\therefore$ BC ও PR সমান ও সমান্তরাল $\therefore$ BP অর্থাৎ AB ও RC সমান্তরাল। একই ভূমি CR এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AP ও RC-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া $\triangle ACR = \triangle PCR$ অর্থাৎ $\triangle AQR + \triangle CQR = \triangle PQC + \triangle CQR$। উভয় দিক হইতে সাধারণ অংশ $\triangle CQR$ বিয়োগ করা হইল। $\therefore$ $\triangle AQR = \triangle PQC$. পুনরায় একই ভূমি PQ ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় PQ ও BC-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া $\triangle PQB = \triangle PQC$. $\therefore$ $\triangle AQR = \triangle PQB$

14. ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়ামকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত করে।

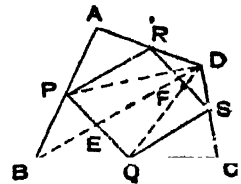
(বিশেষ নির্বচন দাও)

অঙ্কন : AQ ও BQ সংযুক্ত হইল।

প্রমাণ : Q, DC-র মধ্যবিন্দু। $\therefore$ DQ = CQ. $\triangle ADQ$ ও $\triangle BCQ$ সমান ভূমি DQ ও CQর উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় DC এবং AB-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের ক্ষেত্রফল সমান। তদ্রূপ APQ ও BPQ সমান ভূমি AP ও BP-র উপর এবং একই উন্নতিবিশিষ্ট বলিয়া উহাদের ক্ষেত্রফল সমান। $\triangle ADQ + \triangle APQ = \triangle BCQ + \triangle BPQ$ অর্থাৎ ট্রাপিজিয়াম APQD = ট্রাপিজিয়াম BPQC.

15. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে উৎপন্ন সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে। [C. U. 1887]

(বিশেষ নির্বচন দাও)

অঙ্কন : BD, PD ও QD সংযুক্ত হইল।

প্রমাণ : R, AD-র মধ্যবিন্দু। $\therefore$ PR, $\triangle APD$-র মধ্যমা। $\therefore$ $\triangle PRD = \frac{1}{2}\triangle APD$; P, AB-র মধ্যবিন্দু। $\therefore$ DP, $\triangle ABD$-র মধ্যমা। $\therefore$ $\triangle APD = \frac{1}{2}\triangle ABD$, অতএব $\triangle PRD = \frac{1}{4}\triangle ABD$. পুনরায় $\triangle PRD$ ও ▭PRFE একই ভূমি PR ও একই সমান্তরাল PR ও BD-র মধ্যে অবস্থিত। $\therefore$ ▭PRFE $= 2\triangle PRD = \frac{1}{2}\triangle ABD$. অনুরূপভাবে ▭QSFE $= \frac{1}{2}\triangle BDC$. সুতরাং যোগ করিয়া ▭PQSR $= \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD.

16. রম্বসের ক্ষেত্রফল উহার কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক।

[C U '45]

17. ABCD সামান্তরিকের E ও F যথাক্রমে BC ও CD-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে $\triangle AEF = \frac{3}{8}$ ABCD.

18. এক ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমাই ক্ষুদ্রতম। B U. 1920]

19 ABC ত্রিভুজের অন্তর্গত P যে কোন বিন্দু। PAB ও PAC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল যদি সমান হয়, প্রমাণ কর যে AP বর্ধিত করিলে BC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

20 ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল এবং অপর দুই বাহু দ্বারা ছিন্ন যে কোন সরলরেখা ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

21. ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ BD কর্ণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, প্রমাণ কর যে AC কর্ণ চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [B U 1924]

22 ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A। AB ও AC-র মধ্যবিন্দু D এবং E। যদি BE ও CD পরস্পর F বিন্দুতে ছেদ করে, প্রমাণ কর $\triangle ADE = 3\triangle DEF$.

[C U 1947]

23 একটি বর্গক্ষেত্রকে এরূপ চারিটি অংশে বিভক্ত কর যেন অংশ চারিটি হইতে সমান বর্গক্ষেত্র গঠন করা যায়। [C U. 1932]

24 রম্বসের অন্তর্গত যে কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুগুলির দূরত্বের সমষ্টি ধ্রুবক।

ইঙ্গিত: বাহুগুলির লম্ব-দূরত্বের সমষ্টি রম্বসের উন্নতির দ্বিগুণ দেখাও।]

25. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপরিস্থ যে কোন বিন্দু হইতে উহার সমান বাহুদ্বয়ের উপর লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে কোন প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব-র সমান হইবে। [D B 1940]

26 কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থিত কোন বিন্দু হইতে উহার বাহুগুলির উপর লম্ব তিনটির সমষ্টি ত্রিভুজের উন্নতির সমান।

27. সমান উচ্চতা-বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের ভূমি অসমান হইলে যেটির ভূমি বৃহত্তর, তাহার ক্ষেত্রফল অপরটির ক্ষেত্রফল অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। [C. U. 1912]

28. ABCD একটি সামান্তরিক। BC এবং বর্ধিত AB ও DC-র ভিতর অবস্থিত P যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\triangle PAB + \triangle PBC + \triangle PCD = \triangle PDA$. [B U. 1936]

*29. ABC ত্রিভুজের AB-র মধ্যবিন্দু R, এবং AC-র উপর P যে কোন বিন্দু। BP-কে S পর্যন্ত বর্ধিত করায় ত্রিভুজ RPS ও ত্রিভুজ RCP-র ক্ষেত্রফল সমান হইল। প্রমাণ কর যে AB ও SC সমান্তরাল। [B. U. 1932]

*30. ABC ত্রিভুজের AB-র উপর যে কোন বিন্দু D হইতে BC-র সমান ও সমান্তরাল DEF সরলরেখা AC-কে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AEF ও BDE ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান। [B. U. 1922]

31. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAC$ সমকোণ। ইহার তিনটি বাহুর উপর বহির্দিকে BCDE, CFGH, AHKB বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, CFLD, BKME সামান্তরিক দুইটি অঙ্কিত করিলে উহাদের ক্ষেত্রফল সমান হইবে।

*32. ABC ত্রিভুজের D ও E বিন্দু দুইটি AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। BC ভূমিকে F ও G বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত করা হইয়াছে। DF ও EG বর্ধিত করিয়া H বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $\triangle FGH = \frac{1}{3} \triangle ABC$.

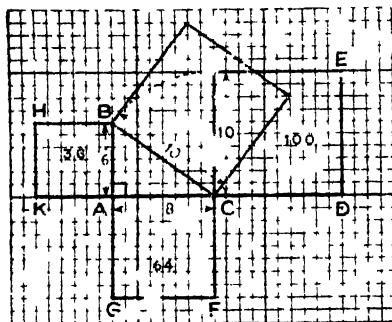
*33 ABCD সামান্তরিকের E কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু। AEB ত্রিভুজের অভ্যন্তরে F যে কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে $\triangle AFC + \triangle BFD = \triangle AFB \sim \triangle CFD$.

*34. ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরে যে কোন বিন্দু E হইতে বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে $\triangle AEC = \frac{1}{2}$ (সামান্তরিক DE $\sim$ সামান্তরিক BE)

*35. ABD ও CBD দুইটি ত্রিভুজ BE ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত। P,Q,R,S যথাক্রমে AB, BC, CD ও AD র মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর, চতুর্ভুজ PQRS = ($\triangle CBD \sim \triangle ABD$).

8.16 সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ও অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সম্পর্কে পরীক্ষামূলক প্রমাণ।

ছক কাগজে একটি সমকোণী ত্রিভুজ ABC অঙ্কিত করা হইয়াছে। ইহার BAC সমকোণ এবং BC অতিভুজ। AC 8 একক দীর্ঘ। AB বাহু 6 একক দীর্ঘ। AC-র উপর অঙ্কিত ACFG বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 8 \times 8 = 64$ বর্গ একক। গণিয়া দেখা যাইবে যে ACFG বর্গক্ষেত্রে 64 ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র আছে। সেইরূপ AB-র উপর অঙ্কিত ABHK বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 6 \times 6 = 36$ বর্গ একক। ইহাও গণিয়া দেখা যাইবে যে ABHK বর্গক্ষেত্রে 36টি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র আছে। অতিভুজ BC বাহু তির্যকভাবে আছে বলিয়া গণিতে পারা যায় না। সেইজন্য C-কে কেন্দ্র করিয়া CB ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত করা হইয়াছে; উহা বর্ধিত FC-কে L বিন্দুতে ছেদ

করিয়াছে। দেখা যাইতেছে CL=BC=10 একক দীর্ঘ। CL র উপর অঙ্কিত CLED বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল=10×10=100 বর্গ একক। ইহাও গণিয়া দেখা যাইবে যে, CLED বর্গক্ষেত্রে 100টি ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্র আছে। অতএব

AB-র উপর বর্গ অর্থাৎ AB^2+AC র উপর বর্গ অর্থাৎ AC^2=36+64=100 বর্গ একক। ইহা BC-র উপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সহিত সমান। অতএব পরীক্ষাদ্বারা প্রমাণ হইল যে, সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। বিভিন্ন পরিমাপের ত্রিভুজ লইয়া দেখা যাইবে যে উপরের সিদ্ধান্ত নির্ভুল।

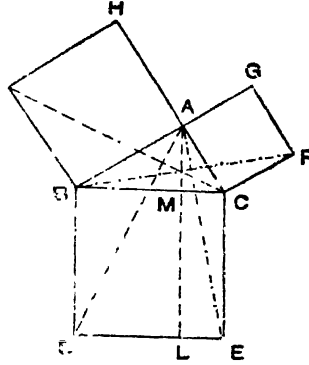
প্রায় 580 খৃষ্টপূর্বে থেলিস (Thales) এর ছাত্র গ্রীসদেশীয় বিখ্যাত মনীষী পীথাগোরাস (Pythagoras) এশিয়া মাইনরের উপকূলবর্তী ক্ষুদ্র সামোস দ্বীপে জন্মগ্রহণ করেন। অনেকে মনে করেন, এই প্রতিজ্ঞাটি পীথাগোরাস্ আবিষ্কার করিয়াছেন। সেইজন্য ইহাকে **পীথাগোরাসের উপপাদ্য** (Theorem of Pythagoras) বলা হয়। কিন্তু পীথাগোরাসের বহু পূর্বে, খৃঃ পূঃ প্রায় 3000 বৎসরেরও পূর্বে এই প্রতিজ্ঞাটি ভারতের মনিঋষিদের জ্ঞাত ছিল।

নিম্নে ইহার উপপত্তিক প্রমাণ প্রদত্ত হইল।

উপপাদ্য 35

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সমকোণ সংলগ্ন অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত-বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

মনে করা যাউক, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ; উহার BAC এক সমকোণ এবং BC অতিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে অতিভুজ BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র AB ও AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান।

AB, BC এবং ACর উপর যথাক্রমে ABKH, BCED এবং ACFG তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইল। A বিন্দু হইতে BD-র সমান্তরাল AL সরলরেখা DE-র সহিত L বিন্দুতে মিলিত হইল। AD এবং KC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ: সমকোণ BAC এবং বর্গক্ষেত্রের সমকোণ BAH সন্নিহিত বলিয়া AC এবং AH একই সরলরেখায় অবস্থিত। একই কারণে AB এবং AG একই সরলরেখায় অবস্থিত।

বর্গক্ষেত্রের সমকোণ বলিয়া $\angle CBD = \angle ABK$

$\therefore \angle CBD + \angle ABC = \angle ABK + \angle ABC$

অর্থাৎ সমগ্র $\angle ABD =$ সমগ্র $\angle CBK$

এক্ষণে ABD ও CBK ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে

$AB = BK$ [একই বর্গক্ষেত্রের বাহু বলিয়া]

$BD = BC$ [একই বর্গক্ষেত্রের বাহু বলিয়া]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABD =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CBK$. [পূর্বে প্রমাণিত].

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

এক্ষণে ত্রিভুজ ABD ও আয়তক্ষেত্র BL একই ভূমি BD এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় BD ও AL-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া

আয়তক্ষেত্র $BL = \triangle ABD$-র দ্বিগুণ।

পুনরায় ত্রিভুজ CBK ও বর্গক্ষেত্র AK একই ভূমি BK এবং একই সমান্তরাল সরলরেখা দুইটি BK ও CH-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া

বর্গক্ষেত্র AK = $\triangle$CBK-র দ্বিগুণ

$\therefore$ $\triangle$ABD = $\triangle$CBK [পূর্বে প্রমাণিত]

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র BL = বর্গক্ষেত্র AK

এইরূপে, AE ও BF যুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যায় যে

আয়তক্ষেত্র CL = বর্গক্ষেত্র AF

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র BL + আয়তক্ষেত্র CL = বর্গক্ষেত্র AK + বর্গক্ষেত্র AF অর্থাৎ বর্গক্ষেত্র BE = বর্গক্ষেত্র AK + বর্গক্ষেত্র AF

অর্থাৎ BC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, AB ও AC-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

8.17. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজের $\angle$A সমকোণ ও BC অতিভুজ হইলে উপরের প্রতিজ্ঞাটিকে সংক্ষেপে এইরূপে প্রকাশ করা যায়,

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ বা $a^2 = c^2 + b^2$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 - AC^2$ বা, $c^2 = a^2 - b^2$

এবং $AC^2 = BC^2 - AB^2$ বা, $b^2 = a^2 - c^2$.

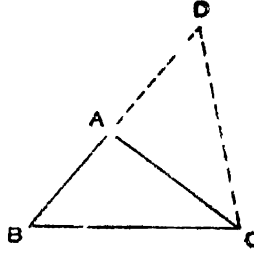
অতএব সমকোণী ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহু জ্ঞাত থাকিলে পীথাগোরাস উপপাদ্যের সাহায্যে তৃতীয় বাহু নির্ণয় করা যায়।

8.18. যদি দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি আর একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়, তবে ঐ বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে। ইহার পরীক্ষামূলক পরীক্ষা :

BCDE বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ একক, CFGA বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 36 বর্গ একক এবং BKLA বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 64 বর্গ একক। যেহেতু 36 + 64 = 100, সুতরাং BCDE-এর ক্ষেত্রফল = CFGA-এর ক্ষেত্রফল + BKLA-এর ক্ষেত্রফল। বর্গক্ষেত্রগুলির বাহু দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে। চাঁদা দ্বারা BAC কোণ মাপিয়া দেখা গেল, উহা একটি সমকোণ। অতএব কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

নিম্নে ইহার ঔপপত্তিক প্রমাণ দেওয়া হইল।

উপপাদ্য 36

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির সমান হইলে, ঐ শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি এক সমকোণ হইবে।

মনে করা যাউক, ABC ত্রিভুজে $BC^2 = AB^2 + AC^2$

প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠BAC সমকোণ।

অঙ্কন : AC বাহুর A বিন্দুতে AC এর উপর AD একটি লম্ব অঙ্কিত হইল ঐ লম্ব হইতে AB-র সমান AD অংশ কাটিয়া DC যুক্ত করা হইল

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে DAC সমকোণ এবং DC উহার অতিভুজ

∴ $DC^2 = AC^2 + AD^2$ [পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$AC^2 + AB^2$ [অঙ্কনানুসারে AD = AB

$= BC^2$ [কল্পনা]

∴ DC = BC.

এক্ষণে ত্রিভুজ ABC ও △ADC-র মধ্যে AB = AD [অঙ্কন], BC = DC ;

এবং AC সাধারণ বাহু ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম

∴ ∠BAC = ∠CAD = এক সমকোণ [অঙ্কনানুসারে]

8·19. **সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য বাহির করিবার সহজ নিয়ম :** অভেদ হইতে পাওয়া যায় যে, $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2-b^2)^2 + (2ab)^2$ ∴ কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যদি a^2+b^2, a^2-b^2 এবং $2ab$ হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সমকোণী হইবে। a ও b-র বিভিন্ন মান লইয়া বিভিন্ন সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর পরিমাণ পাওয়া যাইবে।

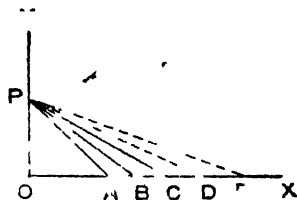
উপরের অভেদটিতে $b=1$ ধরিলে, $(a^2+1)^2 = (a^2-1)^2 + 2a$ এইরূপ হয় ; সুতরাং ত্রিভুজের বাহু তিনটি a^2+1, a^2-1 এবং $2a$। অতএব,

নিয়ম ঃ যে কোন একটি রাশি লইয়া উহার বর্গের সহিত 1 যোগ করিয়া একটি বাহু, বর্গ হইতে 1 বিয়োগ করিয়া দ্বিতীয় বাহু এবং রাশিটির দ্বিগুণ লইলে তৃতীয় বাহু পাওয়া যাইবে।

অনুশীলনী 8B

[1 হইতে 14 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1 একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দুই গুণ, তিন গুণ, চার গুণ, পাঁচ গুণ প্রভৃতি ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : মনে করা যাউক OA এবং OP কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সন্নিহিত দুইটি সমান বাহু। PA যুক্ত করা হইল। পুনরায় OX হইতে PAর সমান OB কাটিয়া লইয়া PB যুক্ত করা হইল। পুনরায় OX হইতে PB-র সমান OC কাটিয়া লইয়া PC যুক্ত করা হইল। এই পদ্ধতিতে পর পর অতিভুজগুলি অঙ্কিত হইল

প্রমাণ। POA একটি সমকোণী ত্রিভুজ

পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা অনুসারে $PA^2 = OP^2 + OA^2 = 2OP^2$ ($\because OP = OA$)

$\therefore PA = \sqrt{2}OP$

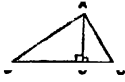
তদ্রূপ $PB^2 = OP^2 + OB^2 = OP^2 + PA^2 = OP^2 + 2OP^2 = 3OP^2$ $\therefore PB = \sqrt{3}OP$ এবং $PC^2 = OP^2 + OC^2 = OP^2 + PB^2 = OP^2 + 3OP^2 = 4OP^2$.

$\therefore PC = \sqrt{4OP^2} = 2OP$ ইত্যাদি।

প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ বর্গক্ষেত্রের বাহু = PA, তিনগুণ বর্গক্ষেত্রের বাহু = PB, চারিগুণ বর্গক্ষেত্রের বাহু = PC ইত্যাদি।

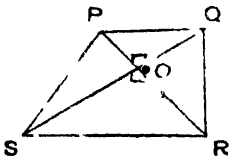
OP যদি দৈর্ঘ্যের একক হয় অর্থাৎ 1 ইঞ্চি বা 1 সেন্টিমিটার প্রভৃতি, তাহা হইলে $PA = \sqrt{2}$ ইঞ্চি বা সে মি ; $PC = \sqrt{4}$ ইঞ্চি বা সে মি প্রভৃতি। সাধারণ স্কেলার বা মাপনী দিয়া 1 দশমিক স্থান পর্যন্ত মাপা যায়, কিন্তু কর্ণমাপনী দ্বারা দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মাপা যায়।

2 AD সরলরেখা ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হইতে BC ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব। যদি $AD^2 = BD \cdot DC$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। [W. B. S F 1952]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হইতে BC ভূমির উপর AD লম্ব এবং $AD^2 = BD \cdot DC$ প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

প্রমাণ : $AD \perp BC$; ADB একটি সমকোণী ত্রিভুজ $\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$, সমকোণী $\triangle ADC$-র $AC^2 = AD^2 + DC^2$ $\therefore$ যোগ করিয়া $AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + AD^2 + DC^2 = BD^2 + DC^2 + 2AD^2 = BD^2 + DC^2 + 2BD.DC = (BD + DC)^2 = BC^2$.

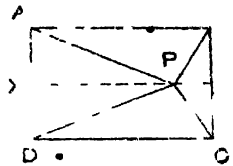
$\therefore \angle BAC$ – এক সমকোণ . ABC একটি সমকোণী $\triangle$ ।

3) PQRS চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমকোণে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর $PQ^2 + RS^2 = PS^2 + QR^2$.

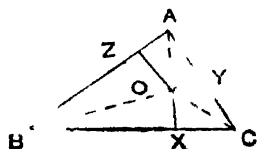
(বিশেষ নির্বচন দাও)

প্রমাণ : POQ সমকোণী $\triangle$, $PQ^2 = PO^2 + QO^2$. তদ্রূপ SOR সমকোণী $\triangle$ $RS^2 = OR^2 + OS^2$. যোগ করিয়া $PQ^2 + RS^2 = PO^2 + QO^2 + OR^2 + OS^2 = (PO^2 + OS^2) + (QO^2 + OR^2) = PS^2 + QR^2$ । কারণ $\angle POS$ ও $\angle QOR$ প্রত্যেকেই সমকোণী ত্রিভুজ।]

4 ABCD আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলির সহিত যে কোন বিন্দু P যুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. (C. U. 1921)

মনে করা যাউক ABCD আয়তক্ষেত্রের মধ্যে P যে কোন বিন্দু। PA, PB, PC, PD যুক্ত করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$.

অঙ্কন : P বিন্দুতে XPY একটি সরলরেখা AB-র সহিত সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত হইল। উহা AD ও BC-র সহিত X এবং Y বিন্দুতে মিলিত হইল

প্রমাণ : আয়তক্ষেত্রের প্রত্যেক কোণ সমকোণ।

$\angle BAX$ এক সমকোণ। XY ॥ AB . $\angle AXP$ এক সমকোণ। সেইরূপ $\angle DXP, \angle BYP, \angle CYP$ প্রত্যেকে সমকোণ। এখন PAX সমকোণী ত্রিভুজে $PA^2 = AX^2 + PX^2$ অনুরূপ $PD^2 = DX^2 + PX^2$; $PB^2 = BY^2 + PY^2$ এবং $PC^2 = CY^2 + PY^2$. $\therefore PA^2 + PC^2 = AX^2 + PX^2 + CY^2 + PY^2 = BY^2 + PX^2 + DX^2 + PY^2 = (BY^2 + PY^2) + (PX^2 + DX^2) = PB^2 + PD^2$.

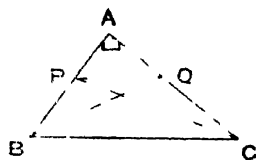
ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ O একটি বিন্দু। OX, OY ও OZ যথাক্রমে BC CA ও AB-র উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $AZ^2+BX^2+CY^2=AY^2+CX^2+BZ^2$ [C. U. 1959]

[বিশেষ নির্বচন দাও]

অঙ্কন : OA, OB ও OC যুক্ত করা হইল

প্রমাণ : OX, OY, OZ লম্ব বলিয়া ছয়টি সমকোণ ত্রিভুজ হইয়াছে। সুতরাং $AZ^2=AO^2-OZ^2$, $BX^2=BO^2-OX^2$ এবং $CY^2=CO^2-OY^2$ অতএব $AZ^2+BX^2+CY^2=AO^2-OZ^2+BO^2-OX^2+CO^2-OY^2=AO^2-OY^2+BO^2-OZ^2+CO^2-OX^2=AY^2+BZ^2+CX^2$

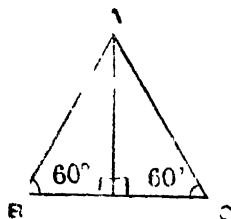
৫. ABC ত্রিভুজের BAC সমকোণ। AB ও AC-র উপর যথাক্রমে P ও Q দুইটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2+PQ^2=BQ^2+CP^2$ [A. U. 1932]

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের AB ও AC-র উপর P ও Q দুইটি বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে $BC^2+PQ^2=BQ^2+CP^2$

অঙ্কন : BQ, CP ও PQ যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $BC^2+PQ^2=AB^2+AC^2+AP^2+AQ^2=(AB^2+AQ^2)+(AC^2+AP^2)=BQ^2+CP^2$

৬. সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ উহার উন্নতির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারিগুণের সমান [C. U. 1933]

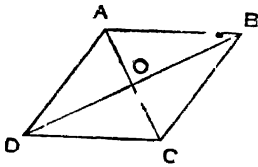
মনে করা যাউক ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ, AD উহার মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে $4AD^2=3AB^2$.

প্রমাণ : ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ∴ $AD^2=AB^2-BD^2$ বা $4AD^2=4AB^2-4BD^2=4AB^2-(2BD)^2=4AB^2-AB^2=3AB^2$ (∵ BC = AB)

৭. সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটি হইতে মধ্যমা দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টির চারিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের পাঁচ গুণের সমান। [D B 1930]

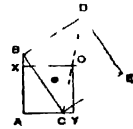
মনে করা যাউক ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ; $\angle BAC$ ও $\angle ACB$ দুইটি সূক্ষ্মকোণ। AD ও CE দুইটি মধ্যমা। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $4AD^2+4CE^2=5AC^2$.

প্রমাণ : ABD ও BCE দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এক্ষণে $4AD^2+4CE^2=4AB^2+4BD^2+4BC^2+4BE^2=4AB^2+(2BD)^2+4BC^2+(2BE)^2=4AB^2+BC^2+4BC^2+AB^2=5AB^2+5BC^2=5(AB^2+BC^2)=5AC^2$.

9. রম্বসের চারি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি উহার কর্ণদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

ইঙ্গিত : রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। ∴ $AO=OC$ এবং $OB=OD$ এক্ষণে $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AO^2+BO^2+BO^2+CO^2+CO^2+DO^2+DO^2+AO^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)=2(2AO^2+2BO^2)=4AO^2+4BO^2=(2AO)^2+(2BO)^2=AC^2+BD^2$.

10. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী। [C. U. '91, P. U. '78]

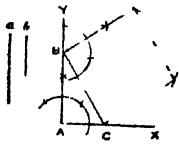
ইঙ্গিত : O হইতে AB ও বর্ধিত AC-র উপর যথাক্রমে OX ও OY লম্ব অঙ্কিত হইল।

AYO, AXO এবং ∠XAY প্রত্যেকে সমকোণ।

∴ AXOY একটি আয়তক্ষেত্র। ∴ ∠XOY এক সম ∠।

CBDE বর্গক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে; এবং $BO=OE=CO=DO$, ∴ $\angle BOC=\angle BOX+\angle COX=$ এক সম ∠. $\angle XOY=\angle COX+\angle COY=$ এক সম ∠.

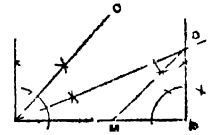
$$\angle BOC=\angle XOY, \text{ বা } \angle BOX+\angle COX=\angle COX+\angle COY.$$

∴ $\angle BOX=\angle COY$, ∴ সমকোণী $\triangle BOX$ ও $\triangle COY$-র $BO=CO$ এবং $\angle BOX=\angle COY$. ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ $OX=OY$.

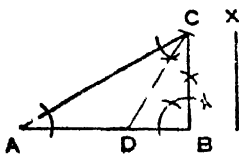
11 দুইটি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

ইঙ্গিত : AX সরলরেখার A বিন্দুতে AY লম্ব অঙ্কিত হইয়াছে। AY হইতে a-র সমান AB অংশ এবং AX হইতে b-র সমান AC অংশ কাটিয়া লইয়া BC যুক্ত করা হইল। BC র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র নির্ণেয় বর্গক্ষেত্র।

প্রমাণ : সমকোণী $\triangle BAC$-র $\angle BAC$ এক সম $\angle$ $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + b^2$ (অঙ্কনানুসারে)

12 একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন, উহার এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর বর্গের দ্বিগুণ হয়।

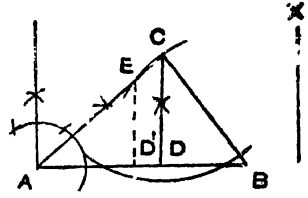
ইঙ্গিত : AB সরলরেখার A বিন্দুতে একটি লম্ব অঙ্কিত করিয়া, সমকোণ কে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। উহার এক অংশ $\angle BAC$কে পুনরায় সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। B বিন্দুতে লম্ব B) ADর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইল। $\angle ADM$ $\angle BAD$ অঙ্কিত হইলে, AB সরলরেখা M বিন্দুতে নির্দিষ্ট অংশে বিভক্ত হইল

প্রমাণ : $\angle DAM = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 90 = 22\frac{1}{2}$ DAM-র বহি $\angle DMB = \angle ADM + \angle DAM = 22\frac{1}{2} + 22\frac{1}{2} = 45°$ সমকোণী BDMর $\angle BDM = 45$ $BD = MB$ $\triangle ADM$-র $\angle DAM = \angle ADM$, $AM = DM$, সমকোণী $\triangle BDM$-র $DM^2 = BD^2 + BM^2 = BM^2 + BM^2 = 2BM^2$

$DM = AM$ $AM^2 = 2BM^2$

13 একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যেন, ঐ অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির অন্তর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

ইঙ্গিত : AB সরলরেখার B বিন্দুতে BC লম্ব হইলে X এর সমান BC অংশ কাটিয়া লওয়া হইয়াছে। AC যুক্ত করিয়া $\angle ACD = \angle CAD$ অঙ্কিত করিলে D বিন্দুতে AB সরলরেখা নির্দিষ্ট অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে $\angle ACD = \angle CAD$ $\therefore$ $AD = CD$ BCD সমকোণী ত্রিভুজে $CD^2 = CB^2 + BD^2$ $\therefore$ $AD^2 - BD^2 = CD^2 - BD^2 = CB^2 = X^2$.

14. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর যে, অংশ দুইটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের সমান হয়।

ইঙ্গিত : AB সরলরেখার A বিন্দুতে $\angle BAC = 45^\circ$ অঙ্কিত হইয়াছে। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া X এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত চাপ ACকে C, বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। C বিন্দু হইতে AB-র উপর লম্ব অঙ্কিত করিয়া AB-কে D বিন্দুতে নির্দিষ্ট অংশে বিভক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\angle DAC = 45^\circ$, $\angle CDA = 90^\circ$. $\therefore$ $\angle ACD = 45^\circ = \angle DAC$, $\therefore$ AD = DC. এক্ষণে $AD^2 + BD^2 = DC^2 + BD^2 = BC^2 = X^2$.

15. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন একটি অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ হয়।

[C. U. 1946]

16. দুইটি বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

17. তিনটি বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

18. একটি বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত কর।

19. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle ABC$ সমকোণ। D, BC-এর উপর যে-কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

20. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ, সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজের সমান।

21. ত্রিভুজের শিরঃকোণ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে যে দুই অংশে বিভক্ত করে, সেই অংশদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তর ত্রিভুজের অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের অন্তরের সমান।

22. এরূপ একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর যাহার ক্ষেত্রফল, দুইটি নির্দিষ্ট সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অন্তরের সমান হয়। [C. U. 1945]

23. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। ইহার $\angle BAC$ সমকোণ। A হইতে অতিভুজ BCর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

24. ABC একটি ত্রি[illegible] AP উহার একটি মধ্যমা। প্রমাণ কর যে, $AP^2 = 3BP^2 = \frac{3}{4}AB^2$.

25. ABC একটি ত্রিভুজ এবং AX উহার উন্নতি। প্রমাণ কর যে, $BX^2 - CX^2 = AB^2 - AC^2$.

26. ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। BC-র মধ্যবিন্দু X এবং CX-র মধ্যবিন্দু Y। প্রমাণ কর, $AY^2 = 13XY^2$; $AB^2 = 4BX^2$; $AX^2 = 3BX^2$. [P.U '33]

*27. কোন হ্রদে একটি পদ্মফুল জল হইতে 6 ইঞ্চি ঊর্ধ্বে ছিল। কোন নৌকারোহী উহাকে ধরিয়া 30 ইঞ্চি অগ্রসর হইলে উহা জলের মধ্যে ডুবিয়া গেল। জলের গভীরতা কত ?

*28. ভূমি হইতে 100 হাত উচ্চে একটি বৃক্ষের উপরে দুইটি বানর উপবিষ্ট ছিল। তন্মধ্যে একটি বৃক্ষ হইতে নামিয়া 200 হাত দূরে একটি জলাশয়ে গেল। দ্বিতীয় বানরটি বৃক্ষের উপর আরও কিছু ঊর্ধ্বে উঠিয়া সেই স্থান হইতে তির্যকভাবে লাফাইয়া জলে পৌঁছাইল। দুইটি বানর সমান দূরত্ব অতিক্রম করিলে দ্বিতীয় বানরটি পরে যে স্থানে উঠিয়াছিল তাহার কত হাত নিচে উঠিয়াছিল ? [লীলাবতী]

29. ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AB-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র BD এবং AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র CE। প্রমাণ কর যে, BE, CD-র উপর লম্ব।

30. ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AB-র উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র BD এবং AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র CE। BE ও CD, F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, AF, EFD কোণের সমদ্বিখণ্ডক। [illegible]

9
ত্রিভুজ অঙ্কন

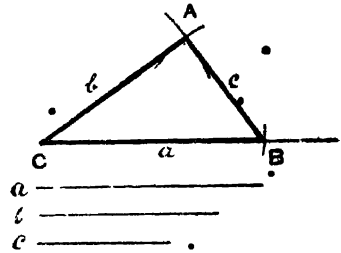
91. **সহজ ত্রিভুজ অঙ্কন :** ত্রিভুজ মাত্রেরই ছয়টি অঙ্গ থাকে। তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ ইহাদের কম পক্ষে তিনটি অঙ্গ প্রদত্ত থাকিলে ত্রিভুজটি অঙ্কন সম্ভব হয় বটে, কিন্তু ঐ উপাত্ত (Data)-র মধ্যে ত্রিভুজের একটি বাহু অবশ্যই থাকিবে। কারণ তিনটি প্রদত্ত কোণের পরিমাপ জানা থাকিলে অসংখ্য সদৃশকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায়। ত্রিভুজ অঙ্কনের উপযোগী সং নানাপ্রকার হইতে পারে। যেমন, (*a*) দুইটি বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণ (অন্তর্ভুক্ত কোণ না হইলে সম্ভব হইবে না)। (*b*) তিনটি বাহু। (*c*) দুইটি কোণ ও উহাদের সন্নিহিত বাহু। (*d*) দুইটি কোণ ও উহাদিগের যে কোনও একটির বিপরীত বাহু।

অনেক সময় উপাত্তগুলির সাহায্যে সাক্ষাৎ সম্বন্ধে ত্রিভুজের অঙ্কন সম্ভব হয় না, কিন্তু প্রদত্ত উপাত্তগুলির সাহায্যে কোনও [illegible] অঙ্কন সম্ভব হয়। নিম্নে ত্রিভুজ অঙ্কনের কয়েকটি প্রণালী দেওয়া হইল। [illegible] C তিনটি অক্ষর দ্বারা তিনটি কোণ ও *a*, *b* *c* দ্বারা [illegible] বিপরীত বাহুগুলি সূচিত করা হয়।

সম্পাদ্য 8

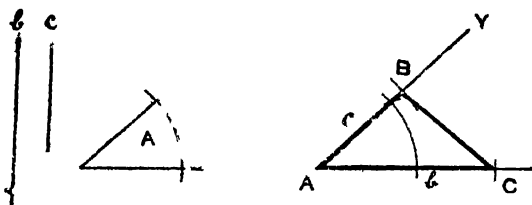
ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে করা যাউক *a*, *b*, *c* তিনটি বাহুর প্রদত্ত দৈর্ঘ্য। এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার তিনটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে *a*, *b*, *c*-র সমান।

অঙ্কন : *a* রেখার সমান করিয়া BC রেখা লওয়া হইল। C বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং *b* রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত হইল। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং *c* রেখার সমান ব্যাসার্ধ লইয়া

আর একটি চাপ অঙ্কিত হইল যাহা পূর্বের চাপকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB এবং AC যুক্ত করিলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে BC $=a$, CA $=b$, AB $=c$

সম্পাদ্য 9

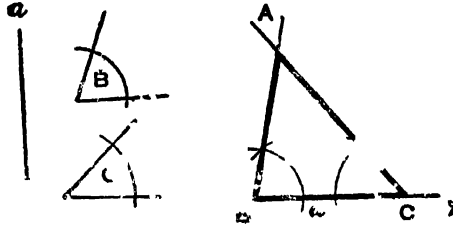
ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও উহাদের অন্তর্ভূক্ত কোণ দেওয়া আছে ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে করা যাউক, b এবং c, দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং উহাদের অন্তর্ভূক্ত কোণ A দেওয়া আছে। এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার দুইটি বাহু b ও c-র সমান এবং অন্তর্ভূক্ত কোণটি A কোণের সমান।

অঙ্কন : AX সরলরেখা হইতে b-র সমান AC অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। ∠A এর সমান করিয়া AC বাহুর A বিন্দুতে CAY কোণ অঙ্কিত করিয়া AY সরলরেখা হইতে c-র সহিত সমান AB অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। BC যুক্ত করিলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে AC $=b$, AB $=c$ এবং অন্তর্ভূক্ত ∠BAC $=$ ∠A

সম্পাদ্য 10

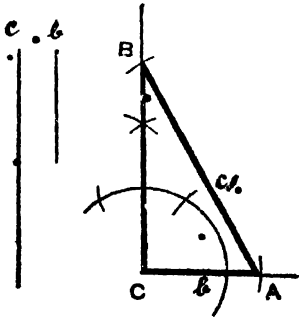
ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু প্রদত্ত আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে করা যাউক, B ও C দুইটি কোণ ও উহাদের সন্নিহিত সাধারণ বাহু a দেওয়া আছে। এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহা দুইটি কোণ B ও C কোণের সমান এবং সাধারণ সন্নিহিত বাহু a সরলরেখার সমান।

অঙ্কন : BX সরলরেখা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া লইয়া B বিন্দুতে ∠B-র সমান ∠ABC এবং C বিন্দুতে ∠C-র সমান করিয়া ∠ACB অঙ্কন করা হইল।

এক্ষণে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে ∠ABC = ∠B, ∠ACB = ∠C এবং সাধারণ বাহু BC = a.

সম্পাদ্য 11

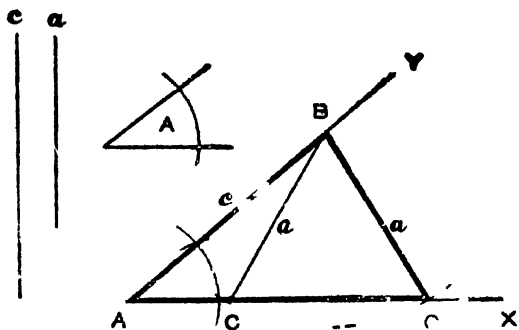
সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহু প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে করা যাউক, c সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং b একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। এরূপ একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার অতিভুজ c সরলরেখার সমান এবং অপর একটি বাহু b-র সমান।

অঙ্কন : CX সরলরেখা হইতে b রেখার সমান করিয়া CA অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। CA রেখার C বিন্দুতে CY লম্ব অঙ্কন করা হইল।

Aকে কেন্দ্র করিয়া C-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন করিলে উহা CB-কে B বিন্দুতে ছেদ করিল। BA যুক্ত করিলে ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজটি অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে ∠ACB এক সমকোণ, অতিভুজ AB = c এবং CA বাহু = b.

সম্পাদ্য 12

ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের একটি বাহুর বিপরীত কোণ প্রদত্ত আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে করা যাক c, a দুইটি বাহু এবং $\angle A$ একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার দুইটি বাহু c ও a সরলরেখার সমান এবং উহাদের যে কোন একটি বাহুর বিপরীত কোণ $\angle A$-র সমান।

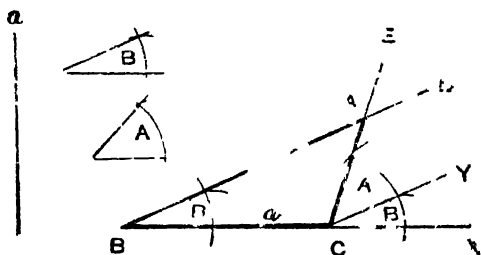
অঙ্কন: XAY কোণ A-র সমান করিয়া অঙ্কিত হইল। AY হইতে c-র সমান AB অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। B বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া a-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কিত করিলে উহা AX-কে C ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC এবং BC যুক্ত করিলে ABC ও ABC দুইটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে $\angle CAB = \angle A$, $AB = c$ এবং CB ও $CB = a$

দ্রষ্টব্য: B হইতে AX-র উপর লম্ব অপেক্ষা a-র দৈর্ঘ্য ক্ষুদ্রতর হইলে ত্রিভুজটি অঙ্কন অসম্ভব হইবে। a c-র সমান কিংবা বড়তর হইলে অথবা B হইতে AX-র উপর লম্বের সমান হইলে একটিমাত্র ত্রিভুজ হইবে। নতুবা দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে। সেইজন্য এই সম্পাদ্যটি ত্রিভুজ অঙ্কনের একটি দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র (Ambiguous case)।

সম্পাদ্য 13

ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং যে কোন একটি কোণের বিপরীত বাহু প্রদত্ত আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

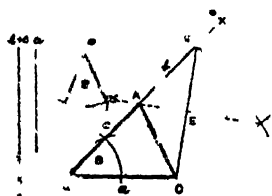
মনে করা যাউক A ও B দুইটি কোণ এবং উহাদের যে কোনও একটির বিপরীত বাহু a প্রদত্ত আছে। এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার দুইটি কোণ

B ও ∠A এর সমান এবং ∠A এর বিপরীত বাহু a-র সমান হয়।

অঙ্কন: BX সরলরেখা হইতে a রেখার সমান BC অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। BC সরল রেখার B ও C বিন্দুতে B-র সমান করিয়া ∠CBD ও ∠XCY অঙ্কন করা হইল। এক্ষণে CY বাহুর C বিন্দুতে ∠A-র সমান ∠YCE অঙ্কিত হইল। উহার CE বাহু BD রেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC এখন উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে ∠ABC = XCY কিন্তু ইহারা অনুরূপ কোণ বলিয়া AB ও CY সমান্তরাল। ∠BAC = একান্তর ∠ACY = প্রদত্ত ∠A অতএব ত্রিভুজটির ABC = ∠B, ∠BAC = ∠A এবং ∠BAC-র বিপরীত বাহু BC = a

অনুশীলনী 91

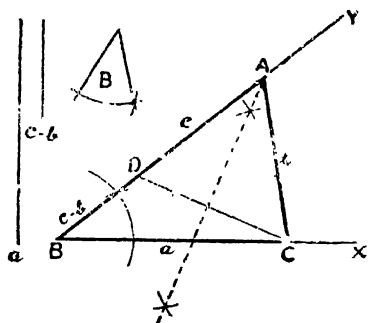
1 হইতে 22 পর্যন্ত ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ। কয়েকটি প্রশ্নের ইঙ্গিত দেওয়া হইল। বিশেষ নির্বচন, প্রমাণ প্রভৃতি নিজেরা দিবার চেষ্টা কর

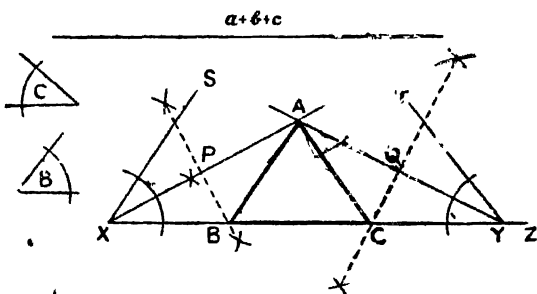
1 ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ, অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের সমষ্টি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [C U 1920, D. B 1918]

মনে করিলাম a ভূমি ∠B ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ, অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $b+c$ প্রদত্ত আছে। এরূপ ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে যাহার ভূমি a-র সমান, অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $b+c$-র সমান এবং ভূমির একটি কোণ ∠B-র সমান।

অঙ্কন: a-র সমান BC ভূমির B বিন্দুতে ∠CBX = ∠B-র সমান অঙ্কিত করা হইল। BX বাহু হইতে $b+c$-র সমান BD অংশ কাটিয়া CD যুক্ত করা হইল। CD-র লম্ব সমদ্বিখণ্ডক BDকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AC যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\because$ AE, DC সরলরেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, $\therefore$ AD = AC. AB + AC = AB + AD = BD = $b+c$, BC = A, এবং $\angle$ABC = $\angle$B. [অঙ্কনানুসারে]

2. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন একটি কোণ, অবশিষ্ট বাহুদ্বয়ের অন্তর প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

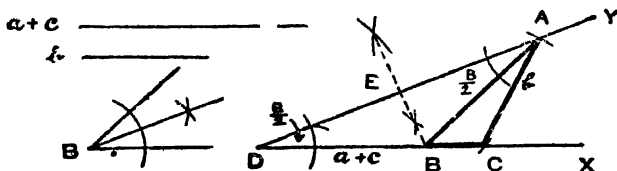
ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে ভূমি a-র সমান BC অংশ কাটিয়া উহার B বিন্দুতে $\angle$CBY = $\angle$B অঙ্কন করা হইল। BY হইতে $c-b$র সমান BD অংশ কাটিয়া CD যুক্ত করা হইল। CD-র লম্বসমদ্বিখণ্ডক BY-কে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AC যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\because$ AE, CDর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, AD = AC অতএব AB − AC = AB − AD = BD = $c-b$, এবং অঙ্কনানুসারে BC = a, এবং $\angle$ABC = $\angle$B.

3. ত্রিভুজের পরিসীমা ও ভূমি-সংলগ্ন দুইটি কোণ প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে। [C. U. '38, '45, '52, '56]

ইঙ্গিত : XZ সরল-রেখা হইতে $a+b+c$-র সমান XY অংশ কাটিয়া উহার X ও Y বিন্দুতে $\angle$SXY = $\angle$B এবং $\angle$TYX = $\angle$C অঙ্কন করা হইল। XA এবং YA সরলরেখা দ্বারা $\angle$SXY ও $\angle$TYXকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করিল। XA ও YA বাহুদ্বয়কে PB ও QC রেখা দ্বারা লম্ব-সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া ঐ দ্বিখণ্ডকদ্বয় XY-কে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে AB ও AC যুক্ত করিলে উদ্দিষ্ট ABC ত্রিভুজ হইল।

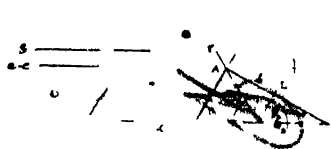
প্রমাণ : যেহেতু PB, AXএর লম্বদ্বিখণ্ডক, $\therefore$ AB = BX এবং $\angle$BAX = $\angle$BXA = $\frac{1}{2}\angle$BXS = $\frac{1}{2}\angle$B. এইরূপে AC = CY এবং $\angle$CAY = $\angle$CYA = $\frac{1}{2}\angle$AYC = $\frac{1}{2}\angle$C. $\therefore$ AB + BC + CA = BX + BC + CY = XY = $a+b+c$.

$\triangle$ ABCX-র বহিঃ $\angle ABC = \angle BAX + \angle BXA = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle B = \angle B$.
অনুরূপে $\angle ACB = \angle CAY + \angle CYA = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle C = \angle C$

4. ত্রিভুজের একটি কোণ, কোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের সমষ্টি এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

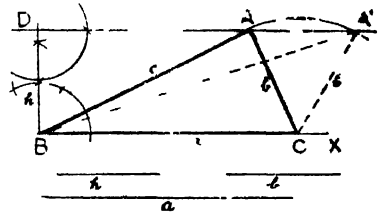
ইঙ্গিত ঃ DX সরলরেখা হইতে $a+c$-র সমান DC অংশ কাটিয়া D বিন্দুতে $\angle CDY = \frac{1}{2}\angle B$ অঙ্কন করা হইল। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া

একটি বৃত্তচাপ দ্বারা DY-কে A বিন্দুতে ছেদ করা হইল। AD রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক BE, DCকে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যোগ করা হইল ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ ঃ BE, AD-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, AB = BD এবং $\angle BAD = \angle BDA = \frac{1}{2}\angle B$. এক্ষণে $AB + BC = BD + BC = DC = a + c$ $\triangle$ ADB-র বহিঃকোণ $ABC = \angle BAD + \angle BDA = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle B = \angle B$ এবং অঙ্কনানুসারে $AC = b$

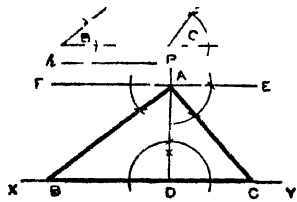
5 ত্রিভুজের একটি কোণ, ঐ কোণসংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অন্তর এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু প্রদত্ত আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

ইঙ্গিত ঃ CX সরলরেখা হইতে CD অংশ $a-c$-র সমান কাটিয়া D বিন্দুতে $\angle CDE = \angle B$-র সমান একটি কোণ অঙ্কিত হইল; $\angle CDE$-র সম্পূরক কোণ XDE-কে DY দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। c-কে কেন্দ্র করিয়া b-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ DY কে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ADকে PB দ্বারা লম্ব-সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া PB রেখা CX-কে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ ঃ BP, ADর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, AB = BD এবং $\angle BAD = \angle ADB$ এক্ষণে $BC - AB = BC - BD = CD = a - c$. $\angle ABC = 180° - \angle ADB - \angle BAD = 180° - 2\angle ADB = 180° - \angle BDE = \angle CDE = \angle B$

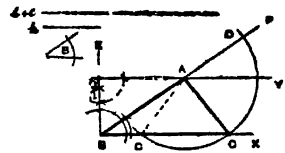
6. ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা এবং একটি বাহু প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

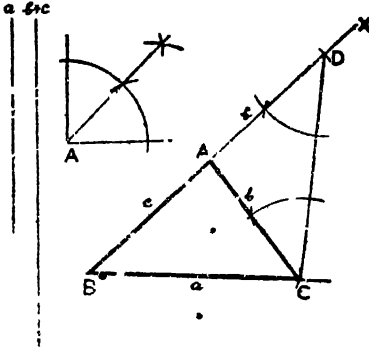
ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া B বিন্দুতে উহার উপর BD লম্ব অঙ্কন করা হইল। এই লম্ব BD হইতে h-র সমান BD অংশ কাটিয়া DY BX-র সমান্তরাল অঙ্কিত হইল। C-কে কেন্দ্র করিয়া b-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ DYকে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও BC এবং A B ও A C যুক্ত করিয়া ABC ও A′BC দুইটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে BC $= a$, AC বা AC′ $= b$ এবং ইহাদের উচ্চতা BD $= h$

7. ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং ঐ ভূমি সম্পর্কে উচ্চতা প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে। [C U '37, G. U, '49]

ইঙ্গিত : XY সরলরেখার যে কোন বিন্দুতে DP একটি লম্ব অঙ্কিত করিয়া উহা হইতে h-র সমান DA অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। A বিন্দুতে XY-র সমান্তরাল EAF রেখা অঙ্কিত হইল। EAC ∠C এবং ∠FAB = ∠B অঙ্কিত করিলে উহাদের AB ও AC বাহুদ্বয় XY সরলরেখাকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল

প্রমাণ EF∥BC, ∴ ∠ABC = একান্তর ∠FAB = ∠B এবং ∠ACB = একান্তর ∠EAC = ∠C, এবং AD $= h$

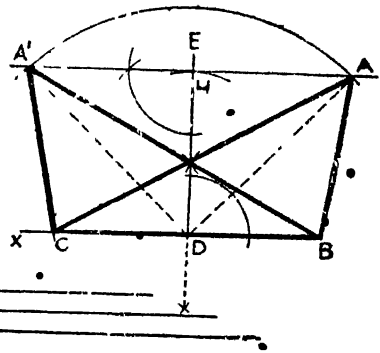
8 ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ, উন্নতি এবং ভূমি ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

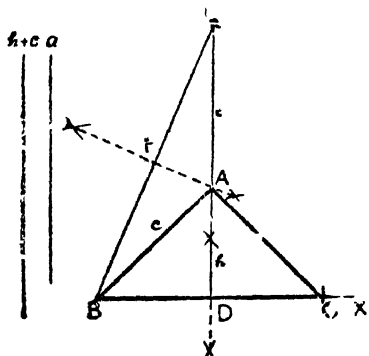
ইঙ্গিত : BX সরলরেখার B বিন্দুতে ∠B-র সমান ∠PBX-র BP বাহু হইতে $b + c$-র সমান BD অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। BX র B বিন্দুতে BE লম্ব হইতে h-র সমান BQ অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। Q বিন্দু হইতে BX-র সমান্তরাল QAY, BD বাহুকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। Aকে কেন্দ্র করিয়া AD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ BXকে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করিল। AC ও AC′ যুক্ত করিয়া ADC ও ABC′ দুইটি উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\angle ABC = \angle B$. $BQ = h$. ইহাই ত্রিভুজের উন্নতি। $BA + AC$ (বা AC') $= BA + AD = BD = b + c$.

9 ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষকোণ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে $b+c$-র সমান BD অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। $\angle A$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BD সরলরেখার D বিন্দুতে $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle A$ অঙ্কন করা হইল। B-কে কেন্দ্র করিয়া a-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ DC বাহুকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। DC বাহুর C বিন্দুতে $\angle DCA = \frac{1}{2} \angle A$ অঙ্কিত করিলে উহার CA বাহু BD সরলরেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : $\angle ADC$ $\angle ACD = \frac{1}{2}\angle A$, . $AD = AC$, ADC ত্রিভুজের বহিঃ $\angle BAC = \angle AD$ $+ \angle ACD = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle A = \angle A$ এবং $BA + AC = BA + AD = BD = b + c$. এবং অঙ্কনানুসারে BC a

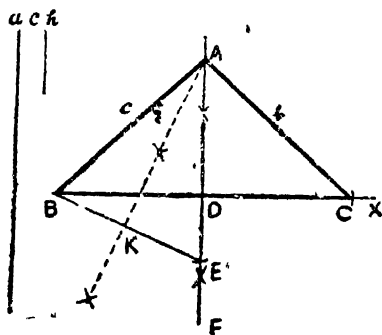
10 ত্রিভুজের ভূমি উন্নতি এবং ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমা প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া উহাকে DE দ্বারা লম্ব-সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। DE হইতে h-র সমান DH অংশ কাটিয়া H বিন্দুতে AHA′ সরলরেখা BC-র সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত হইল। এক্ষণে D-কে কেন্দ্র করিয়া m-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ AHA′ সরলরেখাকে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করিল। AB, AC, A′B এবং A′C যুক্ত করিয়া ABC ও A′BC ত্রিভুজদ্বয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $BC = a$. AD বা $A'D = m$ এবং উন্নতি $HD = h$

11 সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি, একটি সমান বাহু ও উন্নতির সমষ্টি প্রদত্ত আছে। একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে। [C. U. '42, D. B. '42]

ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া উহাকে DE রেখাদ্বারা লম্ব-সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। DE হইতে $h+c$-র সমান DE অংশ কাটিয়া BE যুক্ত করা হইল। BE-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক FA, DE-কে A বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ AF, BE-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক ∴ AE = BA, অতএব AB + উন্নতি AD = AE + AD = DE = $a+c$, এবং অঙ্কনানুসারে BC = a

12. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি, একটি সমান বাহু ও উন্নতির অন্তর প্রদত্ত আছে। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া উহাকে ADF সরলরেখা দ্বারা লম্ব-সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। DF হইতে $c-h$-র সমান DE অংশ কাটিয়া BE যুক্ত করা হইল। BE-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, AK বর্ধিত ED-কে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB ও AC যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : ∵ AK, BE-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, ∴ AB = AE. অতএব AB − উন্নতি AD = AE − AD = DE = $c-h$. অঙ্কনানুসারে BC = a. পুনরায় ∵ AD, BC-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক, ∴ AB = AC অতএব ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

13 সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও সমান দুই বাহুর একটির সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

ইঙ্গিত : DX সরলরেখা হইতে $a+c$-র সমান DC অংশ কাটিয়া উহার C বিন্দুতে $\angle DCA = 45^\circ$ কোণ অঙ্কিত হইল। D বিন্দুতে $\angle CDA = \frac{1}{2} \times 45^\circ = 22\frac{1}{2}^\circ$ কোণ অঙ্কিত করিয়া উভয় কোণের বাহুদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করিল। AD-র লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক DC-কে B বিন্দুতে ছেদ করিল। AB যুক্ত করিয়া ABC উদ্দি ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : BK, ADর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক। ∴ AB = BD, AB + BC = DB + BC = DC = $a+c$. ABD ত্রিভুজের বহিঃকোণ ABC = $\angle$DAB + $\angle$BDA $= 22\frac{1}{2}^\circ + 22\frac{1}{2} = 45^\circ$ এবং অঙ্কনানুসারে $\angle$ACB 45° অবশিষ্ট কোণ $\angle$BAC = 90 এবং AB = AC.

14 সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও সমকোণ ধারক বাহু দুইটির সমষ্টি প্রদত্ত আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে। [C U. 1922]

ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে $b+c$-র সমান BD অংশ কাটিয়া উহার D বিন্দুতে $\angle BDC = 45^\circ$ অঙ্কিত হইল B কে কেন্দ্র করিয়া a-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ DC বাহুকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। DC রেখার EA লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক BDর সহিত A বিন্দুতে মিলিত হইল। AC ও BC যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : AE, DCর লম্ব-দ্বিখণ্ডক বলিয়া AC = AD এবং $\angle ADC = \angle ACD = 45^\circ$. $\triangle$ADCর বহিঃ $\angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$. AB + AC = AB + AD = BD = $b+c$.

15. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও সমকোণ ধারক বাহু দুইটির অন্তর প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে। [C U. 1876]

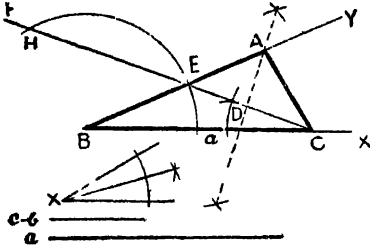
ইঙ্গিত : BX সরলরেখা হইতে $c-b$-র সমান BD অংশ কাটিয়া উহার D বিন্দুতে $\angle XDC = 45°$ অঙ্কিত হইল। B-কে কেন্দ্র করিয়া a-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ DC বাহুকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। C হইতে BX এর উপর CA লম্ব অঙ্কিত হইল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : সমকোণী ত্রিভুজ DAC-র $\angle ADC = 45$. $\therefore$ $\angle DCA = 45°$. অতএব $CA = AD$. এক্ষণে $BA - CA = BA - DA = BD = c - b$. অঙ্কনানুসারে অতিভুজ $BC = a$. $\angle CAB = 90$.

16. ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণের অন্তর ও অপর বাহু দুইটির সমষ্টি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

ইঙ্গিত : BX হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া উহার C বিন্দুতে $\angle BCF = \frac{1}{2}\angle X$ অঙ্কিত করা হইয়াছে। CF বাহুর উপর C বিন্দুতে $\angle FCY = 90°$ অঙ্কিত করা হইল। B-কে কেন্দ্র করিয়া $b+c$-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ CY বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। AP, CD-র লম্বদ্বিখণ্ডক BD-কে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AC যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : AP, CD-র লম্বদ্বিখণ্ডক। $\therefore$ $AD = AC$ .. $AB + AC = AB + AD = BD = b + c$. সমকোণী ত্রিভুজ DCE-র মধ্যে $\angle AED = \angle ADC$ এর পূরক $= \angle HCD$-র পূরক $= \angle ACE$. $\therefore$ $\angle ACB - \angle ABC = \angle ACE + \angle$ $- \angle ABC = \angle AEC + \angle \frac{X}{2} - \angle ABC = \angle EBC + \angle \frac{X}{2} + \angle \frac{X}{2} - \angle ABC$ $= \angle \frac{X}{2} + \angle \frac{X}{2} = \angle X$ এবং $BC = a$.

17. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে। [C U. '39, 41, D, B. 41]

ইঙ্গিত : BX হইতে a-র সমান BC অংশ কাটিয়া উহার C বিন্দুতে $\angle BCF = \frac{1}{2} \angle X$ অঙ্কিত করা হইয়াছে। B-কে কেন্দ্র করিয়া $c-b$-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ CF কে E ও H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। BE যুক্ত করিয়া Y পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। CE-র লম্বদ্বিখণ্ডক BY-কে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AC যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : AD, CE-র লম্বদ্বিখণ্ডক। AC = AE অতএব $AB - AC = AB - AE = BE = c - b$ $\angle AEC = \angle ACE$ $\triangle BEC$র বহিঃ $\angle AEC = \angle BCE + \angle EBC$ $\angle ACB - \angle ABC = \angle ACE + \angle BCE - \angle EBC = \angle AEC + \angle \frac{X}{2} - \angle EBC = \angle EBC + \angle \frac{X}{2} + \angle \frac{X}{2} - \angle EBC = \angle \frac{X}{2} + \angle \frac{X}{2} = \angle X$; এবং অঙ্কনানুসারে $BC = a$

18 ত্রিভুজের একটি বাহু, ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং শীর্ষবিন্দু হইতে উন্নতি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

ইঙ্গিত : h উন্নতির সমান AP রেখার P বিন্দুতে BPC লম্ব অঙ্কিত করা হইল। A-কে কেন্দ্র করিয়া c-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ অঙ্কন করিলে উহা CB-কে B বিন্দুতে ছেদ করিল। $\frac{1}{2} \angle X$র সমান করিয়া $\angle PAY$ অঙ্কিত করিয়া $\angle BAY$ র সমান YAC কোণের একটি বাহু BCকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে $AB = c$. এবং $AP = h$.

$\angle ACB - \angle ABC = 90° - \angle CAP - 90° + \angle BAP = \angle BAP - \angle CAP$
$= \angle BAY + \angle PAY - \angle CAY + \angle PAY = \angle BAY + \angle PAY - \angle BAY +$
$\angle PAY = 2\angle PAY = 2[\frac{1}{2}\angle X] - \angle X.$

19. সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু, অতিভুজ ও আর একটি বাহুর অন্তর প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

ইঙ্গিত : DX সরলরেখা হইতে DB অংশ $b-c$র সমান করিয়া লইয়া উহার উপর B বিন্দুতে BY লম্ব অঙ্কিত করা হইল। a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লইয়া DC যুক্ত করা হইল। $\angle BDC$-র সমান করিয়া $\angle DCA$ অঙ্কিত করা হইল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

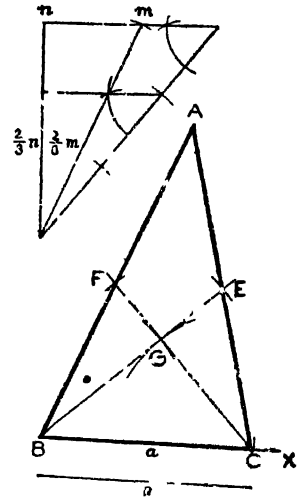
প্রমাণ : $\angle DCA = \angle ADC$
∴ $AC = AD$ ∴ $AC - AB = AD$. $AB = BD - b - c$ এবং অঙ্কনানুসারে $BC = a$ ∠$ABC = 90$

20. ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তৃতীয় বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা প্রদত্ত আছে ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে [D. B 1950]

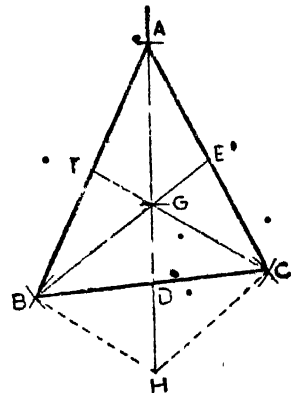
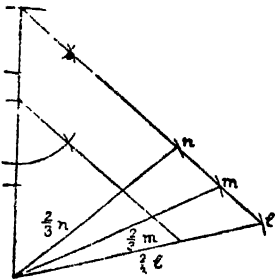
ইঙ্গিত : $AE = 2m$-র সমান একটি বাহুর A-কে কেন্দ্র করিয়া bর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ এবং E-কে কেন্দ্র করিয়া cর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ পূর্বের বৃত্তচাপকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। AC যুক্ত করা হইল এবং CD যুক্ত করিয়া উহাকে CDর সমান করিয়া B পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। AB যুক্ত করিয়া ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল। [প্রমাণ কর]

21. ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপর দুই বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দুইটি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[C.U. '42, G.U. '48, D.B. '49]

ইঙ্গিত: BX হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। B-কে কেন্দ্র করিয়া $\frac{2}{3}m$-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া $\frac{2}{3}n$-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ পূর্বের বৃত্তচাপকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। $BGE = m$ এবং $CGF = n$-র সমান করিয়া বর্ধিত হইল। BF ও CE যুক্ত করিয়া বর্ধিত করা হইল, উহারা A বিন্দুতে ছেদ করিল। ABC উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ: ত্রিভুজের মধ্যমা $\frac{2}{3}$ অংশে ছেদ করে। ∴ $BG = \frac{2}{3}m$ ও $GC = \frac{2}{3}n$ ∴ G ভরকেন্দ্র। $BGE = m$ ও $CGF = n$ ∴ E ও F, AC ও AB-র মধ্যবিন্দু। $BC = a$ (অঙ্কন)।

22 ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য প্রদত্ত আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে। [C.U '40, W.B.S.F. '53]

ইঙ্গিত: $\frac{2}{3}l$, $\frac{2}{3}m$, $\frac{2}{3}n$-র সমান বাহু লইয়া CGBH সামান্তরিক অঙ্কন করা হইল। উহার কর্ণদ্বয় BC ও HG যুক্ত করিয়া HGকে HGর সমান করিয়া A পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল। AB ও AC যুক্ত করিয়া উদ্দিষ্ট ত্রিভুজটি গঠিত হইল।

প্রমাণ উপপাদ্য 30র সাহায্যে করা যায়

23. কোন ত্রিভুজের বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী একটি বিন্দু নির্ণয় কর। [W. B. S. F 1957]

24 অতিভুজ এবং সমকৌণিক বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্ব প্রদত্ত আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

25. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুগুলির অবস্থান প্রদত্ত আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [B. U 1906, B U. 1885]

26. সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা প্রদত্ত আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

27. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর সমষ্টি এবং তৃতীয় বাহু প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

28. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ এবং উন্নতি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [C U. 1951]

29 সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষ কোণ প্রদত্ত আছে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [W B S. F. 1957]

30. ত্রিভুজের ভূমি, উন্নতি এবং অপর একটি বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

31. ত্রিভুজের ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর, শিরঃকোণ এবং দুইটি বাহুর সমষ্টি প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

[ইঙ্গিত : BCD একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যাহার $\angle D = \frac{1}{2}$ শিরঃকোণ, $\angle B = 90^\circ +$ (ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর) এবং CD বাহুদ্বয়ের সমষ্টি।]

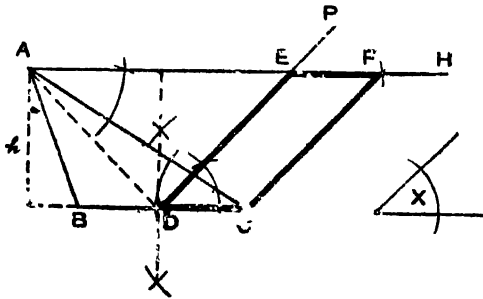
32. ত্রিভুজের শীর্ষকোণ, দুইটি বাহুর সমষ্টি এবং ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা প্রদত্ত আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

10

ক্ষেত্রফল সম্পর্কীয় সম্পাদ্য

10·1. ক্ষেত্রফল সম্পর্কীয় উপপাদ্য হইতে জানা যায় যে, একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত কিংবা একই উন্নতি বিশিষ্ট ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল সমান এই সম্পর্কে কয়েকটি সম্পাদ্য আলোচনা করা হইবে।

সম্পাদ্য 14

এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান এবং একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান।

মনে করা যাউক ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং ∠X একটি নির্দিষ্ট কোণ এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান এবং একটি কোণ ∠X কোণের সমান।

অঙ্কন : BC কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। D বিন্দুতে ∠X এর সমান CDP কোণ অঙ্কিত করা হইল A বিন্দু হইতে BC-র সমান্তরাল AH সরলরেখা অঙ্কিত করিলে উহা DP কে E বিন্দুতে ছেদ করিল EH হইতে DC-র সমান EF অংশ কাটিয়া CF যুক্ত করা হইল। এক্ষণে DCFE নির্ণেয় সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ : AD যুক্ত করা হইল।

DC ও EF সমান ও সমান্তরাল, সুতরাং DCFE একটি সামান্তরিক।

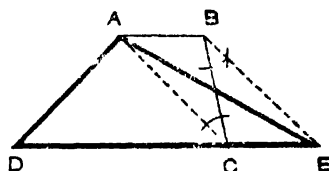
যেহেতু একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় DC ও AH-র মধ্যে অবস্থিত, সুতরাং সামান্তরিক DCFE = 2△ADC।

পুনরায় △ ABD ও △ ADC সমান ভূমি BD ও DC-র উপর এবং একই উন্নতি *h* বিশিষ্ট বলিয়া উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

∴ △ ABC = 2△ADC। অতএব সামান্তরিক DCFE ও △ ABC-র ক্ষেত্রফল সমান এবং সামান্তরিকের ∠EDC = ∠X.

অনুসিদ্ধান্ত : একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

সম্পাদ্য 15

একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজেব সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে করা যাউক ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ। ইহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

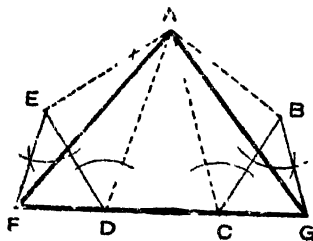
অঙ্কন : AC যুক্ত করা হইল। B বিন্দু হইতে AC-র সমান্তরাল BE সরলরেখা বর্ধিত DC-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। AE যুক্ত করা হইল। এক্ষণে ADE অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : একই ভূমি AC ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AC ও BE র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া △ABC ও △AEC-র ক্ষেত্রফল সমান।

উভয় পক্ষে △ADC যোগ করা হইল।

∴ △ABC + △ADC = △AEC + △ADC, অর্থাৎ চতুর্ভুজ ABCD = △ADE

সম্পাদ্য 16

একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রেব সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

মনে করা যাক ABCDE একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্র (মনে করা যাক পঞ্চভুজ)। ইহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AC ও AD যুক্ত করা হইল। B বিন্দু হইতে AC-র সমান্তরাল BG এবং E বিন্দু হইতে AD-র সমান্তরাল EF সরলরেখাদ্বয় বর্ধিত DC-কে যথাক্রমে G ও F বিন্দুতে ছেদ করিল। AG ও AF যুক্ত করা হইলে AFG অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : একই ভূমি AC এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AC ও BG র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ত্রিভুজ ABC ও ত্রিভুজ AGC র ক্ষেত্রফল সমান। অনুরূপে ত্রিভুজ ADE ও ত্রিভুজ AFD-র ক্ষেত্রফল সমান। কারণ ইহারাও একই ভূমি AD ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AD ও EF-এর মধ্যে অবস্থিত।

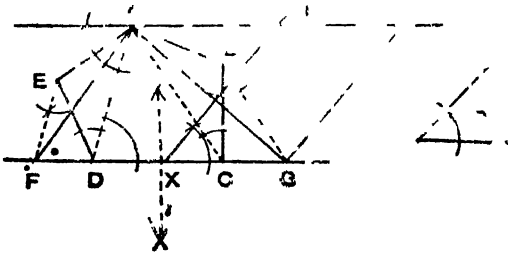
$\triangle ADE + \triangle ABC = \triangle AFD + \triangle AGC$ উভয়পক্ষে $\triangle ADC$ যুক্ত করা হইল

সুতরাং $\triangle ADE + \triangle ADC + \triangle ABC = \triangle AFD + \triangle ADC + \triangle AGC$

অর্থাৎ পঞ্চভুজ ABCDE = ত্রিভুজ AFG.

অনুশীলনী

1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।

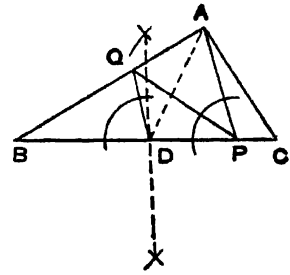
1 এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সমান এবং যাহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান।

মনে করা যাউক ABCDE একটি ঋজুরেখ ক্ষেত্র এবং P একটি নির্দিষ্ট কোণ এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল ABCDE-র ক্ষেত্রফলের সমান এবং যাহার একটি কোণ $\angle P$-র সমান।

অঙ্কন : ABCDE ঋজুরেখক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট $\triangle AFG$ অঙ্কিত করা হইল। [সম্পাদ্য 16] $\triangle AFG$-এর সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট ▭XGKH অঙ্কিত করা হইল যাহার $\angle HXG = \angle P$.

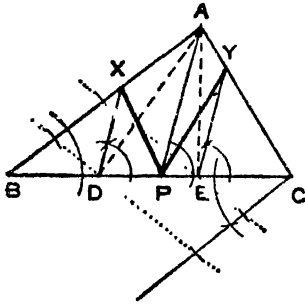
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে ABCDE ক্ষেত্র $= \triangle AFG =$ সামান্তরিক XGKH.

2. ত্রিভুজের যে-কোন বাহুর উপরিস্থ কোন বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে। [C U '34, '39, W. B. S F 1955]

মনে করা যাউক $\triangle ABC$-র BC বাহুর উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া $\triangle ABC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AP যুক্ত করা হইল। BC বাহুকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া AP-র সমান্তরাল DQ সরলরেখা AB-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQ যুক্ত করিলে PQ সরলরেখা ABC ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ : AD যুক্ত করা হইল। △AQD ও △PQD একই ভূমি DQ এবং একই সমান্তরাল DQ ও AP র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া △AQD = △PQD

∴ △PQD + △BDQ = △AQD + △BDQ. অর্থাৎ △PQB = △ABD = $\frac{1}{2}$△ABC.

3 ত্রিভুজের যে-কোন বাহুর উপরিস্থ কোন বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে। [C. U. 1936, '29, '43]

মনে করা যাউক △ABC-র BC বাহুর উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ABC-কে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

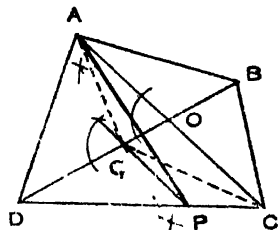
অঙ্কন : AP যুক্ত করা হইল। BC-কে D ও E বিন্দুতে ত্রিখণ্ডিত করা হইল। D ও E বিন্দু হইতে PA-র ‖ DX ও EY সরলরেখাদ্বয় AB ও AC কে যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিল। PX ও PY যুক্ত করিলে ইহারা ABC ত্রিভুজকে সমত্রিখণ্ডিত করিবে।

প্রমাণ : একই ভূমি DX-এর উপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত △DPX = △ADX ∴ △DPX + △BDX = △ADX + △BDX অর্থাৎ △BPX = △ABD = $\frac{1}{3}$△ABC. কারণ BD = $\frac{1}{3}$BC. এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে △CPY = $\frac{1}{3}$ △ABC.

∴ অবশিষ্ট চতুর্ভুজ AXPY = $\frac{1}{3}$△ABC.

4. চতুর্ভুজের কোন কৌণিক বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে। [C. U. 1934, '37, W.B.S F.'54, G.U. '51,'54]

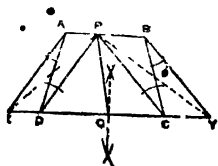
মনে করা যাউক ABCD একটি চতুর্ভুজ। ইহার কোন শীর্ষবিন্দু (এখানে A বিন্দু) হইতে সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : কর্ণ AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। BC-র মধ্যবিন্দু Q হইতে AC-র সমান্তরাল QP, CD-কে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AP যুক্ত করিলে AP, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ : AQ ও CQ যুক্ত করা হইল। একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় AC ও PQ র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া $\triangle APC = \triangle AQC$.

অতএব $\triangle APC + \triangle ABC = \triangle AQC + \triangle ABC$.

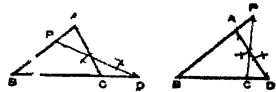
চতুর্ভুজ ABCP = চতুর্ভুজ AQCB = $\triangle AQB + \triangle CQB = \frac{1}{2} \triangle ABD + \frac{1}{2} \triangle CBD = \frac{1}{2}$ চতুর্ভুজ ABCD. ∴ AP সরলরেখা চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

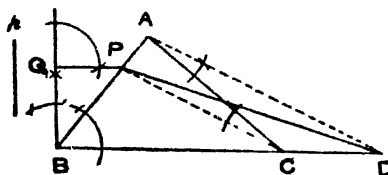
5. চতুর্ভুজের যে-কোন বাহুর উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা টানিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে। [C U. 1941, 1949]

মনে করা যাউক ABCD একটি চতুর্ভুজের AB বাহুর উপর P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। P বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : PD ও PC যুক্ত করিয়া A বিন্দু হইতে PD-র সমান্তরাল AX সরলরেখা বর্ধিত CD-কে X বিন্দুতে ছেদ করিল। B বিন্দু হইতে PC-র সমান্তরাল BY সরলরেখা বর্ধিত DC-কে Y বিন্দুতে ছেদ করিল। PX ও PY যুক্ত করিয়া PXY ত্রিভুজের XY বাহুকে Q বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। PQ, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করিল।

প্রমাণ : একই ভূমি PD এবং একই সমান্তরাল PD ও AX সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া $\triangle APD = \triangle AXD$, তদ্রূপ $\triangle PCY = \triangle PBC$. ∴ $\triangle AXD + \triangle PCY = \triangle PAD + \triangle PBC$. ∴ $\triangle AXD + \triangle PCD + \triangle PCY = \triangle PAD + \triangle PCD + \triangle PBC$. অর্থাৎ $\triangle PXY =$ চতুর্ভুজ ABCD. PQ $\triangle PXY$-র মধ্যমা বলিয়া PQ, $\triangle PXY$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অতএব ইহা চতুর্ভুজকেও সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

6. একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

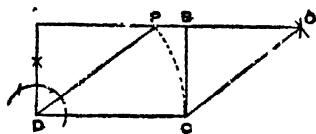
ইঙ্গিত : BC ভূমি অপেক্ষা BD ভূমি বৃহৎ বা ক্ষুদ্র হইতে পারে। BC বা বর্ধিত BC হইতে নির্দিষ্ট ভূমির সমান BD অংশ কাটিয়া AD যুক্ত করা হইল। C বিন্দু হইতে AD-র সমান্তরাল CP রেখা BA বা বর্ধিত BAকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। DP যুক্ত করিয়া △DPB ত্রিভুজ অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : একই ভূমি CP এবং একই সমান্তরাল CP ও AD-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া △DPC = △ACP. △BPD △BPC + △DPC = △BPC + △ACP = △ABC

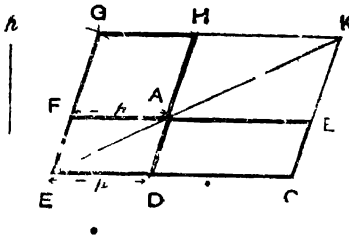
7 কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া কোন নির্দিষ্ট উন্নতি বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ইঙ্গিত : BC রেখার B বিন্দুতে লম্ব অঙ্কন করিয়া p-র সমান BQ অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। BC-র সমান্তরাল QP, AB-কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। P, ABC ত্রিভুজের উন্নতি অপেক্ষা বৃহৎ হইলে BA-কে বর্ধিত করিলে QP, BA-কে ছেদ করিবে। CP যুক্ত করিয়া CP-র সমান্তরাল AD সরলরেখা BC-কে কিংবা বর্ধিত BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করিল। DP যুক্ত করিয়া BFD অভীষ্ট ত্রিভুজ হইল।

প্রমাণ : একই ভূমি PC ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় PC ও AD-র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া △PCD = △APC, ∴ △PCD + △BPC = △APC + △BPC অর্থাৎ △PBD = △ABC এবং △BPD-র উন্নতি BQ = p.

8 কোন নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এমন একটি রম্বস অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুর সমান।

[C U 1933, '35, '50]

ইঙ্গিত : D কে কেন্দ্র করিয়া DC-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ AB-কে P বিন্দুতে ছেদ করিল। C-কে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ বর্ধিত AB-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। CQ ও PD যুক্ত করিলে PQCD অভীষ্ট রম্বস হইবে।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে PQ=DC=CQ=DP. ∴ PQCD একটি রম্বস। একই ভূমি DC ও একই সমান্তরাল DC ও AQ র মধ্যে অবস্থিত বলিয়া PQCD রম্বসের ক্ষেত্রফল ABCD আয়তক্ষেত্রের সমান।

9 একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান। [C U. 1944]

ইঙ্গিত : CD-কে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশ হইতে p-র সমান DE অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। EA-কে যুক্ত করিয়া বর্ধিত করা হইল যাহা বর্ধিত CB-কে K বিন্দুতে ছেদ করে। ECKG সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করা হইল এবং BA ও DA কে বর্ধিত করিয়া GE ও GK কে যথাক্রমে F ও H বিন্দুতে ছেদ করিল। এক্ষণে GHAF অভীষ্ট সামান্তরিক হইল।

প্রমাণ : EK কর্ণ ▱ECKG কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। ∴ △GKE= △CKE তদ্রূপ △AHK = △ABK এবং △AFE = △ADE ∴ ▱GHAF + △AHK + △AFE = ▱ABCD + △ABK + △ADE অতএব ▱GHAF= ▱ABCD এবং FA = ED = p

দ্রষ্টব্য DF ও HB সামান্তরিকদ্বয় EK কর্ণের সহিত মিলিত হইয়াছে, সেইজন্য উহাদের **কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক** (Parallelograms about the diagonal) বলে। AG ও AC সামান্তরিক দুইটিকে DF ও BH-এর **পূরক** (Complements) বলে।

10 একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান দীর্ঘ হইবে।

11 একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু ও একটি কোণ যথাক্রমে কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার ও কোণের সমান হয়।

12 একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি বাহু ও একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য ও নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে। [C U 1944]

13 একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান করিয়া কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে। [C. U 1946]

14. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের আয়তনের সমান এরূপ একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার সন্নিহিত দুইটি বাহু দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান দীর্ঘ হয়।
[C. U. 1949

15 কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ভূমি নির্দিষ্ট এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ একটি নিদিষ্ট কোণের সমান হইবে।

16. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সরলরেখা টানিয়া একটি সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

17 দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান এরূপ একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান হইবে।

18 একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে এবং ইহা হইতে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র বাহির করিতে হইবে।
[D B. 1950

19 দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তরের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

20 কোন বর্গক্ষেত্রের বাহুর উপর উহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

21 নির্দিষ্ট উন্নতি বিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার ক্ষেত্রফল কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

22 দুইটি সমবাহু ত্রিভুজের অন্তরের সমান একটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

23 একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

24 কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের মধ্যে অপর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্র অন্তর্লিখিত করিতে হইবে।

25 এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে যাহার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল যথাক্রমে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

26. একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমান দুইটি বাহু লইয়া একটি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

উত্তরমালা : অনুশীলনী 2·5 (পৃষ্ঠা 22-23)

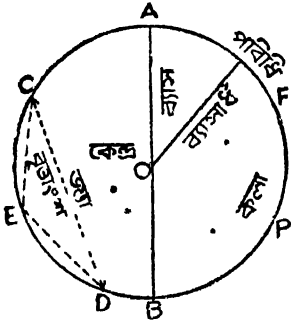
6. *(a)* 720, *(b)* 1080°, *(c)* 1440°, *(d)* 1800°, *(e)* 4140°, 7. *(a)* 4, *(b)* 7, *(c)* 5, *(d)* 15. 8. 15. 9 4 10. 20 12. 10. 13. 3. 14. 12. 15. 60°, 120°, 120°, 120°, 120°, 16 18. 17 16. 18. 5, 9.

[দশম শ্রেণীর পাঠ্য]

1

বৃত্ত

Circle

1 1 **সংজ্ঞা :** সমতলের উপরে কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা সমান দূরে থাকিয়া যদি কোন বিন্দু বিচরণ করে তবে ঐ চলমান বিন্দুটি যে বক্ররেখা নির্দিষ্ট বিন্দুর চতুর্দিকে অঙ্কিত করিবে, সেই বক্ররেখা বেষ্টিত সামতলিক ক্ষেত্রকে **বৃত্ত** (Circle) বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) এবং বক্ররেখাকে বৃত্তের **পরিধি** (Circumference) বলে। সংক্ষিপ্তভাবে বৃত্ত বলিলে বৃত্তের পরিধিকেই বুঝায়। চিত্রে O কেন্দ্র

এবং ACEDBPF পরিধি।

1 2 বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত সকল সরলরেখাকে **ব্যাসার্ধ** (Radius বহুবচনে Radii) বলে। OF একটি ব্যাসার্ধ। ইহা ব্যাসের অর্ধাংশ।

1 3 যে সকল সরলরেখা বৃত্তের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যায় এবং পরিধি পর্যন্ত সীমাবদ্ধ তাহাদের **ব্যাস** (Diameter) বলে। AB একটি ব্যাস। ইহা ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ।

1 4 বৃত্তের পরিধির উপর যে কোনও দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে **জ্যা** (Chord) বলে। CD একটি জ্যা।

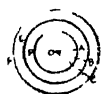
1 5 ব্যাস বৃত্তকে সর্বসম দুইটি অংশে বিভক্ত করে। ব্যাস ও ব্যাস দ্বারা কর্তিত পরিধির অর্ধাংশ দ্বারা বেষ্টিত সামতলিক ক্ষেত্রকে **অর্ধবৃত্ত** (Semi-circle) বলে। AFPB অর্ধবৃত্ত।

1 6 পরিধির যে কোনও অংশকে চাপ (Arc) বলে CED একটি চাপ। পরিধির অর্ধাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর চাপকে **অধিচাপ** (Major arc) এবং উহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অংশকে **উপচাপ** (Minor arc) বলে CAFPBD অধিচাপ এবং CED উপচাপ। অধিচাপ ও উপচাপ একত্রে পরিধির সহিত সমান হইলে উহারা পরস্পর **অনুবন্ধী চাপ** (Conjugate arc) হয়।

1 7 জ্যা এবং জ্যা-দ্বারা ছিন্ন পরিধির অংশ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তাংশ** (Segment of a circle) বলে। CDE একটি বৃত্তাংশ। অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর অংশকে **অধিবৃত্তাংশ** (Major segment) এবং ক্ষুদ্রতর অংশকে **উপবৃত্তাংশ** (Minor segment) বলে।

1 8 দুইটি ব্যাসার্ধ এবং উহাদের দ্বারা ছিন্ন পরিধির অংশ দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা** (Sector of a circle) বলে। OBPF একটি বৃত্তকলা। দুইটি ব্যাসার্ধের অন্তর্ভুক্ত কোণকে **বৃত্তকলার কোণ** (Angle of a sector) বলে। ∠BOF বৃত্তকলার কোণ।

1 9 জ্যা-এর প্রান্ত বিন্দু দুইটি বৃত্তাংশের চাপের যে কোন বিন্দুর সহিত যুক্ত করিয়া যে কোণ উৎপন্ন হয় তাহাকে **বৃত্তাংশস্থ কোণ** (Angle in a segment) বলে। ∠CED বৃত্তাংশস্থ কোণ।

1 10 একই কেন্দ্র ও বিভিন্ন ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তগুলিকে **এককেন্দ্রিক** বা **সমকেন্দ্রিক** (Concentric) বৃত্ত বলে। নিম্নের চিত্রে তিনটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের একই কেন্দ্র O এবং তিনটি ভিন্ন ব্যাসার্ধ OA, OB, OC.

1 11 যদি কতিপয় বিন্দুর উপর দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে ঐগুলিকে **বৃত্তস্থ** বা **সমবৃত্ত** (Concyclic) বিন্দু বলে।

1 12 যে ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সকল কৌণিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় তাহাকে **বৃত্তস্থ ক্ষেত্র** (Cyclic) বলে, এবং বৃত্ত সম্পর্কে ক্ষেত্রটিকে বৃত্তের অন্তর্লিখিত (Inscribed) এবং ক্ষেত্র সম্বন্ধে বৃত্তটিকে ক্ষেত্রের **পরিলিখিত বৃত্ত** (Circumscribed Circle) বা **পরিবৃত্ত** (Circum-circle) বলে, এবং কেন্দ্রকে **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) এবং ব্যাসার্ধকে **পরিব্যাসার্ধ** (Circum-radius) বলে।

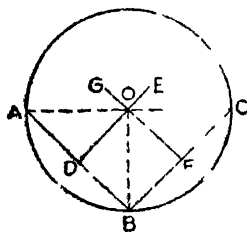
1 13. যে বৃত্ত কোনও ঋজুরেখ ক্ষেত্রের সকল বাহুকে স্পর্শ করে, সেই বৃত্তকে **অন্তর্বৃত্ত** (Inscribed Circle বা In-circle) বলে এবং ইহার কেন্দ্রটিকে অন্তর্কেন্দ্র (In-centre) এবং ব্যাসার্ধকে **অন্তর্ব্যাসার্ধ** (In-radius) বলে। ক্ষেত্রটিকে বৃত্তের **পরিলিখিত** (Circumscribed about the circle) বলে।

1 14. কোন ছেদক সরলরেখা বরাবর কোন জ্যামিতিক ক্ষেত্রকে ভাঁজ করিলে যদি ঐ সরলরেখার এক পার্শ্বের অংশ অপর পার্শ্বের সহিত সম্পূর্ণভাবে মিলিয়া

যায়, তবে এই ক্ষেত্রটিকে ঐ সরলরেখার উভয় পার্শ্বে **প্রতিসম** Symmetrical ›bout the straight line) এবং ঐ সরলরেখাকে **প্রতিসাম্য অক্ষ** (Axis of symmetry) বলে। বৃত্তের ব্যাস বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ

15 জ্যা বিষয়ক উপপাদ্য :

উপপাদ্য 1

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে এইরূপ যে কোন তিনটি বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত এবং একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

মনে করা যাউক একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে A, B ও C তিনটি বিন্দু

প্রমাণ করিতে হইবে যে A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়া একটি বৃত্ত এবং কেবলমাত্র একটিই বৃত্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে।

অঙ্কন : AB ও BC যুক্ত করিয়া, AB-র লম্বদ্বিখণ্ডক DE এবং BC-র লম্বদ্বিখণ্ডক FG অঙ্কিত করা হইল।

প্রমাণ : AB ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে বলিয়া AB ও BC-র লম্বদ্বিখণ্ডক DE ও FG সমান্তরাল হইতে পারে না। সুতরাং DE ও FG বর্ধিত হইলে অবশ্যই কোন একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। মনে করা যাউক উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। OA, OB এবং OC যুক্ত করা হইল।

এক্ষণে যেহেতু DE AB-র লম্বদ্বিখণ্ডক, সুতরাং DE-র উপর সকল বিন্দুই A ও B হইতে সমদূরবর্তী। O বিন্দু DE-র উপর অবস্থিত বলিয়া OA = OB

পুনরায়, GF, BC-র লম্বদ্বিখণ্ডক এবং O, GF-র উপর অবস্থিত, সুতরাং ঐ একই কারণে OB = OC

অতএব OA = OB = OC অর্থাৎ DE ও FG-র সাধারণ O ছেদবিন্দু A B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

সুতরাং O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OB-কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা B ও C-র মধ্য দিয়া অবশ্যই যাইবে।

যেহেতু DE ও FG সরলরেখা দুইটি কেবলমাত্র একটি বিন্দু O-তে ছেদ করিবে, সুতরাং O ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী হইতে পারে না। অতএব A, B ও C দিয়া কেবলমাত্র একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্ত 1 যে সকল বৃত্তের পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু সাধারণ তাহারা পরস্পর সমপাতিত হয়

কারণ এ তিনটি বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 2 দুইটি বৃত্ত দুই-এর অধিক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিতে পারে না।

কারণ তৃতীয় বিন্দুতে ছেদ করিলে বিন্দুর মধ্য দিয়া দুইটি বৃত্ত যাইবে, ইহা অসম্ভব। অসম্ভব

অনুসিদ্ধান্ত 3 যে কোন ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।

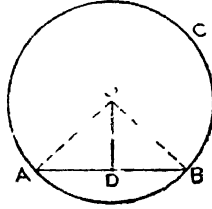
যেহেতু ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটি কখনও একই সরলরেখায় অবস্থিত হইতে পারে না, অতএব একটি মাত্র বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 1 সমান বৃত্তে (বা একই বৃত্তে) সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট জ্যাসমূহ যে চাপগুলি ছিন্ন করে তাহারা সমান। একটির অধিচাপ ও উপচাপ যথাক্রমে অপর বৃত্তসমূহের অধিচাপ ও উপচাপের সমান হইবে। সমান জ্যাগুলি কেন্দ্রে যে সকল সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে তাহারাও সমান হইবে।

স্বীকৃত সিদ্ধান্ত 2 সমান বৃত্তে (বা একই বৃত্তে) চাপসমূহ সমান হইলে ঐ চাপগুলির উপরে অবস্থিত জ্যাগুলিও পরস্পর সমান হইবে। যে সকল জ্যা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ-কোণ উৎপন্ন করে, তাহারাও পরস্পর সমান হইবে।

উপপাদ্য 2

যদি বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত সরলরেখা ব্যাস নহে এরূপ কোন জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তবে ঐ সরলরেখা উক্ত জ্যা-এর উপর লম্ব হইবে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত সরলরেখা ব্যাস নহে এরূপ কোন জ্যা-এর উপর লম্ব হইলে, ঐ সরলরেখা উক্ত জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে

মনে করা যাউক, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং কেন্দ্র O হইতে অঙ্কিত OD সরলরেখা ব্যাস নহে এরূপ একটি জ্যা AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অর্থাৎ AD = BD

প্রমাণ করিতে হইবে যে OD সরলরেখা AB সরলরেখার উপর লম্ব।

অঙ্কন : OA এবং OB যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle$OAD এবং $\triangle$OBD ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে,

OA = OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ], AD = BD [কল্পনা] এবং OD সাধারণ,

ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম

$\angle$ODA = $\angle$ODB, কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ।

ইহাদের প্রত্যেকটি সমকোণ। অতএব OD, AB-র উপর লম্ব।

বিপরীতক্রমে, মনে করা যাউক ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং O কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত OD সরলরেখা ব্যাস নহে এরূপ একটি জ্যা AB-র উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে যে OD, AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে অর্থাৎ AD = BD

অঙ্কন : OA এবং OB যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\triangle$OAD এবং $\triangle$OBD সমকোণী ত্রিভুজ দুইটির মধ্যে,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ], OD সাধারণ বাহু

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব AD = BD. অর্থাৎ OD, AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে কোন জ্যার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক ঐ বৃত্তের কেন্দ্রগামী।

জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় পরিধির উপর অবস্থিত বলিয়া উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী। জ্যা-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর সকল বিন্দুই প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং কেন্দ্রটি অবশ্যই লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত থাকিবে এবং লম্বদ্বিখণ্ডক অবশ্যই কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যাইবে

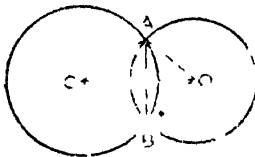
অনুসিদ্ধান্ত 2 কোন সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে দুই-এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

যদি উহা তিনটি বি ... ও C তে ছেদ করে তাহা হইলে AB ও AC দুইটি জ্যা হইবে। AB ও AC-র লম্বদ্বিখণ্ডের উপর কেন্দ্র অবস্থিত হইবে। কিন্তু ABC একই সরলরেখা হওয়ায় এই দুইটি লম্বদ্বিখণ্ডক সমান্তরাল হইবে, উহারা কখনও ছেদ করিবে না। O বিন্দুর অস্তিত্ব থাকিবে না। অতএব সরলরেখাটি তিনটি বিন্দুতে কখনও বৃত্তকে ছেদ করিতে পারে না।

অনুশীলনী 1A

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ]

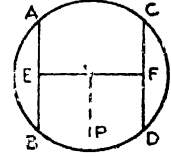
1 দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [C U 1950]

মনে করা যাউক O এবং O′ কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় A ও B বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। OO′ সরলরেখা বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা AB-কে C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে OO′, AB-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

অঙ্কন: OA, OB, O′A এবং O′B যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ: △OAO′ ও △OBO′ ত্রিভুজদ্বয়ে OA = OB, O′A = O′B [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং OO′ সাধারণ। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠AOO′ = ∠BOO′.

পুনরায় △OAC, △OBC ত্রিভুজদ্বয়ে, OA = OB, OC সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত ∠AOC = অন্তর্ভুক্ত ∠BOC. ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ∴ AC = BC এবং ∠ACO = ∠BCO. কিন্তু ইহারা প্রত্যেকে সন্নিহিত কোণ বলিয়া সমকোণ। অতএব OC⊥AB.

2. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা ঐ বৃত্তের কেন্দ্রগামী। [B. U. 1909]

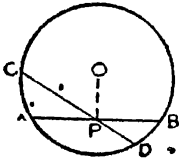
মনে করা যাউক O বৃত্তের কেন্দ্র এবং E ও F যথাক্রমে AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে যে EF সরলরেখার উপর কেন্দ্র O অবস্থিত হইবে।

অঙ্কন : O বিন্দু হইতে AB বা CD-র সমান্তরাল OP সরলরেখা অঙ্কন করা হইল এবং OE ও OF যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : O কেন্দ্র এবং AB-র মধ্যবিন্দু E. ∴ $OE \perp AB$, কিন্তু $OP \parallel AB$.

∴ $OE \perp OP$. অর্থাৎ $\angle POE = 1$ সমকোণ। অনুরূপভাবে $OF \perp OP$.

∴ $\angle POF = 1$ সমকোণ। অতএব $\angle POE + \angle POF = 2$ সমকোণ।

∴ OE ও OF অর্থাৎ EOF একই সরলরেখা। অর্থাৎ AB ও CD সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্র O বিন্দুগামী।

3. বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি কেন্দ্রগামী না হয়, তাহা হইলে উহারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না। [C. U. 1918, 1932]

মনে করা যাউক O কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা। যদি সম্ভব হয় উহারা কেন্দ্র ভিন্ন অপর একটি P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে উহারা কেন্দ্র ভিন্ন অপর কোন বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইতে পারে না।

অঙ্কন : OP যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : P, ABর মধ্যবিন্দু। ∴ $OP \perp AB$

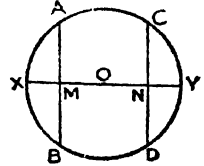
∴ $\angle OPA$ এক সমকোণ। অনুরূপে $\angle OPC$ এক সমকোণ।

∴ $\angle OPC = \angle OPA$. কিন্তু একমাত্র O বিন্দুর সহিত P বিন্দু মিলিত হইলে ইহা সম্ভব হইবে। P-র অন্য কোন স্থানে ইহা সম্ভব হইবে না। অর্থাৎ জ্যাদ্বয় কেন্দ্র দিয়া গেলে উহারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে, অন্য কোন স্থানে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না।

4. বৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ জ্যা-সমূহের লম্বভাবে অবস্থিত বৃত্তটির একটি ব্যাস। [C. U. 1933]

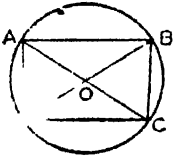
মনে কর O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে পরস্পর সমান্তরাল জ্যাসমূহের AB একটি জ্যা।

XY ব্যাস AB-র উপর লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে AB র সমান্তরাল জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ XY ব্যাস।

প্রমাণ: XY ব্যাস ⊥AB বলিয়া AB-র সমান্তরাল সকল জ্যার উপর লম্ব এবং XY ব্যাস কেন্দ্রগামী বলিয়া AB এবং AB র সমান্তরাল সকল জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। অতএব AB এবং AB র সমান্তরাল সকল জ্যার মধ্যবিন্দুগুলি XY ব্যাসের উপর থাকিবে।

XY, AB এবং AB জ্যায়ের সমান্তরাল জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ। XY ব্যাসের উপর N যে কোন বিন্দু। CD জ্যা N বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইলে ∠ONC এক সমকোণ। CD ‖ AB

5 কোন বৃত্তস্থ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দুই ঐ বৃত্তের কেন্দ্র।

D B 1894]

মনে করা যাউক ABCD একটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক। উহার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে O বৃত্তটির কেন্দ্র।

প্রমাণ: সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে অতএব AO = CO এবং BO = DO কিন্তু কেন্দ্র ব্যতীত অপর কোন বিন্দুতে AC ও BD জ্যা সমদ্বিখণ্ডিত হইতে পারে না। অতএব O ই বৃত্তটির কেন্দ্র।

6 দুইটি সমান বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া এবং পরিধিদ্বয়ের দ্বারা সীমাবদ্ধ PAQ সরলরেখা অঙ্কিত করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে BP = BQ [W B S F 1954 C U 1928]

7 দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [C U 1950]

8. কোন বৃত্তের OB ব্যাসার্ধের সহিত সমান কোণ করিয়া AB ও BC দুইটি জ্যা অঙ্কিত করা হইল, প্রমাণ কর জ্যা দুইটি সমান এবং কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

9 দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুই এর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

10 কোন বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যে বিন্দুটি ঐ জ্যা-র মধ্যবিন্দু হয়।

11 কোন বৃত্তের এমন একটি জ্যা অঙ্কিত কর যেন উহার দৈর্ঘ্য, কেন্দ্র হইতে জ্যার দূরত্বের দ্বিগুণ হয়।

12 কোন বৃত্তের দুইটি জ্যার মধ্যবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা যদি একটির উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে উহা অপরটির উপরও লম্ব হইবে।

13 প্রমাণ কর যে ব্যাসই বৃত্তের বৃহত্তম জ্যা।

14. কোন সরলরেখা দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে ছেদ করিলে, ঐ বৃত্তদ্বয়ের মধ্যবর্তী উহার অংশদ্বয় সমান হইবে।

15 পরস্পরচ্ছেদী দুইটি বৃত্তের যে কোন ছেদবিন্দু দিয়া কেন্দ্র-যোজক সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া একটি সরলরেখা পরিধি পর্যন্ত উভয় দিকে প্রসারিত করিলে উহা কেন্দ্রযোজক সরলরেখার দ্বিগুণ হইবে।

16 দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের একটি ছেদবিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা-সমূহের মধ্যে যেটি কেন্দ্রযোজক সরলরেখার সমান্তরাল সেইটিই বৃহত্তম।

17. বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুইটি সমান জ্যা এর অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তটির কেন্দ্রগামী। [C U 1923]

18 দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে একটি তৃতীয় বৃত্ত ছেদ করিয়াছে। প্রথম বৃত্তের ছেদবিন্দু A ও B এবং দ্বিতীয় বৃত্তের ছেদবিন্দু P ও Q। প্রমাণ কর যে ABQP একটি সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম।

19 AB কোন বৃত্তের ব্যাস এবং PQ ইহার একটি জ্যা। A ও B হইতে PQ-র উপর যথাক্রমে AX ও BY লম্ব। প্রমাণ কর যে $PX = QY$

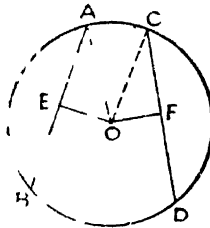
20 দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়া PQ ও RS দুইটি সরলরেখা পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ। উহারা যদি সাধারণ জ্যার সহিত সমানভাবে নত থাকে তাহা হইলে প্রমাণ কর যে $PQ = RS$

21 C ও D কেন্দ্র বিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। CD-র মধ্যবিন্দু M এবং A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত PAQ সরলরেখা AM র উপর লম্ব এবং পরিধি দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $AP = AQ$

22 দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে r ও r_1, উহাদের কেন্দ্র দুইটির দূরত্ব d হইলে প্রমাণ কর $r - r_1 > d < r + r_1$

23 একটি মাঠে এক খুঁটির সহিত l দৈর্ঘ্যের একটি দড়ি দিয়া একটি গরু বাঁধা আছে। একই সরলরেখায় অবস্থিত কোন চারাগাছের সারি হইতে খুঁটিটি d দূরে অবস্থিত ($l > d$)। প্রমাণ কর গরুটি ঐ গাছের সারির $2\sqrt{l^2 - d^2}$ দীর্ঘ স্থানের চারাগাছগুলি খাইতে পারিবে। [C U 1933]

উপপাদ্য 3

কোন বৃত্তের সমান সমান জ্যাসমূহ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী। বিপরীতক্রমে, কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাসমূহ পরস্পর সমান।

মনে করা যাউক, একটি বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা এবং O উহার কেন্দ্র। O কেন্দ্র হইতে OE ও OF যথাক্রমে AB ও CD র উপর লম্ব। তাহা হইলে OE ও OF, AB ও CD হইতে O কেন্দ্রের দূরত্ব সূচিত করিবে।

AB ও CD সমান হইলে প্রমাণ করিতে হইবে OE = OF

অঙ্কন : AO এবং CO যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : OE, AB জ্যার উপর লম্ব

OE AB জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে অতএব AE = BE, অর্থাৎ AE = $\frac{1}{2}$ AB অনুরূপে CF = $\frac{1}{2}$ CD কিন্তু কল্পনানুসারে AB = CD ∴ AE = CF

এক্ষণে AEO এবং CFO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে

AE = CF, অতিভুজ AO = অতিভুজ CO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ OE = OF

বিপরীতক্রমে মনে করা যাউক একটি বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা এবং O উহার কেন্দ্র। O হইতে OE ও OF যথাক্রমে AB ও CD-র উপর লম্ব। তাহা হইলে OE ও OF, AB ও CD হইতে O কেন্দ্রের দূরত্ব সূচিত করিবে।

এক্ষণে এই দূরত্ব OE ও OF সমান হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে AB = CD.

অঙ্কন : AO এবং CO যুক্ত করা হইল

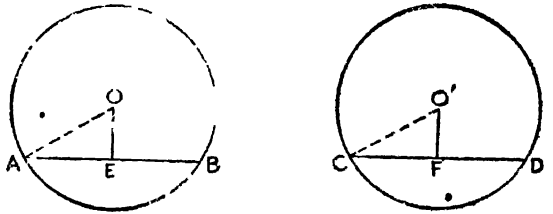
প্রমাণ : OE, AB-র উপর লম্ব ; ∴ OE AB জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অতএব AE = BE, অর্থাৎ 2AE = AB. অনুরূপভাবে 2CF = CD.

এক্ষণে AEO ও CFO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে, অতিভুজ AO = অতিভুজ CO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং কল্পনানুসারে OE = OF ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AE = CF

∴ 2AE = 2CF অতএব AB = CD

উপপাদ্য 4

বৃত্তসমূহ সমান হইলে, উহাদের সমান জ্যাগুলি কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তসমূহ সমান হইলে, উহাদেব কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাসমূহ পরস্পর সমান।

মনে করা যাউক, দুইটি সমান বৃত্তের O এবং O′ দুইটি কেন্দ্র এবং উহাদের প্রত্যেকটিতে AB ও CD দুইটি জ্যা। কেন্দ্র O এবং O′ হইতে OE ও O′F যথাক্রমে AB ও CD-র উপর লম্ব। তাহা হইলে OE ও O′F, AB ও CD হইতে O ও O′ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব সূচিত করিবে।

এক্ষণে যদি AB ও CD সমান হয়, প্রমাণ করিতে হইবে OF = O′F

অঙ্কন : AO ও CO′ যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : OE, AB-র উপর লম্ব ; . OE AB জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অতএব AE = BE AE = $\frac{1}{2}$ AB ; অনুরূপে CF = $\frac{1}{2}$ CD

কিন্তু কল্পনানুসারে, AB = CD AE = CF.

এক্ষণে AEO ও CFO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ AO = অতিভুজ CO′ [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং AE = CF.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। অতএব OE = O F

বিপরীতক্রমে, মনে করা যাউক, দুইটি সমান বৃত্তের O এবং O′ দুইটি কেন্দ্র, এবং উহাদের AB ও CD দুইটি জ্যা। কেন্দ্র O এবং O′ হইতে OE, O′F যথাক্রমে AB ও CD-র উপর লম্ব। তাহা হইলে OE ও O′F, AB ও CD হইতে O ও O′ কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব সূচিত করিবে।

এক্ষণে এই দূরত্ব OE এবং O′F সমান হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB = CD.

অঙ্কন : AO এবং CO′ যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : OE, ABর উপর লম্ব ; ∴ OE, AB জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। অতএব AE = BE.

∴ 2AE = AB, অনুরূপে 2CF = CD.

এক্ষণে AEO ও CFO′ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ AO = অতিভুজ CO [সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ] এবং কল্পনানুসারে OE = O′F.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম ∴ AE = CF 2AE = 2CF অতএব AB = CD

অনুশীলনী 1B

[1 হইতে 4 পর্যন্ত ক্লাসে কর ; বাকী বাড়ীর কাজ।]

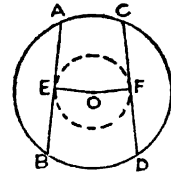
1. বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে যে-জ্যাটি কেন্দ্রের অধিক নিকটে থাকিবে, সেইটি কেন্দ্র হইতে দূরবর্তী জ্যাটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

বিপরীতক্রমে, বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তরটি ক্ষুদ্রতর অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর হইবে।

দ্রষ্টব্য : এই প্রযোজনীয় উপপাদ্যটি পাঠ্যসূচীর বহির্ভূত বলিয়া ইহাকে স্বীকৃত-সিদ্ধান্তরূপে গণনা করা যাইতে পারে।

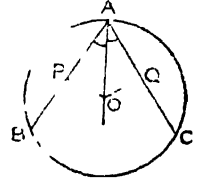
5. কোন বৃত্তের সমান জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[[C. U. '21, '23, D. B '35]

মনে করা যাউক, বৃত্তের কেন্দ্র O। সমান জ্যাগুলির মধ্যে AB ও CD দুইটি সমান জ্যা। এই জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে। মনে করা যাউক E, F, AB ও CD-র মধ্যবিন্দু। কেন্দ্র O-র সহিত এই মধ্যবিন্দু E ও F যুক্ত করা হইল।

এক্ষণে OE, OF যথাক্রমে AB ও CD-র উপর লম্ব হইল।

যেহেতু জ্যাগুলি সমান অতএব উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যাগুলির মধ্যবিন্দুগুলির দূরত্ব সর্বদা OE-র সমান। অতএব নির্ণেয় সঞ্চারপথ একটি বৃত্তের পরিধি হইবে যাহার কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OE।

3. কোন বৃত্তের AB ও AC দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ কর যে, BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্রের ভিতর দিয়া যাইবে। [C. U. 1926]

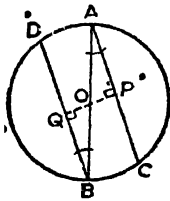
মনে করা যাউক O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও AC দুইটি পরস্পর সমান জ্যা এবং উহারা পরিধিতে A বিন্দুতে মিলিত হইয়া ∠BAC উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AO, ∠BAC র দ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন: AO যুক্ত করা হইল। O হইতে AB ও AC-র উপর যথাক্রমে OP ও OQ লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ: যেহেতু AB = AC, OP = OQ

এক্ষণে সমকোণী ত্রিভুজ AOP ও AOQ-র মধ্যে অতিভুজ AO সাধারণ এবং OP = OQ, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

অতএব ∠OAP = ∠OAQ অর্থাৎ ∠BAC-র সমদ্বিখণ্ডক কেন্দ্র O বিন্দুগামী।

4. কোন বৃত্তের AB ও AC দুইটি সমান জ্যা এবং O উহার কেন্দ্র। প্রমাণ কর যে OA, ∠BAC র সমদ্বিখণ্ডক।

5. ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত দুইটি সমান্তরাল জ্যা পরস্পর সমান।

মনে করা যাউক, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং AC ও BD দুইটি সমান্তরাল জ্যা, প্রমাণ করিতে হইবে AC = BD

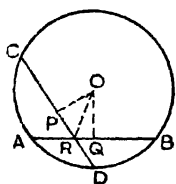
অঙ্কন: O হইতে OP এবং OQ যথাক্রমে AC ও BD-র উপর লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ: যেহেতু OP, AC-র উপর লম্ব,

∴ AP = PC অর্থাৎ AP = ½ AC, অনুরূপে BQ = ½ BD;

এক্ষণে সমকোণী ত্রিভুজ AOP ও BOQ-র মধ্যে অতিভুজ AO = অতিভুজ BO [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ], একান্তর ∠OAP = ∠OBQ.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। সুতরাং AP = BQ. অতএব AC = BD

6. কোন বৃত্তে দুইটি সমান জ্যা পরস্পর ছেদ করিলে একটির অংশদ্বয় যথাক্রমে অপরটির অংশ দুইটির সমান হইবে। [C. U. 1935]

মনে করা যাক, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD দুই সমান জ্যা পরস্পর R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে CR = BR এবং DR = AR.

অঙ্কন : O এবং R যুক্ত কর হইল এবং O হইতে AB ও CD-র উপর যথাক্রমে OQ ও OP লম্ব অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : যেহেতু AB CD, OQ = OP

এক্ষণে OQR ও OPR সমকোণ ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OR সাধারণ, OQ = OP, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

QR = PR, OQ, AB-র উপর লম্ব বলিয়া BQ = ½AB তদ্রূপ CP = ½CD

কিন্তু AB = CD বলিয়া, BQ = CP BQ + RQ = CP + PR,

অর্থাৎ BR CR এবং AB − BR = CD − CR, অর্থাৎ AR = DR

7. প্রমাণ কর যে, কোন বৃত্তে, যে-কোন ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হইতে ঐ ব্যাসের দুই পার্শ্বে অঙ্কিত সমান দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট জ্যা সমান্তরাল

8 পরস্পরচ্ছেদী দুইটি জ্যা তাহাদের ছেদবিন্দু ও কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখার সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করিলে জ্যা দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

9 বৃত্তের যে-কোন ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে উহার কোন নির্দিষ্ট জ্যা-এর উপর পাতিত লম্বদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুদ্বয় জ্যাটির একই পার্শ্বে থাকিলে সমষ্টি এবং বিপরীত পার্শ্বে থাকিলে অন্তর, ধ্রুবক। [C U 1937, 1939]

10 কোন বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত লম্ব দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

11 কোন বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম জ্যাদ্বয় অঙ্কিত কর। [C U 1936, 1942]

12 একটি জ্যা অপর একটি জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে প্রথমোক্ত জ্যাটি শেষোক্ত জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

13 O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ও CD দুইটি জ্যা পরস্পর লম্বভাবে X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $AB^2 + CD^2 + 4OX^2 = 8OA^2$

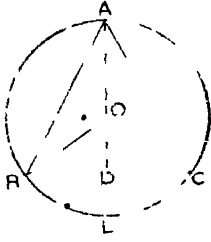
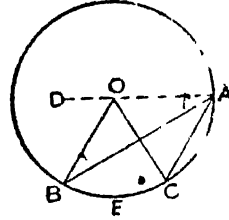
14 যে কোন বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা। [G. U. 1952]

15 কোন বৃত্তের অন্তর্ভুক্ত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন দুইটি সমান জ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমকোণ হইবে।

16. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ছেদবিন্দু দিয়া দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা CAD, EBF পরিধিতে C, D, E, F বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে প্রমাণ কর CD = EF

1.16 বৃত্তের অভ্যন্তরে কোণ বিষয়ক উপপাদ্য :

উপপাদ্য ১

বৃত্তেব একই চাপের উপব অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোন পরিধির অবশিষ্ট অ শের উপবিস্থ যে কোন বিন্দুস্থিত কোণের দ্বিগুণ।

প্রথম চিত্র

দ্বিতীয় চিত্র

মনে করা যাউক, ABC একটি বৃত্ত এবং O উহার কেন্দ্র BEC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ কোণ BOC এবং পরিধির অপর অংশস্থিত যে কোন কোণ BAC

প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle BOC = 2\angle BAC$

অঙ্কন : AO যুক্ত করিয়া কোন বিন্দু D পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

প্রমাণ : AOB ত্রিভুজে, একই বৃত্তের ব্যাস বলিয়া, AO = BO

$\angle OAB = \angle OBA$. $\angle OAB + \angle OBA = 2\angle OAB$.

পুনরায় AOB ত্রিভুজের AO বাহু D পর্যন্ত বর্ধিত হওয়ায়,

বহিঃ $\angle BOD =$ অন্তঃ $\angle CAB + \angle OBA = 2\angle OAB$ .... (1)

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় বহিঃ $\angle COD = 2\angle OAC$ (2)

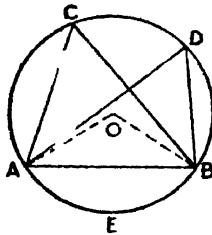
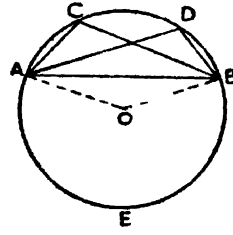
প্রথম চিত্রে (1) ও (2) যোগ করিয়া এবং দ্বিতীয় চিত্রে (1) ও (2) বিয়োগ করিয়া,

$\angle COD \pm \angle BOD = 2\angle OAC \pm 2\angle OAB$.

অর্থাৎ $\angle BOC = 2\angle BAC$.

অর্থাৎ একই চাপের উপরিস্থ কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ।

উপপাদ্য 6

একই বৃত্তাংশস্থিত সকল কোণই পরস্পর সমান।

প্রথম চিত্র

দ্বিতীয় চিত্র

মনে করা যাউক, ACDB একটি বৃত্ত এবং O উহার কেন্দ্র এবং ACDB বৃত্তাংশস্থ ACB ও ADB দুইটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle ACB = \angle ADB$

অঙ্কন : OA এবং OB যুক্ত করা হইল।

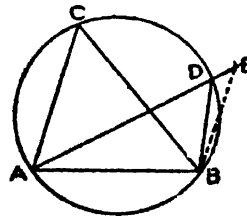
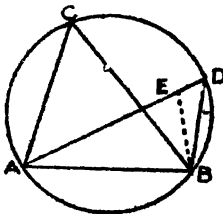
প্রমাণ : একই চাপ AEB-র উপর কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং পরিধিস্থ $\angle ACB$

$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় পরিধিস্থ $\angle ADB = \frac{1}{2}$ কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$

$\therefore \angle ACB = \angle ADB$ কারণ উভয়ই $\frac{1}{2} \angle AOB$ র সমান।

উপপাদ্য 7

দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করিলে ঐ চারিটি বিন্দু সমবৃত্ত হইবে।

মনে করা যাউক A ও B দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা AB ; ইহার একই পার্শ্বে C ও D দুইটি বিন্দুতে ACB ও ADB দুইটি সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে A, C, D ও B সমবৃত্ত।

অঙ্কন : তিনটি বিন্দু B, A, C-র ভিতর দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। যদি ঐ বৃত্ত D বিন্দুর উপর দিয়া না যায়, তাহা হইলে উহা AD বা বর্ধিত ADকে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EB যোগ করা হইল।

প্রমাণ : একই বৃত্তাংশস্থিত $\angle ACB = \angle AEB$,

কিন্তু কল্পনানুসারে $\angle ACB = \angle ADB$.

$\therefore$ $\angle ADB = \angle AEB$, অর্থাৎ EDB ত্রিভুজের বহিঃকোণ উহার বিপরীত অন্তঃকোণের সমান। কিন্তু ইহা অসম্ভব।

অতএব B, A, C বিন্দুগামী বৃত্ত D বিন্দু দিয়া যাইবে।

সুতরাং A, B, C ও D বিন্দু চারিটি সমবৃত্ত।

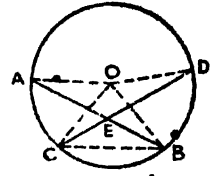
অনুশীলনী 1C

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর ; বাকী বাড়ীর কাজ]

1 কোন বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে চাপ AC এবং চাপ BD কেন্দ্রে যে দুইটি সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে তাহাদিগের সমষ্টি AEC কোণের দ্বিগুণ।

[W. B. S. F. 1953, 195৮, C. U 39]

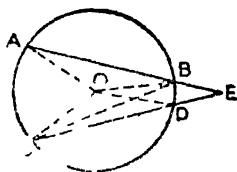
মনে করা যাউক, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা E বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করিয়াছে। OA, OB, OC, OD যুক্ত করা হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle AEC$.

অঙ্কন : BC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : AC চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2$ পরিধিস্থ $\angle ABC$ বা $= 2\angle EBC$. অনুরূপভাবে, কেন্দ্রস্থ $\angle BOD = 2$ পরিধিস্থ $\angle DCB$ বা $= 2\angle ECB$, কিন্তু BCE ত্রিভুজের বহিঃ $\angle AEC =$ অন্তঃ $\angle EBC + \angle ECB$. অতএব $\angle AOC + \angle BOD = 2\angle EBC + 2\angle ECB = 2(\angle EBC + \angle ECB) = 2\angle AEC$.

2. কোন বৃত্তে AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের বাহিরে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AC ও BD চাপ দুইটি কেন্দ্রে যে কোণ সৃষ্টি করে তাহাদের অন্তর AEC কোণের দ্বিগুণ। [W. B. S. F. 1956]

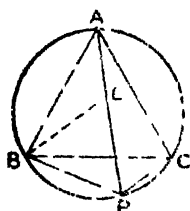
ইঙ্গিত : AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের বাহিরে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AO, BO CO, DO যুক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle AOC \sim \angle BOD = 2\angle AEC$.

BC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\angle AOC = 2\angle ABC, \angle BOD = 2\angle BCD$.

CBE ত্রিভুজে, $\angle AEC = \angle ABC \sim \angle BCE$ বা $\angle BCD$

$\therefore\ 2\angle AEC = 2\angle ABC \sim 2\angle BCD$.

$= \angle AOC \sim \angle BOD$

3. ABC একটি বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। যদি A বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে BC চাপের উপর P যে কোন একটি বিন্দু হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে AP = BP + CP. [C. U. 1939]

মনে করা যাউক, ABC সমবাহু ত্রিভুজটি বৃত্তস্থ। BC চাপের উপর P যে-কোন বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে

AP = BP + CP

অঙ্কন : AP হইতে CP-র সমান করিয়া AE অংশ কাটিয়া লইয়া BE যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : ABE ও PBC ত্রিভুজদ্বয়ে,

AB = BC [সমবাহু ত্রিভুজের বাহু],

AE = CP [অঙ্কন] এবং একই চাপের উপর পরিধিস্থ $\angle BAE$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BCP$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। $\therefore$ BE = BP.

$\angle BEP = \angle BPE$ = একই চাপের উপর পরিধিস্থ $\angle ACB = 60^\circ$

$\therefore$ BPE একটি সমবাহু $\triangle$. $\therefore$ BP = EP.

অতএব AP = AE + EP = CP + BP.

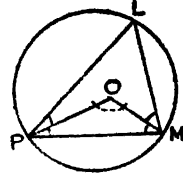
4. কোন বৃত্তের PM চাপের উপর L একটি বিন্দু এবং LPM ও LMP কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. '24, '42]

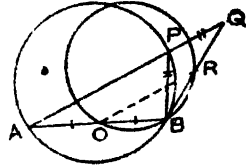
ইঙ্গিত : $\triangle OPM$ এর $\angle O + \angle OPM + \angle OMP = 180°$ অর্থাৎ,

$\angle O + \frac{1}{2}\angle LPM + \frac{1}{2}\angle LMP = 180°$

আবার $\triangle LMP$ এর $\angle L + \angle LPM + \angle LMP = 180$

$\therefore \frac{1}{2}\angle L + \frac{1}{2}\angle LPM + \frac{1}{2}\angle LMP = 90°$ বিয়োগ করিয়া $\angle O - \frac{1}{2}\angle L = 90°$ অর্থাৎ $\angle O = 90° + \frac{1}{2}\angle L$

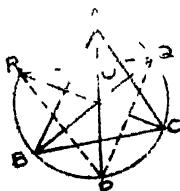
কিন্তু PLM চাপের উপর L-র সকল অবস্থায় $\angle L$-র মান সমান থাকিবে। . $\angle O$-ও ধ্রুবক। অতএব PM জ্যার উপর $90° + \frac{1}{2}\angle L$ ধারণক্ষম বৃত্তচাপ O বিন্দুর সঞ্চারপথ।

(5.) কোন বৃত্তের AB জ্যার এক পার্শ্বের চাপের উপর P যে কোন একটি বিন্দু। AP কে Q পর্যন্ত এরূপ বর্ধিত করা হইল যেন PQ=BP হয় BQ-র মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U 1935]

মনে করা যাউক, AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং APB চাপে P যে-কোন বিন্দু। APকে Q-পর্যন্ত এইরূপে বর্ধিত করা হইয়াছে যেন PQ=BP হয়। BQ-র মধ্যবিন্দু R-এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন : মনে করা যাউক, AB-র মধ্যবিন্দু O OR যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : BP=PQ $\angle PBQ = \angle PQB$, পুনরায় বহিঃ APB $= \angle PBQ + \angle PQB = 2\angle PQB$

ABQ ত্রিভুজে O এবং R যথাক্রমে AB ও BQ-র মধ্য বিন্দু।

OR ‖ AQ $\angle ORB = \angle PQB = \frac{1}{2}\angle APB$. P বিন্দুর APB চাপে সকল অবস্থানে ইহা একটি নির্দিষ্ট কোণ। AB নির্দিষ্ট, সুতরাং OB $= \frac{1}{2}$ AB-ও নির্দিষ্ট। OB জ্যার সম্মুখস্থ $\angle ORB$ নির্দিষ্ট অতএব OB জ্যার উপর $\frac{1}{2}\angle P$ ধারণক্ষম ORB বৃত্তচাপই R বিন্দুর সঞ্চারপথ।

6 একটি বৃত্তের উপর A, B ও C তিনটি বিন্দু। $\angle BAC$, $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-র সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিতে P, Q ও R বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর QR, AP-র উপর লম্ব [B U 1920]

ইঙ্গিত : PR ও PQ যুক্ত করা হইল, এবং মনে করা যাউক, RQ ও AP, O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ : $\angle AOR = \angle PRO + \angle RPQ = \angle PRQ + \angle RPA = \angle PRC + \angle QRC + \angle RCA = \angle PAC + \angle QBC + \angle RCA = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}[\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB] = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

$\therefore$ QR $\perp$ AP

7. একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ ABC-র কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিতে P, Q, R বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে PQR ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $90°-\frac{A}{2}, 90°-\frac{B}{2}$ ও $90°-\frac{C}{2}$ হইবে। [C U. 1939]

মনে করা যাউক, ABC বৃত্তস্থ ত্রিভুজ এবং $\angle A, \angle B, \angle C$-র সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিতে P, Q ও R বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। PR, RQ, ও PQ যুক্ত করা হইল। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle P=90°-\frac{1}{2}\angle A$; $\angle Q=90°-\frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle R=90°-\frac{1}{2}\angle C$

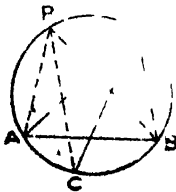
প্রমাণঃ একই চাপ AQ-র উপর দণ্ডায়মান $\angle APQ=\angle ABQ$ $=\frac{1}{2}\angle B$; একই চাপ AR-র উপর দণ্ডায়মান $\angle APR=\angle ACR=\frac{1}{2}\angle C.$

$\therefore$ সমগ্র $\angle P=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C$ কিন্তু $\triangle ABC$-র $\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C$ $=90°,$

$\therefore \frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=90°-\frac{1}{2}\angle A$

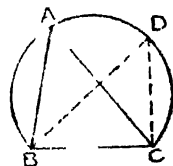
$\therefore P=90°-\frac{1}{2}\angle A,$ এইরূপে প্রমাণ করা যায় $\angle Q=90°-\frac{1}{2}\angle B$ এবং $\angle R=90°-\frac{1}{2}\angle C$

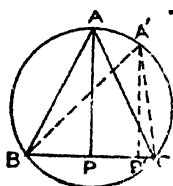
8 একই বৃত্তাংশস্থিত কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকসমূহ একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া যাইবে। [C U. '14, '51]

ইঙ্গিতঃ $\because$ PC $\angle APB$-র দ্বিখণ্ডক $\therefore \angle APC=\angle BPC$

চাপ AC = চাপ BC অর্থাৎ C, ACB চাপের মধ্যবিন্দু এবং ইহা নির্দিষ্ট। কারণ APB চাপ নির্দিষ্ট এবং তাহার অনুবন্ধী চাপ ACBও নির্দিষ্ট এবং ACB চাপের মধ্যবিন্দুও নির্দিষ্ট। $\therefore$ APB কোণের দ্বিখণ্ডক ACB চাপের মধ্যবিন্দু C দিয়া যাইবে। ইহা APB কোণের ঐ বৃত্তাংশে যে কোন অবস্থানে সত্য। AP'B কোণ উহার আর একটি অবস্থান হইলে উহার দ্বিখণ্ডক P'Cও ACB চাপের মধ্য বিন্দু C দিয়া যাইবে। অতএব APB বৃত্তাংশস্থ যে কোন কোণের সমদ্বিখণ্ডক নির্দিষ্ট বিন্দু C দিয়া যাইবে।

9. একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত এবং নির্দিষ্ট শিরঃকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. 1911]

মনে করা যাউক, ABC একটি ত্রিভুজের BC ভূমি ও শিরঃকোণ BAC নির্দিষ্ট। শীর্ষবিন্দু A-র সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রমাণ : মনে করা যাউক, D বিন্দু শীর্ষবিন্দু A-র যে কোন অপর একটি অবস্থান। তাহা হইলে DBC ত্রিভুজটি একই ভূমি BC-র উপর এবং একই দিকে দণ্ডায়মান এবং উহার শিরঃকোণ BDC = শিরঃকোণ BAC অতএব নির্দিষ্ট ভূমি BC-র একই পার্শ্বে A ও D বিন্দুতে দুইটি সমান কোণ উৎপন্ন হইয়াছে ; সুতরাং BADC সমবৃত্ত।

. BC জ্যা বিশিষ্ট BAC কোণ ধারণক্ষম বৃত্তচাপ শীর্ষবিন্দুর নির্ণেয় সঞ্চারপথ।

10. একই ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান শিরঃকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির ভিতর সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম। [C U 1941, B C S. '47]

মনে করা যাউক, BC ভূমি নির্দিষ্ট এবং শিরঃকোণ BAC-র মান নির্দিষ্ট প্রমাণ করিতে হইবে BC ভূমির উপর এবং BAC শিরঃকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তম।

প্রমাণ : একই ভূমি এবং একই শিরঃকোণ বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দু একটি বৃত্তচাপের উপর থাকিবে যাহার BC ভূমিটি একটি জ্যা হইবে। এখন এক বৃত্তস্থ ত্রিভুজগুলির মধ্যে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির উন্নতি AP বৃহত্তম হইবে। ∵ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ ভূমি × উন্নতি ∴ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল বৃহত্তম হইবে, কারণ সকল ত্রিভুজের ভূমি BC-র সমান।

11. একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান কোণসমূহের শীর্ষবিন্দুগুলি একই বৃত্তস্থ এবং ঐ ভূমিটি বৃত্তের একটি জ্যা। [C U. '11, '21, '41]

12. ABC ত্রিভুজের AD ও BE বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর লম্ব।

প্রমাণ কর যে, $\angle BAD = \angle BED$.

13. AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AO = CO এবং BO = DO হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে A, B, C ও D সমবৃত্ত।

14. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং A বিন্দু দিয়া PAQ সরলরেখা দুইটি বৃত্তের পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ। প্রমাণ কর যে $\angle PBQ$ ধ্রুবক।

15. দুইটি সমান্তরাল জ্যার মধ্যবর্তী চাপ দুইটি সমান।

16. কোন বৃত্তের AB ও CD দুইটি জ্যা। বৃত্তের ভিতরে AD ও BC পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে AP = BP.

17. কোন বৃত্তের যে সকল জ্যা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. 1948]

18 প্রমাণ কর যে কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত দুইট বাহু সমান্তরাল হইলে, অপর দুইটি বাহু সমান হইবে এবং কর্ণদ্বয়ও সমান হইবে। [W B S F. '58]

19. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু দুইটির যে-কোন একটিকে ব্যাস লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহার পরিধি ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে। [B C. S. 1931]

20 দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ দুইটি সরলরেখা CAD ও EAF অঙ্কিত হইয়াছে। প্রমাণ কর $\angle CBE = \angle DBF$

21. O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত AOB একটি ব্যাস এবং অর্ধপরিধির উপর P একটি বিন্দু, APকে Q পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হইয়াছে যেন PQ = OP হয়। প্রমাণ কর যে $\angle POQ = \frac{1}{2} \angle QOB$

22 O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তস্থিত ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। OD ব্যাসার্ধ BCকে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর OBD ও OCD সমবাহু ত্রিভুজ।

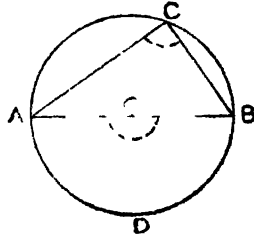
23. O কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তে ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ, $\angle A$ র সমদ্বিখণ্ডক AP এবং AD, BC-র উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে $\angle PAD = \angle PAO$.

24. কোন ত্রিভুজ ABC-র তিনটি শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয় O লম্ববিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। A হইতে BC-র উপর AD লম্ব পরিবৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর $\angle PBD = \angle DBO$ এবং DP = DO

25. দুইটি বৃত্ত পরস্পর P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। APB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা বৃত্ত দুইটির পরিধির দ্বারা সীমাবদ্ধ SPR যে কোন সরলরেখা P বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত ও বৃত্ত দুইটির পরিধির দ্বারা সীমাবদ্ধ। প্রমাণ কর AS ও BR যে বিন্দুতে ছেদ করিবে সেখানে একটি ধ্রুবক কোণ উৎপন্ন হইবে।

26. PQR বৃত্তস্থ ত্রিভুজের I ও S যথাক্রমে অন্তঃকেন্দ্র ও পরিকেন্দ্র।
প্রমাণ কর যে $\angle SPI = \frac{1}{2}(\angle PQR \sim \angle PRQ)$.

উপপাদ্য 8

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ

মনে করা যাউক, ACBD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AOB উহার ব্যাস। C. ACB অর্ধপরিধির উপরিস্থ যে কোন বিন্দু।

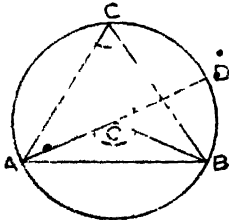
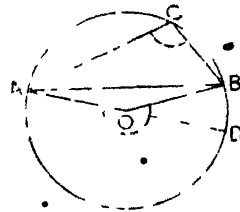
প্রমাণ করিতে হইবে ACB এক সমকোণ।

প্রমাণ : AOB ব্যাস বলিয়া উহা একটি সরলরেখা সুতরাং ∠ AOB এক সরলকোণ।

এক্ষণে একই চাপ ADB-র উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ কোণ ACB কেন্দ্রস্থ কোণ AOB-র অর্ধ। কিন্তু AOB কোণ সরলকোণ অর্থাৎ দুই সমকোণ।

সুতরাং ACB কোণ দুই সমকোণের অর্ধ অর্থাৎ এক সমকোণ।

উপপাদ্য 9

অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর

১ম চিত্র

২য় চিত্র

মনে করা যাউক, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB জ্যা বৃত্তটিকে দুইটি বৃত্তাংশে বিভক্ত করিয়াছে। প্রথম চিত্রে ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ACB বৃত্তাংশস্থ ACB কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অঙ্কন : AO ও BO যুক্ত করা হইল এবং AOD ব্যাস অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : AB চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ ACB কোণ কেন্দ্রস্থ AOB কোণের অর্ধ। কিন্তু AOD কোণ এক সরলকোণ অর্থাৎ দুই সমকোণ, এবং AOB কোণ, AOD কোণ বা দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

অতএব ACB কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

পুনরায়, দ্বিতীয় চিত্রে ACB বৃত্তাংশ অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

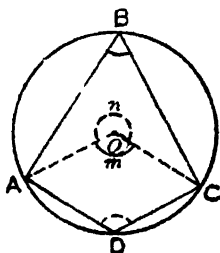
প্রমাণ করিতে হইবে যে ACB বৃত্তাংশের ACB কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অঙ্কন : AO, BO যুক্ত করা হইল এবং AOD ব্যাস অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : AB চাপের উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ ACB, কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ AOB কোণের অর্ধ। কিন্তু AOD কোণ সরলকোণ অর্থাৎ দুই সমকোণ এবং AOB কোণ, AOD কোণ বা দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব ACB কোণ এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

উপপাদ্য 10

বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক অর্থাৎ উহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

মনে করা যাউক, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং O বৃত্তটির কেন্দ্র।

প্রমাণ করিতে হইবে $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ এবং $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন : OA এবং OC যুক্ত করা হইল এবং মনে করা যাউক প্রবৃদ্ধ কোণ AOC n একক-বিশিষ্ট ও স্থূলকোণ AOC m একক-বিশিষ্ট।

প্রমাণ : একই চাপ ADC এর উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ ABC স্থূলকোণ AOC-র অর্ধ অর্থাৎ $\frac{1}{2}m$-র সমান।

সেইরূপ একই চাপ ABC-র উপর অবস্থিত পরিধিস্থ কোণ ADC কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ AOC-র অর্ধ অর্থাৎ $\frac{1}{2}n$-র সমান।

সুতরাং $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(m+n)$

$= \frac{1}{2} \times 4$ সমকোণ

[$\because$ $\angle m + \angle n = 4$ সমকোণ]

$= 2$ সমকোণ।

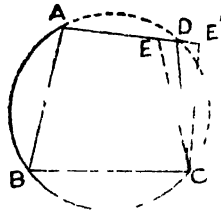
অতএব $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ পরস্পর সম্পূরক।

অনুরূপভাবে OB ও OD যোগ করিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$\angle DAB + \angle DCB = 2$ সমকোণ।

অর্থাৎ $\angle DAB$ ও $\angle DCB$ পরস্পর সম্পূরক।

উপপাদ্য 11

কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হইলে উহা একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ হইবে।

মনে করা যাউক, ABCD চতুর্ভুজের $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ।

প্রমাণঃ A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। বৃত্তটি যদি D বিন্দু দিয়া না যায়, তবে মনে করা যাউক বৃত্তটি AD বা বর্ধিত ADকে E বা E′ বিন্দুতে ছেদ করিল। EC বা E′C যোগ করা হইল।

এক্ষণে ABCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া,

$\angle ABC + \angle AE'C = 2$ সমকোণ [বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ সমষ্টি]

অথবা, $\angle ABC + \angle AE'C = 2$ সমকোণ [ঐ]

কিন্তু কল্পনানুসারে, $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

∠AEC বা ∠AE′C = ∠ADC ; কিন্তু CED বা CE′D ত্রিভুজের বহিঃকোণ বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইতে পারে না।

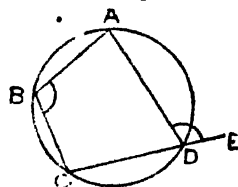
A, B ও C দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি অবশ্যই D বিন্দু দিয়াও যাইবে।

অতএব ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

অনুশীলনী 1D

[1 হইতে 20 পর্যন্ত ক্লাসে কর ; বাকী বাড়ীর কাজ]

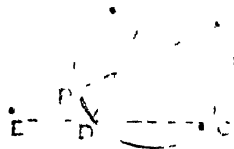
1. কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করিলে উৎপন্ন বহিঃকোণ ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইবে। [D. U. 1926]

মনে করা যাউক, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং CD বাহু E পর্যন্ত বর্ধিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে বহিঃকোণ ADE বিপরীত অন্তঃকোণ ABC

প্রমাণ : সন্নিহিত ∠ADE + ∠ADC = 2 সমকোণ ; আবার ADCB বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া ∠ABC + ∠ADC = 2 সমকোণ।

∴ ∠ADE + ∠AD ∠ABC + ∠ADC

উভয় পক্ষ হইতে সাধারণ ∠ADC বিয়োগ করিলে অবশিষ্ট ∠ADE = ∠ABC.

2. প্রমাণ কর যে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের কোন একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং উহার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের পরিধির উপর পরস্পর মিলিত হয়।

মনে করা যাউক, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ABC কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক BP পরিধিতে P বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ABC কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং ADC কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক পরিধির উপর কোন একটি বিন্দুতে পরস্পর মিলিত হইবে।

প্রমাণ : BPDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া বহিঃকোণ PDE = বিপরীত অন্তঃকোণ PBC, পুনরায় একই বৃত্তচাপ AP-র উপর অবস্থিত বলিয়া, পরিধিস্থ ∠ADP = ∠ABP ; কিন্তু কল্পনানুসারে, ∠ABP = ∠PBC

∴ ∠ADP = ∠PDE.

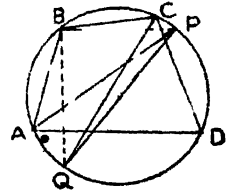
∴ DP, ∠ADE এর দ্বিখণ্ডক, অর্থাৎ DP ∠ADC-র বহির্দ্বিখণ্ডক। অতএব ∠ABC-র অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও ∠ADC-র বহির্দ্বিখণ্ডক পরিধির উপর একটি বিন্দু P তে মিলিত হইয়াছে।

3 যদি কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি উহার পরিবৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে PQ ঐ বৃত্তের একটি ব্যাস হইবে।

মনে কর যাউক, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, উহার ∠A ও ∠C র সমদ্বিখণ্ডক দুইটি পরিধিতে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে।

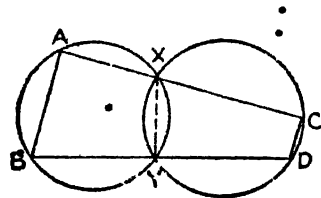
প্রমাণ করিতে হইবে PQ বৃত্তের একটি ব্যাস।

অঙ্কন : PQ, BP ও BQ যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : ∠BQP + ∠BPQ = ∠BAP + ∠BCQ
$=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)=\frac{1}{2}\times 2$ সমকোণ
= 1 সমকোণ।

△BPQ এর ∠PBQ = 180° − (∠BQP + ∠BPQ) = 180° − 90° = 90° বা এক সমকোণ, ইহা অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। অতএব PQ একটি ব্যাস।

4 কোন ত্রিভুজের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ও বহিঃসমদ্বিখণ্ডক ত্রিভুজের পরিবৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে PQ বৃত্তটির ব্যাস।

5 দুইটি বৃত্ত পরস্পর X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। X ও Y বিন্দু দিয়া যথাক্রমে AXC ও BYD অঙ্কিত হইয়াছে। উহারা বৃত্তে A, B, C ও D বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর AB ও CD সমান্তরাল। [C U '11, S F '61]

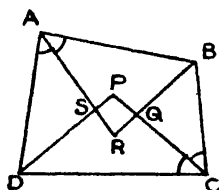
মনে করা যাউক, দুইটি বৃত্ত X ও Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। X ও Y বিন্দু দিয়া যথাক্রমে AXC ও BYD দুইটি সরলরেখা বৃত্তদ্বয়ের পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ। উহারা একটি বৃত্তে A ও B বিন্দুতে এবং অপর বৃত্তে C ও D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে AB ও CD সমান্তরাল।

অঙ্কন : AB, XY ও CD যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : ABYX একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ ∠BAX + ∠BYX = 2 সমকোণ, কিন্তু XYDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বহিঃকোণ BYX = বিপরীত অন্তঃকোণ XCD, ∴ ∠BAX + ∠XCD = 2 সমকোণ।

অর্থাৎ ∠A + ∠C = 2 সমকোণ। অতএব AB ও CD সমান্তরাল।

6. প্রবৃদ্ধ কোণহীন যে কোন চতুর্ভুজের কোণগুলির অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক চারিটি মিলিতভাবে যে চতুর্ভুজটি উৎপন্ন করে তাহা বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

মনে করা যাউক, ABCD একটি প্রবৃদ্ধ কোণহীন চতুর্ভুজ এবং ইহার কোণ চারিটি অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক ABCD চতুর্ভুজের ভিতরে PQRS চতুর্ভুজটি উৎপন্ন করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে PQRS একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

প্রমাণ : PDC ত্রিভুজে $\angle P+\angle PDC+\angle PCD$ $=2$ সমকোণ এবং ARB ত্রিভুজে $\angle R+\angle RAB+\angle RBA=2$ সমকোণ।

$\therefore$ যোগ করিয়া $\angle P+\angle R+\angle PDC+\angle PCD+\angle RAB+\angle RBA$ $=4$ সমকোণ।

বা $\angle P+\angle R+\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle C+\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle B=4$ সমকোণ

বা $\angle P+\angle R+\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=4$ সমকোণ।

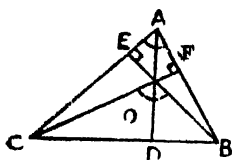
বা $\angle P+\angle R+\frac{1}{2}\times \overset{2}{4}$ সমকোণ $=4$ সমকোণ

বা $\angle P+\angle R=4$ সমকোণ -2 সমকোণ $=2$ সমকোণ।

অর্থাৎ $\angle P+\angle R=2$ সমকোণ, PQRS চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি $=2$ সমকোণ বলিয়া উহা বৃত্তস্থ।

7. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্বত্রয় পরস্পর O লম্ববিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে $\angle BOC+\angle BAC=2$ সমকোণ।

[C. U 1950]

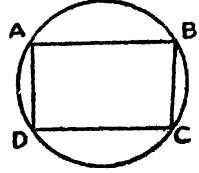
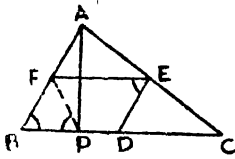
মনে করা যাউক, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF যথাক্রমে BC, AC ও AB র উপর লম্ব এবং উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle BOC+\angle BAC=2$ সমকোণ।

প্রমাণ : যেহেতু $\angle BEA$ ও $\angle CFA$ প্রত্যেকেই এক সমকোণ, . উহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

অতএব AEOF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\therefore$ $\angle BAC$ $+\angle EOF=2$ সমকোণ।

কিন্তু $\angle EOF=$ বিপ্রতীপ $\angle BOC$, অতএব $\angle BOC+\angle BAC=2$ সমকোণ।

8. যদি কোন সামান্তরিকের একটি পরিবৃত্ত অঙ্কিত করা সম্ভবপর হয় তাহা হইলে সামান্তরিকটি আয়তক্ষেত্র হইবে। [C. U. '15, '20, G U 1950

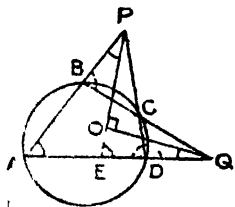
মনে করা যাউক ABCD একটি বৃত্তস্থ সামান্তরিক। প্রমাণ করিতে হইবে যে ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

প্রমাণঃ যেহেতু ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ $\therefore \angle A+\angle C=2$ সমকোণ। কিন্তু কল্পনানুসারে ABCD একটি সামান্তরিক। .. $\angle A-\angle C$. অতএব $\angle A=\angle C=$এক সমকোণ। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

9. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও ABর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ; A হইতে বিপরীত বাহু BCর উপর পাতিত AP লম্বর পাদবিন্দু P ; প্রমাণ কর P, D, E F সমবৃত্ত। [W. B. S. F 1965, C. U. '43, D B. '37]

মনে করা যাউক, ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F, A বিন্দু হইতে বিপরীত বাহু BC-র উপর AP লম্বের পাদবিন্দু P ; প্রমাণ করিতে হইবে যে P, D, E, F সমবৃত্ত।

অঙ্কনঃ PF যুক্ত করা হইল।

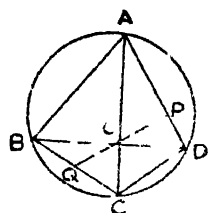
প্রমাণঃ AB ও ACর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E $\therefore$ FE $\parallel$ BC. অনুরূপভাবে DE $\parallel$ AB. BDEF একটি সামান্তরিক। অতএব $\angle FBD-\angle FED$. ABP সমকোণী ত্রিভুজের F অতিভুজ AB-র মধ্যবিন্দু ; $\therefore$ PF $=^1$AB $=$ t᠌¨. অতএব $\angle FPB=\angle FBP=\angle FED$. অর্থাৎ PDEF চতুর্ভুজের বহিঃকোণ FPB $=$ বিপরীত অন্তঃকোণ FED, $\therefore$ PDEF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

10. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। যদি বর্ধিত বিপরীত বাহু AB ও DC, P বিন্দুতে এবং AD ও BC, Q বিন্দুতে ছেদ করে তবে প্রমাণ কর যে APD কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটির অন্তর্গত কোণ এক সমকোণ। [P.U. 1934]

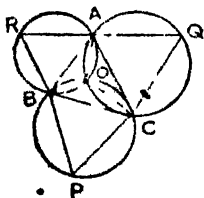
মনে করা যাউক, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, উহার AB ও DC বাহু বর্ধিত হইয়া P বিন্দুতে এবং BC ও AD বাহু বর্ধিত হইয়া Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে APD কোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং AQB কোণের সমদ্বিখণ্ডকের অন্তর্গত কোণ POQ এক সমকোণ।

অঙ্কনঃ মনে করা যাউক, $\angle APD$ ও $\angle AQB$ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PO বর্ধিত করিয়া ADর সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইল।

প্রমাণ : $\angle POQ = \angle OQE + \angle OEQ = \frac{1}{2}\angle AQB + \angle A + \angle APE = \frac{1}{2}\angle AQB + \frac{1}{2}\angle 2A + \frac{1}{2}\angle APD = \frac{1}{2}(\angle AQB + \angle 2A + \angle APD) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle AQB + \angle A + \angle APD) = \frac{1}{2}(\angle PEQ + \angle PDQ) = \frac{1}{2}(\angle ADC + \angle PDQ) = \frac{1}{2}.$ 2 সমকোণ = এক সমকোণ।

11 ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করিলে, ঐ ছেদ বিন্দু দিয়া উহার এক বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [B. U. 1923]

মনে কর যাক ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং উহার AC ও BD কর্ণদ্বয় লম্বভাবে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O হইতে OP, AD-র উপর লম্ব ; উহা বর্ধিত করিয়া BC-কে Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে BQ = CQ

প্রমাণ : CBAD বৃত্তাংশে পরিধিস্থ $\angle CBD = \angle CAD = 90^\circ - \angle AOP = \angle IOP$ = বিপ্রতীপ $\angle BOQ$ ∴ BQ = OQ ; অনুরূপে $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ - \angle OAP = \angle AOP$ = বিপ্রতীপ $\angle QOC$ ∴ OQ = CQ ∴ BQ = CQ.

[ইহাকে ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য বলে।]

12 যে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর বহির্দিকে তিনটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে, এই সমবাহু ত্রিভুজ তিনটির পরিবৃত্ত তিনটি একই বিন্দুতে ছেদ করিবে।

মনে কর যাক, ABC ত্রিভুজের AC ও BC বাহুর বহির্দিকে অঙ্কিত BPC ও AQC দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং উহাদের পরিবৃত্ত দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে AB বাহুর উপর অঙ্কিত ABR সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্ত O বিন্দুগামী।

অঙ্কন : AO, BO, CO যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : BPCO বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং $\angle BPC = 60^\circ$

∴ $\angle BOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ পুনরায় AQCO বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং $\angle AQC = 60^\circ$.

∴ $\angle AOC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

কিন্তু $\angle AOB + \angle BOC + \angle AOC = 360^\circ$.

∴ $\angle AOB = 120^\circ$ এবং $\angle ARB = 60^\circ$.

∴ ARBO চতুর্ভুজে বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি অর্থাৎ $\angle AOB + \angle ARB = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ = 2$ সমকোণ। অতএব ARBO বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। সুতরাং ARB ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত O বিন্দুগামী।

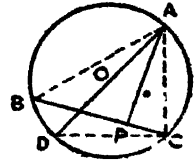
13. ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। AB, BC ও CAর উপর যথাক্রমে D, E ও F বিন্দু। প্রমাণ কর যে ADF, DBE ও CEF ত্রিভুজের পরিবৃত্ত তিনটি একই বিন্দুতে ছেদ করিবে।

14. কোন বৃত্তে AD একটি ব্যাস। A বিন্দু হইতে BC জ্যার উপর AP লম্ব। প্রমাণ কর $\angle BAP = \angle DAC$. [C. U. 1948]

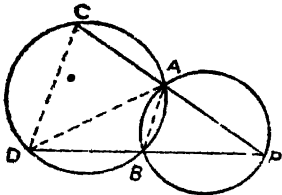
মনে করা যাউক, O-কেন্দ্র বৃত্তে AD একটি ব্যাস ও BC একটি জ্যা। A বিন্দু হইতে BCর উপর AP লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে $\angle BAP = \angle DAC$.

অঙ্কন: AB, AC ও CD যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ: একই চাপ ACর উপর দণ্ডায়মান পরিধিস্থ $\angle ABP = \angle ADC$. অর্ধবৃত্তস্থকোণ ACD এক সমকোণ $= \angle APB$ (AP লম্ব বলিয়া); এক্ষণে $\triangle$ ABP ও $\triangle$ ACDর মধ্যে $\angle ABP = \angle ADC$, $\angle APB = \angle ACD$.

∴ তৃতীয় $\angle BAP =$ তৃতীয় $\angle DAC$.

15. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। একটি বৃত্তের পরিধির উপর যে কোন বিন্দু P হইতে PAC ও PBD দুইটি সরলরেখা অপর বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত।

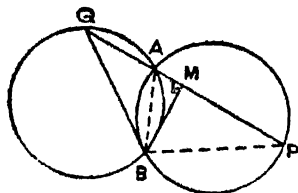
প্রমাণ কর যে, CD চাপ ধ্রুবক।

মনে করা যাউক, দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। APB বৃত্তে যে কোনও বিন্দু P হইতে PAC ও PBD সরলরেখা অপর বৃত্তে C ও D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে CD চাপ ধ্রুবক।

অঙ্কন: AB, CD ও AD যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ: AB চাপের উপর P বিন্দুর যে কোন অবস্থানে $\angle APB$ সর্বদা সমান। একই কারণে $\angle ADB$ সর্বদা সমান। $\triangle$ ADPর বহিঃ $\angle DAC = \angle ADP + \angle APD$, কিন্তু $\angle APB$ ও $\angle ADB$ সর্বদা সমান বলিয়া $\angle DAC$ও সর্বদা ধ্রুবক।

∴ চাপ CD যাহার উপর $\angle DAC$ দণ্ডায়মান তাহাও ধ্রুবক।

16. দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। A বিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত PAQ সরলরেখা অঙ্কিত হইলে প্রমাণ কর যে BP = BQ.

[C. U. 1928]

মনে করা যাউক, দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া বৃত্তদ্বয়ের পরিধি পর্যন্ত PAQ সরলরেখা অঙ্কিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে BP = BQ.

অঙ্কন : BP, BQ ও AB যুক্ত করা হইল।

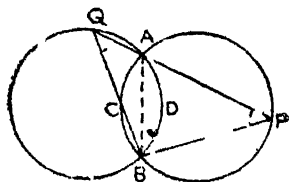
প্রমাণ : AB সমান বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা।

. ACB চাপ ও ADB চাপ সমান। সমান চাপের উপর পরিধিস্থ কোণগুলিও সমান হইবে।

ACB চাপের উপর ∠APB ও ADB চাপের উপর ∠AQB, উহারা সমান।

BP = BQ

17. দুইটি সমান বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া অঙ্কিত যে-কোন সরলরেখা পরিধিতে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। PQর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

মনে করা যাউক, দুই সমান A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। PAQ যে কোন সরলরেখা A বিন্দুগামী ও পরিধির দ্বারা সীমাবদ্ধ। PQর মধ্যবিন্দু M এর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন : BQ, BP ও AB যুক্ত করা হইল। **প্রমাণ :** এক্ষণে BPM ও BQM ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে BP = BQ, BM সাধারণ এবং PM = QM

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ ∠BMQ = ∠BMP, কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ বলিয়া প্রত্যেকেই সমকোণ। ∵ ∠AMB সমকোণ এবং AB ধ্রুবক, সুতরাং AB ব্যাসের উপর বৃত্তের পরিধি M বিন্দুর সঞ্চারপথ।

18 দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি বৃহত্তর বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া গমন করে, তবে প্রমাণ কর যে স্পর্শবিন্দু হইতে বৃহত্তর বৃত্তে অঙ্কিত জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্ত দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [C. U. 1886]

19. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ABC-র BC ভূমির সমান্তরাল XY সরলরেখা AB, AC যথাক্রমে X ও Y বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে B, C, Y, X সমবৃত্ত।
[A. U. 1931]

20. ABCD সামান্তরিকের A ও B বিন্দুগামী কোন বৃত্ত AD ও BC-কে E ও F বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে E, F, C ও D সমবৃত্ত। [B. U. 1926]

21. বৃত্তে অন্তর্লিখিত ষড়ভুজের যে-কোন তিনটি একান্তর কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ।

22. কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অন্য একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C U. 1922]

23. কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত উহার বিপরীত কৌণিক বিন্দু দিয়া যাইবে। [C. U. 1927]

24. কোন বৃত্তের অন্তঃস্থ, বহিঃস্থ বা পরিধিস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুগামী জ্যাসমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

25 ABCD চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ পরস্পর সম্পূরক এবং AC কর্ণ BAD কোণের সমদ্বিখণ্ডক হইলে, প্রমাণ কর BC ও CD সমান। [B U. 1930]

26 কোন চতুর্ভুজ বৃত্তস্থ হইলে উহার বাহিরের বৃত্তাংশস্থিত কোণ চারিটির সমষ্টি ছয় সমকোণ হইবে। [C. U 1887]

27. বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় সমান। [C U. 1952]

28. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও DC বাহু বর্ধিত করিয়া E বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, EBC ও EAD ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান।
[G. U 1949]

29. চতুর্ভুজের চারিটি কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডক চারিটি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে।

30. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও CD বিপরীত বাহুদ্বয় বর্ধিত হইয়া P বিন্দুতে ও BC ও DA বাহু বর্ধিত হইয়া Q বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, PBC ও QAB ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় পরস্পর R বিন্দুতে ছেদ করিলে P, R Q বিন্দু তিনটি একরেখায় অবস্থিত হইবে।

31. কোন বৃত্তের জ্যা দুইটি সমকোণে ছেদ করিলে প্রমাণ কর যে, উহাদের দ্বারা ছিন্ন বিপরীত চাপদ্বয়ের সমষ্টি বৃত্তটির অর্ধ পরিধির সমান এবং ঐ জ্যাদ্বয়ের অংশগুলির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রগুলির সমষ্টি বৃত্তটির ব্যাসের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান।
[C. U. 1859]

32. PQR ত্রিভুজের QR ভূমির উপর S যে-কোন বিন্দু। Q, S ও R বিন্দু হইতে যথাক্রমে PQ, PS ও PR সরলরেখার উপর লম্ব তিনটি T, X ও V বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর P, T, X, V সমবৃত্ত।

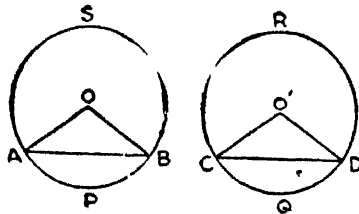
33. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু AB ও DC বর্ধিত হইয়া E বিন্দুতে এবং DA ও BC বাহু বর্ধিত হইয়া F বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। ADE ত্রিভুজের পরিবৃত্ত EF রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে CDFG, BCGF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

34. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু AB ও DC বর্ধিত হইয়া F বিন্দুতে এবং AD ও BC বাহু বর্ধিত হইয়া E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে BCF ও CDE ত্রিভুজ দুইটির পরিবৃত্তদ্বয় EF সরলরেখার উপর মিলিত হইবে। [B. U.]

35. ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজ। BAC চাপের অনুবন্ধী চাপের E মধ্যবিন্দু এবং ED বৃত্তের ব্যাস। প্রমাণ কর যে, $\angle DEA = \frac{1}{2}(\angle B \sim \angle C)$.

1.15. **স্বীকৃতসিদ্ধান্ত :** একই বৃত্তে কিংবা দুইটি সমান বৃত্তে সমান জ্যাগুলি দ্বারা ছিন্ন বৃত্তচাপগুলি পরস্পর সমান এবং উহারা কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

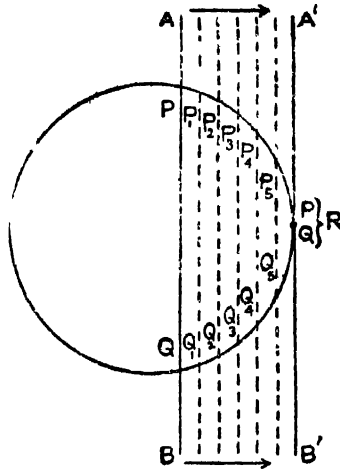
বিপরীতক্রমে, একই বৃত্তে কিংবা সমান বৃত্তে সমান চাপের জ্যা-গুলি পরস্পর সমান এবং উহারা কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

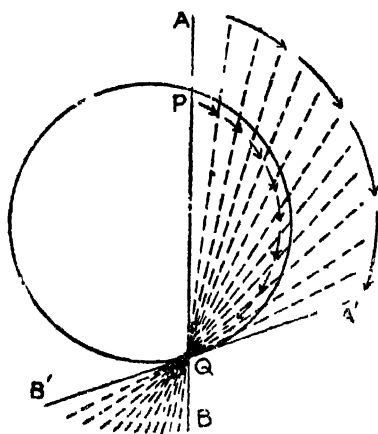
O এবং O′ দুইটি সমান বৃত্তের কেন্দ্র। AB জ্যা ও CD জ্যা সমান হইলে,

APB চাপ = CQD চাপ, ASB চাপ = CRD চাপ এবং কেন্দ্রস্থ কোণ AOB = কেন্দ্রস্থ কোণ CO′D. বিপরীতক্রমে, APB ও CQD চাপ সমান হইলে, AB জ্যা = CD জ্যা এবং কেন্দ্রস্থ $\angle AOB = \angle CO'D$.

2

স্পর্শক

Tangent

2.1. যে অসীম সরলরেখা কোন বৃত্তকে কেবলমাত্র দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে বৃত্তটির ছেদক (Secant) বলে। বৃত্তের জ্যা বৃত্তের বাহিরে উভয় দিকে বর্ধিত করিলে উহাকেও ছেদক বলা হয়। APQB একটি ছেদক।

2.2. AB ছেদক কোন বৃত্তকে P ও Q তে ছেদ করিয়াছে। যদি ছেদকটি তাহার পূর্বাবস্থার সহিত সমান্তরাল হইয়া চলিতে থাকে তাহা হইলে P ও Q ছেদঃ বিন্দু দুইটি পরস্পরের নিকটবর্তী হইতে থাকিবে এবং চরম অবস্থায় উহারা মিশিয়া গিয়া একটি মাত্র বিন্দু R-তে পরিণত হইবে। এই চরম অবস্থায় A'RB' রেখাটিকে বৃত্তের স্পর্শক (Tangent) বলে এবং R বিন্দুটিকে স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু (Point of contact) বলে।

পুনরায়, AB ছেদকটি P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিলে Q বিন্দুটিকে পরিধির উপর স্থির রাখিয়া, ছেদকটিকে তীর নির্দেশক্রমে ঘুরিতে থাকিলে P ছেদবিন্দুটি পরিধির উপর

দিয়া ক্রমশঃ Q ছেদবিন্দুর নিকটে যাইবে। যখন চরম অবস্থায় P বিন্দুটি Q বিন্দুর সহিত পরিধির উপর মিশিয়া একটি মাত্র স্পর্শবিন্দুতে পরিণত হইবে তখন উহা বৃত্তটির স্পর্শকে পরিণত হইবে। অতএব,

সংজ্ঞা : যদি কোন সরলরেখা একটি বৃত্তকে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং উভয়দিকে বর্ধিত করিলেও বৃত্তকে আর কোন বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে না তখন ঐ সরলরেখাকে বৃত্তটির স্পর্শক (Tangent) **বলে এবং যে বিন্দুতে স্পর্শক বৃত্তকে স্পর্শ করে তাহাকে স্পর্শবিন্দু** (Point of Contact) **বলে।**

2.3 যখন দুইটি বৃত্ত মাত্র একটি বিন্দুতে মিলিত হয় তখন উহারা পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে বলা হয়। বৃত্ত দুইটির একটি অপরটির সম্পূর্ণ বহির্দিকে থাকিয়া স্পর্শ করিলে উহাকে **বহিঃস্পর্শ** (External Contact) বলে ; এবং অসমান ব্যাসার্ধ যুক্ত বৃত্তের ছোটটি বড়টির ভিতরে থাকিয়া পরস্পর স্পর্শ করিলে তখন উহাকে **অন্তঃস্পর্শ** (Internal Contact) বলে।

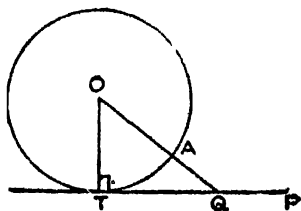
2.4. দুইটি বৃত্ত অন্তঃস্পর্শ বা বহিঃস্পর্শ করিলে উহাদের স্পর্শবিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকটিকে **সাধারণ স্পর্শক** (Common tangent) বলে।

উপপাদ্য 12

বৃত্তের যে-কোন স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।

মনে করা যাউক, O বৃত্তের কেন্দ্র, PT স্পর্শক, T স্পর্শবিন্দু এবং OT স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PT, OT-র উপর লম্ব।

অঙ্কন: PT স্পর্শকের উপর যে কোন বিন্দু Q লওয়া হইল; এবং OQ যুক্ত করিলে উহা যেন পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ: PT স্পর্শক বৃত্তকে T বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। সুতরাং T ভিন্ন PTর উপর অন্য যে-কোন বিন্দু বৃত্তের বাহিরে থাকিবে। অতএব Q বিন্দুটি বৃত্তের বাহিরে, PTর উপর অবস্থিত; সেইজন্য OQ নিশ্চয়ই পরিধিকে কোন এক বিন্দু A-তে ছেদ করিবে। অতএব ব্যাসার্ধ OA<OQ অর্থাৎ ব্যাসার্ধ OT<OQ (OT ও OA বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া সমান)।

সুতরাং O হইতে PT স্পর্শকের উপর যতগুলি সরলরেখা টানা যায় তন্মধ্যে OTই ক্ষুদ্রতম। অতএব OT, PTর উপর লম্ব। অর্থাৎ PT, OTর উপর লম্ব।

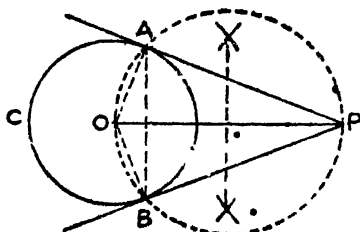
দ্রষ্টব্য: কোন বৃত্তে কোন বিন্দুতে স্পর্শক অঙ্কিত করিতে হইলে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর প্রদত্ত বিন্দুতে লম্ব অঙ্কিত করিতে হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত: বৃত্তের পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত: বৃত্তের কোন ব্যাসার্ধ পরিধিতে যে বিন্দুতে মিলিত হয় সেই বিন্দুতে ব্যাসার্ধের উপর লম্ব ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত: স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব কেন্দ্রগামী।

উপপাদ্য 13

একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

মনে করা যাউক, ABC বৃত্তের O কেন্দ্র এবং P বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

অঙ্কন : PO যুক্ত করিয়া এবং POকে ব্যাস করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। P বিন্দু বৃত্তের বহিঃস্থ এবং O বিন্দু বৃত্তের অন্তঃস্থ বলিয়া PAB বৃত্ত ABC বৃত্তকে দুইটি বিন্দু A ও Bতে ছেদ করিবে। PA, PB, OA, OB এবং PO যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : PAO এবং PBO প্রত্যেকে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া সমকোণ।

∴ PA ও PB যথাক্রমে OA ও OB ব্যাসার্ধের উপর A ও B বিন্দুতে লম্ব।

∴ PA ও PB যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শক। অতএব,

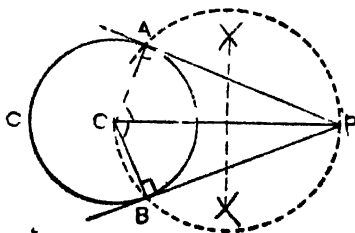
বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাইতে পারে।

দ্রষ্টব্য : উপপাদ্য 13র চিত্র হইতেই কোন বহিঃস্থ বিন্দু হইতে একটি বৃত্তে স্পর্শকের অঙ্কন পদ্ধতি বুঝা যাইবে।

সংজ্ঞা : বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তের যে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়, উহাদের স্পর্শবিন্দু সংযোজক সরলরেখাকে **স্পর্শজ্যা** (Chord of contact) বলে। AB স্পর্শজ্যা।

উপপাদ্য 14

একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি পরস্পর সমান এবং ঐ স্পর্শক দুইটি কেন্দ্রে সমান সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে।

মনে করা যাউক, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O, P বহিঃস্থ কোন বিন্দু। P বিন্দু হইতে PA ও PB দুইটি স্পর্শক বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, PA = PB এবং ∠POA = ∠POB.

অঙ্কন : OA এবং OB যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : যেহেতু PA এবং PB বৃত্তের যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শক,

∴ AO ও BO দুইটি স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সুতরাং ∠OAP ও ∠OBP প্রত্যেকে সমকোণ। [উপ 12]

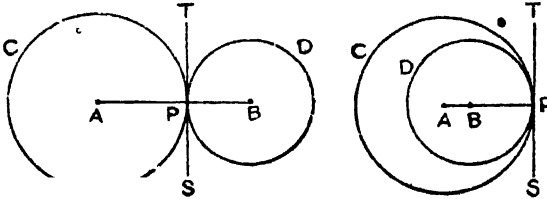
এক্ষণে AOP ও BOP সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), অতিভুজ OP সাধারণ বাহু। ∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

∴ PA = PB এবং ∠POA = ∠POB.

অনুসিদ্ধান্ত : PO স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। কারণ ∠BPO = ∠APO.

অনুসিদ্ধান্ত : PO স্পর্শজ্যা AB-র উপর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক।

উপপাদ্য 15

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে, উহাদের দুইটি কেন্দ্র ও স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

মনে করা যাউক, A ও B কেন্দ্র বিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে A, B ও P একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : AP ও BP সংযুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : বৃত্ত দুইটি P বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে ; ∴ P বিন্দুতে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত হইতে পারে। মনে করা যাউক TPS বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক।

এক্ষণে A কেন্দ্রীয় বৃত্তের TPS স্পর্শকের P স্পর্শবিন্দুতে PA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। সুতরাং ব্যাসার্ধ PA, TPS এর P বিন্দুতে লম্ব। [উপ. 12]

অনুরূপভাবে B কেন্দ্রীয় বৃত্তে TPS স্পর্শকের P বিন্দুতে PB স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। সুতরাং ব্যাসার্ধ PB, TPS এর P বিন্দুতে লম্ব। [উপ. 12]

অতএব PA ও PB একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ, A, B ও P এক সরলরেখায় অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত : যদি দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তবে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, উহাদের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান হইবে ; এবং যদি উহারা পরস্পরকে

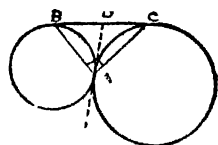
অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে, তবে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, উহাদের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান হইবে।

সংজ্ঞা : তিন বা তাহার অধিক বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে ঐ বিন্দুদের **সমরেখ** (Collinear) বলা হয়।

অনুশীলনী 21

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর ; বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। একটি সরলরেখা বৃত্তটিকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে ∠BAC একটি সমকোণ।
[W. B. S. F '62, '59, '55, '53]

মনে করা যাউক দুইটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। BC সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়োছে। প্রমাণ করিতে হইবে ∠BAC এক সমকোণ।

অঙ্কন : বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক AD, BCকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। AB ও AC যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : একইবিন্দু D হইতে DA ও DB দুইটি স্পর্শক। ∴ DA = DB

অতএব ∠DBA = ∠DAB, অনুরূপে DA = DC, ∴ ∠DAC = ∠DCA

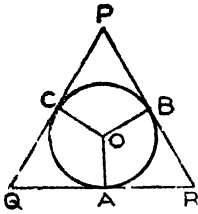
অতএব $\angle BAC = \angle ABC + \angle ACB = \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ = এক সমকোণ।

2. দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে পরস্পর A বিন্দুতে স্পর্শ করিলে, উহাদের সাধারণ স্পর্শক A বিন্দুস্থ স্পর্শকটি দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

মনে করা যাউক, দুইটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। উহাদের সাধারণ স্পর্শক AD, BCর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে BD = CD.

প্রমাণ : বহিঃস্থবিন্দু D হইতে অঙ্কিত BD ও DA স্পর্শক দুইটি সমান। অনুরূপভাবে CD = DA. ∴ BD = DA = CD। অতএব AD স্পর্শক BC স্পর্শককে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

3. কোন বৃত্তের পরিধি তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হইলে, পরিধির ছেদবিন্দু তিনটিতে অঙ্কিত স্পর্শক তিনটি একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করিবে।

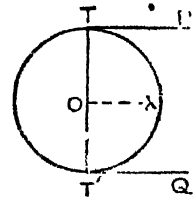
মনে করা যাউক বৃত্তের কেন্দ্র O ; এবং পরিধি A, B, C বিন্দুতে সমান তিনটি অংশে বিভক্ত হইয়াছে। A, B, C বিন্দুতে তিনটি স্পর্শক অঙ্কিত করিয়া PQR ত্রিভুজটি গঠন করা হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে PQR সমবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন : OA, OB এবং OC সংযুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : AB, AC ও BC সমান তিনটি চাপ কেন্দ্রে সমান কোণ উৎপন্ন করিবে। প্রত্যেক কোণ $=360° \div 3 = 120°$ পুনরায় AOCQ চতুর্ভুজে $\angle OAQ$ ও $\angle OCQ$ প্রত্যেকে সমকোণ, কারণ, OA, OC স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।

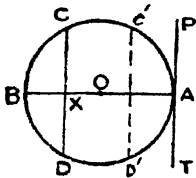
AOCQ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\therefore$ $\angle AQC + \angle AOC = 180°$. অতএব $\angle AQC = 180° - 120° = 60$ অনুরূপে প্রমাণ করা যায় $\angle P = 60°$ এবং $\angle R = 60°$ অতএব PQR সমবাহু ত্রিভুজ।

4. একটি বৃত্তের দুটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি যে সরলরেখা দ্বারা যুক্ত হয় তাহা ঐ বৃত্তের ব্যাস [W B.S.F. 1954]

মনে করা যাউক বৃত্তের কেন্দ্র O এবং PT ও QT′ দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু যথাক্রমে T ও T′। প্রমাণ করিতে হইবে T ও T′ সংযোজক সরলরেখা বৃত্তের এক ব্যাস।

অঙ্কন : O হইতে PT ও QT′ র সহিত সমান্তরাল OX সরলরেখা অঙ্কিত হইল এবং OT ও OT′ সংযুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : PT ∥ OX $\therefore$ $\angle PTO + \angle XOT = 2$ সম $\angle$, কিন্তু $\angle PTO$ এক সম $\angle$, কারণ PT স্পর্শক এবং O স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। $\therefore$ $\angle XOT$ এক সমকোণ। অনুরূপভাবে $\angle XOT'$ এক সমকোণ। অতএব $\angle XOT = \angle XOT'$ এবং উহাদের সমষ্টি 2 সম $\angle$. $\therefore$ OT ও OT′ এক সরলরেখায় অবস্থিত। সুতরাং TOT′ বৃত্তের একটি ব্যাস।

5 কোন ব্যাসের প্রান্ত বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সহিত সমান্তরাল জ্যাসমূহ ঐ ব্যাস দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে। (C. U 1915, 1919)

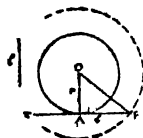
মনে করা যাউক AB একটি বৃত্তের ব্যাস, O উহার কেন্দ্র, এবং PAT স্পর্শক ব্যাসের A প্রান্তবিন্দুতে বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে এবং PAT-র সহিত সমান্তরাল CXD যে-কোন একটি জ্যা। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB, CD-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ : PAT স্পর্শকের A স্পর্শবিন্দু এবং AO স্পর্শ-বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বলিয়া $AO \perp PAT$. অতএব BOA ব্যাস $\perp$ PAT। পুনরায় PAT ∥ CD.

$\therefore$ $\angle CXO = \angle PAO =$ এক সম $\angle$. অতএব OX বা AB$\perp$CD. সুতরাং কেন্দ্র-গামী AB সরলরেখা CDর উপর লম্ব বলিয়া AB, CDকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে। PAT-র সহিত সমান্তরাল CXD যে-কোন একটি জ্যা, ATর সহিত সমান্তরাল C′D′ প্রভৃতি অন্য যে কোন জ্যাও AB দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

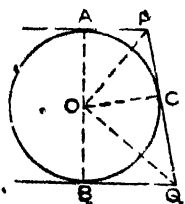
6. কোন চলমান বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকগুলি সর্বদা একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান হইলে, ঐ চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[C. U. 1922, '29, G U. '49]

ইঙ্গিত : O কেন্দ্র। OA (r) নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ। l প্রদত্ত দৈর্ঘ্য। P একটি বহিঃস্থ বিন্দু হইতে বৃত্তের উপর স্পর্শকের দৈর্ঘ l-র সমান হইবে। P-র সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে।

OA ব্যাসার্ধের A বিন্দুতে TAP লম্ব। A হইতে l-র সমান AP অংশ কাটিয়া OP যুক্ত করা হইল। কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OP লইয়া অঙ্কিত বৃত্তটি নির্ণেয় সঞ্চারপথ হইবে।

প্রমাণ : OA ব্যাসার্ধের A বিন্দুতে PAT লম্ব বলিয়া TAP, A বিন্দুতে স্পর্শক ; এবং OAP সমকোণী ত্রিভুজের OP অতিভুজ। $\therefore$ $OP^2 = OA^2 + AP = r + l^2$ বা $OP = \sqrt{r^2 + l^2}$, কিন্তু r ও l নির্দিষ্ট। . OP নির্দিষ্ট। অতএব P বিন্দুর সর্ব অবস্থায় ইহা O হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং O কেন্দ্র এবং OP বা $\sqrt{^2r\, l+}$ ব্যাসার্ধ যুক্ত বৃত্তের পরিধি বিন্দুটির সঞ্চারপথ।

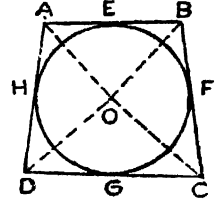
7 একটি বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক অপর একটি তৃতীয় স্পর্শকের যে অংশ ছিন্ন করে, তাহা বৃত্তটির কেন্দ্রে সমকোণ উৎপন্ন করে। [D B. 1929]

ইঙ্গিত : AP ও BQ দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক ; A ও B স্পর্শবিন্দু। অপর একটি তৃতীয় স্পর্শক PQ, PA ও BQ দ্বারা সীমাবদ্ধ ও বৃত্তকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle POQ$ এক সমকোণ ; OA, OB, OP, OQ এবং OC সংযুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : P বিন্দু হইতে PA, PC দুইটি স্পর্শক বলিয়া উহারা সমান ; OA = OC. একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং OP সাধারণ বাহু বলিয়া $\triangle APO = \triangle PCO$. $\angle OPC = \angle OPA$. অর্থাৎ $\angle OPC = \frac{1}{2}\angle APC$. অনুরূপে $\angle OQC = \frac{1}{2}\angle BQC$. $\therefore$ $\angle OPQ + \angle OQP = \frac{1}{2}\angle APQ + \frac{1}{2}\angle BQP$ $= \frac{1}{2}(\angle APQ + \angle BQP) = \frac{1}{2} \times 2$ সম $\angle$(যেহেতু AP $\parallel$ BQ) = এক সমকোণ।

$\therefore \angle POQ = 180° - (\angle OPQ + \angle OQP) = 180° - 90° = 90°$ বা এক সমকোণ।

8. কোন বৃত্তে পরিলিখিত চতুর্ভুজের কোন দুইটি বিপরীত বাহু বৃত্তটির কেন্দ্রে সম্পূরক কোণ উৎপন্ন করে।

ইঙ্গিত : বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ABCD পরিলিখিত চতুর্ভুজ। প্রমাণ করিতে হইবে যে $\angle AOB + \angle COD = 2$ সম $\angle$; OA OB, OC এবং OD সংযুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : $\angle AOB + \angle COD = 180° - \angle OAB - \angle OBA + 180° - \angle ODC - \angle OCD = 360° - (\angle OAB + \angle OBA + \angle ODC + \angle OCD) = 360° - \frac{1}{2}\ (\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360° = 360° - 180° = 180°$.

9. কোন বৃত্তে পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে-কোন দুই বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টির সমান হইবে। [W. B. S F. 1960, 1962]

মনে করা যাউক ABCD চতুর্ভুজটি বৃত্তে পরিলিখিত এবং উহার AB, BC, CD ও DA বাহু চারিটি বৃত্তকে যথাক্রমে E, F, G ও H বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, $AB + CD = BC + AD$.

প্রমাণ। A বহিঃস্থ বিন্দু হইতে AF ও AH দুইটি স্পর্শক বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে।
$\therefore AE = AH$. অনুরূপ $EB = BF$, $CG = CF$ এবং $DG = DH$.
অতএব $AE + EB + CG + DG = AH + BF + CF + DH$
$= AH + DH + BF + CF$, অর্থাৎ $AB + CD = AD + BC$.

10. কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তটিতে দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে উহাদের অন্তর্ভূক্ত কোণ, স্পর্শবিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা ও স্পর্শবিন্দু হইতে ব্যাসের অন্তর্ভূক্ত কোণের অর্ধ হইবে। [C.U. 1875]

11. কোন বৃত্তে বহিঃস্থ P বিন্দু হইতে দুইটি স্পর্শক PA ও PB, অপর একটি তৃতীয় স্পর্শকের সহিত C ও D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, CD সরলরেখা বৃত্তটির কেন্দ্রে একটি নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে। [C.U. 1932]

12. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিল। A বিন্দু দিয়া PAQ সরলরেখা পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ। প্রমাণ কর যে P ও Q বিন্দু দুইটি হইতে ব্যাসার্ধ দুইটি সমান্তরাল এবং P ও Q বিন্দুতে স্পর্শক দুইটিও সমান্তরাল।

13. কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি স্পর্শক অঙ্কিত কর। এইরূপ কয়টি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়? [C.U. 1932]

14. প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তকে চারি বাহু দ্বারা স্পর্শ করে এইরূপ একটি সামান্তরিক, রম্বস অথবা বর্গক্ষেত্র। [W.B.S.F. 1957]

15. দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের বহিঃবৃত্তটির যে সকল জ্যা অন্তঃবৃত্তকে স্পর্শ করে, তাহারা সমান এবং স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে। [C U 1904]

16. কোন বৃত্তের ABC বৃত্তাংশস্থ কোণের পরিমাণ অর্ধসমকোণ হইলে, A ও C বিন্দুদ্বয় বৃত্তটির স্পর্শক দুইটি পরস্পর লম্ব হইবে। [A U. 1934]

17. যে সকল বিন্দু হইতে 1·5′ ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কোন নির্দিষ্ট বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক সমূহের প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 2′ সেই সকল বিন্দু এক বৃত্তস্থ হইবে। [C.U 1930]

18. যে সকল বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাদের কেন্দ্রসমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C U. 1916]

19. AB একটি বৃত্তের ব্যাস। A বিন্দুতে ABর সমান AC স্পর্শক অঙ্কিত হইল। BC যুক্ত করিলে উহা বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে CD=BD এবং AD=CD. [C.U 1885]

20 দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে স্পর্শ করে এইরূপ যাবতীয় বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [D.B 1934]

21. পরস্পর অন্তঃস্পর্শকারী দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র A ও B : বৃহত্তর বৃত্তটিকে অন্তঃস্পর্শ ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে বহিঃস্পর্শ করে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা হইল। P যদি শেষোক্ত বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তাহা হইলে AP+BP ধ্রুবক হইবে।

[D B. 1935]

22 দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শকারী বৃত্তের কেন্দ্র, ঐ দুই সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণের সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। [C U. 1926]

23 C কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে P ও Q বিন্দুতে PT ও QT দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ কর যে QPT কোণ QCP কোণের অর্ধেক এবং QTP কোণ QPC কোণের দ্বিগুণ। [C.U 1884]

ইঙ্গিত: CT সংযুক্ত করা হইল। CPT, CQT=1 সম∠, ∴ CPTQ বৃত্তস্থ।

$\therefore \angle QPT = \angle QCT = \frac{1}{2}\angle QCP$, $\angle QTP = 2\angle QTC = 2\angle QPC$

24. দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে, দুইটি বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল ব্যাসের বিপরীত প্রান্তদ্বয় ও বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু সমরেখ। [C.U. 1879]

ইঙ্গিত : AB, CD, দুইটি ব্যাস, O, O′ কেন্দ্র, P স্পর্শবিন্দু এবং PT সাধারণ স্পর্শক। OP, O′P, PA, PD যুক্ত করা হইল। ∴ O, P, O′ একই সরলরেখায় অবস্থিত।

$OA = OP$. ∴ $\angle OAP = \angle OPA$, তদ্রূপ $O'P = O'D$ ∴ $\angle O'PD = \angle O'DP$.

∴ $AO \parallel DO'$ ∵ একান্তর $\angle AOP = \angle DO'P$,

অতএব $\angle OAP + \angle OPA = \angle O'PD + \angle O'DP$ অর্থাৎ $2\angle OPA = 2\angle O'PD$.

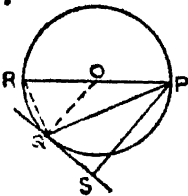
বা $\angle OPA = \angle O'PD$. ইহারা বিপ্রতীপ কোণ এবং OP ও O′P একই সরলরেখা। ∴ PA ও PD একই সরলরেখা।

25. দুইটি সমান বৃত্ত বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করিয়াছে। স্পর্শবিন্দু হইতে প্রতি বৃত্তে দুইটি জ্যা পরস্পর লম্ব। প্রমাণ কর যে জ্যাদ্বয়ের অপর প্রান্তদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা যে কোন বৃত্তের ব্যাসের সমান। [C.U. 1880]

ইঙ্গিত : P-কেন্দ্র বৃত্তে SR জ্যা R স্পর্শবিন্দু হইতে অঙ্কিত। Q-কেন্দ্র সমান বৃত্তে RT জ্যা SR-র উপর লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে ST বৃত্তের ব্যাসের সমান। PR, RQ, SP ও TQ যুক্ত করা হইল।

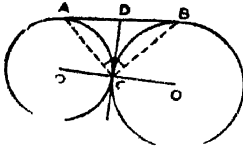
প্রমাণ : P, R ও Q একই সরলরেখায় অবস্থিত। $\angle SRT$ এক সমকোণ। ∵ $\angle SRP + \angle TRQ =$ এক সমকোণ, $PR = ST$ ∴ $\angle SRP = \angle PSR$ তদ্রূপ $\angle TRQ = \angle RTQ$, ∴ $\angle PSR + \angle RTQ =$ এক সমকোণ। ∴ $\angle SPR + \angle TQR = 2$ সম. $\angle$, $SP =$ এবং $\parallel TQ$ $ST =$ এবং $\parallel PQ = 2PR =$ বৃত্তের ব্যাস।

26. PQ ও PR একটি বৃত্তের যথাক্রমে জ্যা ও ব্যাস। বৃত্তের কেন্দ্র O ; PS, Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে PQ, SPR কোণের সমদ্বিখণ্ডক। [C.U. 1927]

ইঙ্গিত : O কেন্দ্রযুক্ত বৃত্তের PQ জ্যা, R ব্যাস। PS, Q বিন্দুতে QS স্পর্শকের উপর লম্ব। প্রমাণ করিতে হইবে PQ $\angle SPR$ এর সমদ্বিখণ্ডক। RQ ও OQ যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : Q স্পর্শবিন্দু হইতে অঙ্কিত $OQ \perp QS$. PQS সমকোণী ত্রিভুজে $\angle PSQ$ এক সমকোণ, ∵ $\angle QPS + \angle PQS =$ এক সমকোণ। $\angle OQP + \angle PQS =$ P সমকোণ ∴ $\angle OQP + \angle PQS = \angle QPS + \angle PQS$ বা, $\angle OQP$

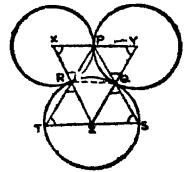
$=\angle QPS$ কিন্তু ব্যাসার্ধ $OP=OQ$ $\therefore$ $\angle OPQ=\angle OQP$ $\therefore$ $\angle OPQ$ $=\angle QPS$ অর্থাৎ PQ, $\angle SPR$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

27. দুইটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। একটি সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখা AB ব্যাস যুক্ত বৃত্তের স্পর্শক হইবে।

ইঙ্গিত : O এবং O′ কেন্দ্রের দুইটি বৃত্ত C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। AB একটি সাধারণ স্পর্শক বৃত্ত দুইটিকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে AB ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্তের OO′ একটি স্পর্শক হইবে।

অঙ্কন : স্পর্শবিন্দু C-তে একটি সাধারণ স্পর্শক অঙ্কিত করা হইল ; উহা ABকে D বিন্দুতে ছেদ করিল, AC, BC, OC, O′C যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : O, C ও O′ একরেখায় অবস্থিত। CD স্পর্শক OCর উপর লম্ব, অর্থাৎ OO′র উপর লম্ব। $DB=DC=AD$, বহিঃস্থ বিন্দু D হইতে অঙ্কিত স্পর্শক সমান বলিয়া। $\angle ACB=1$ সম অতএব AB ব্যাসযুক্ত বৃত্ত C বিন্দু দিয়া অবশ্যই যাইবে। [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সম $\angle$ বলিয়া : ঐ বৃত্তের DC ব্যাসার্ধ এবং DC-র C বিন্দুতে OCO লম্ব বলিয়া OCO′ ঐ বৃত্তের C বিন্দুতে একটি স্পর্শক হইবে।

28 তিনটি বৃত্ত বহিঃস্থভাবে P, Q ও R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। PQ ও PR বর্ধিত করিয়া একটি বৃত্তকে S ও T বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর অন্য বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখার সহিত ST সমান্তরাল।

মনে করা যাউক তিনটি বৃত্তের কেন্দ্র X, Y ও Z X ও Y কেন্দ্রযুক্ত বৃত্ত P বিন্দুতে, Y ও Z কেন্দ্রযুক্ত বৃত্ত Q বিন্দুতে এবং Z ও X কেন্দ্রযুক্ত বৃত্ত R বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে। PQ ও PR বর্ধিত করিয়া Z কেন্দ্রযুক্ত বৃত্তকে S ও T বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ করিতে হইবে $ST \parallel XY$.

অঙ্কন : TZ, SZ, XY, YZ ও ZX যুক্ত করা হইল।

প্রমাণ : ZSQ ত্রিভুজে $ZS=ZQ$, ব্যাসার্ধ বলিয়া।

$\therefore$ $\angle ZSQ=\angle ZQS=$ বিপ্রতীপ $\angle PQY=\angle QPY$

($\because$ $PY=YQ$)

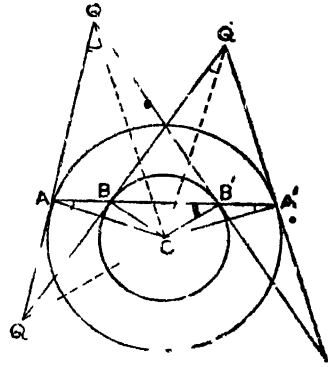
অর্থাৎ $\angle ZSQ=\angle QPY$ কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ। $\therefore$ $ZS \parallel PY$.

অনুরূপ $ZT \parallel PX$. ZT ও ZS একই সরলরেখা ST. $\therefore$ $ST \parallel XY$.

যদি কোন সরলরেখা C কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তকে A, A′ এবং B, B′ বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে A বিন্দুতে স্পর্শক B ও B বিন্দুতে স্পর্শকের সহিত যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং B বিন্দুতে স্পর্শক A ও A′ বিন্দুতে স্পর্শকের সহিত যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, এই কয়টি বিন্দু আর একটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের উপরে থাকিবে।

মনে করা যাউক C কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তকে একটি ছেদক A, A′ ও B, B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দুতে স্পর্শক B ও B বিন্দুতে স্পর্শকের সহিত Q ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। B বিন্দুতে স্পর্শক A ও A′ বিন্দুতে স্পর্শকের সহিত Q Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে Q, Q′ ও Q একটি বৃত্তে অবস্থিত।

অঙ্কনঃ CQ, CQ′ ও CQ যুক্ত করা হইল। এবং ব্যাসার্ধ CA, CA′, CB ও CB অঙ্কিত হইল।

প্রমাণঃ CBQ A′ চতুর্ভুজের ∠CBQ ∠CA′Q, প্রত্যেকে সমকোণ। চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ। . ∠CQ B = ∠CA B একই চাপ BCর উপর অবস্থিত। পুনরায় ABCQ চতুর্ভুজের CBQ – ∠CAQ প্রত্যেকে সমকোণ। ABCQ বৃত্তস্থ। অতএব ∠CAB = ∠CQB, একই চাপ BCর উপর অবস্থিত। একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ CA = CA CAB – ∠CAB′ অতএব ∠CQB = ∠CQ′B CQ – CQ′; অর্থাৎ C কেন্দ্র হইতে Q ও Q, সমদূরে অবস্থিত। অনুরূপে প্রমাণ করা যায় CQ = CQ′ অতএব Q Q ও Q আর একটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তে অবস্থিত।

(30) দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দু দিয়া PAQ সরলরেখা দুইটি পরিধিতে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। P ও Q বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক R বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর যে ∠PRQ A-বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণের সমান।

মনে করা যাউক C ও C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে PAQ সরলরেখা বৃত্তের পরিধিতে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। P ও Q বিন্দুতে

3

বৃত্তাঙ্কন

Construction of Circles

১। [illegible] অঙ্কন করিতে হইলে [illegible] কেন্দ্রের অবস্থান ও ব্যাসার্ধের পরিমাপ [illegible] প্রদত্ত উপাত্ত (Data) হইতে নির্ণয় করিতে হবে।

[illegible] সঞ্চারপথের ছেদবিন্দুই কেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় করে। সুতরাং কেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় করিবার জন্য দুইটি ভিন্ন উপাত্ত প্রয়োজন, এবং ব্যাসার্ধের পরিমাপ নির্ণয় করিবার জন্য একটি উপাত্ত প্রয়োজন। সুতরাং একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত অঙ্কনের জন্য মোট তিনটি পৃথক উপাত্ত প্রয়োজন।

প্রয়োজনের জন্য নিম্নোক্ত সঞ্চারপথের সম্যক জ্ঞান অপরিহার্য।

1 দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডক।

2 দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ, সরলরেখার অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের দুইটি সমদ্বিখণ্ডক।

3 কোন সরলরেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শকারী বৃত্তগুলির কেন্দ্রসমূহ সরলরেখার ঐ বিন্দুতে লম্বের উপর থাকিবে।

4 কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শকারী বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র ও নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা।

5 একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শকারী বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ ব্যবধানে সরলরেখার উভয় পার্শ্বে দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা।

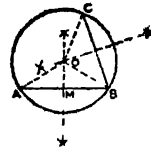
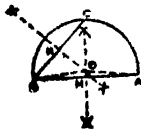
6 দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখা স্পর্শকারী বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ ঐ নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে সমদূরে অবস্থিত আর একটি সমান্তরাল সরলরেখা।

7 কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শকারী নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ আর একটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের পরিধি যাহার ব্যাসার্ধ ঐ বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টি বা অন্তরের সমান।

3·2. প্রদত্ত নিয়মাধীন বৃত্তাঙ্কনের কয়েকটি উদাহরণ নিম্নের অনুশীলনীতে প্রদত্ত হইল। ইহাদের মধ্যে কয়েকটির কেবলমাত্র অঙ্কনপদ্ধতি প্রদত্ত হইল আশা করা যায় বিশেষ নির্বচন ও প্রমাণ শিক্ষার্থীরা নিজেরাই লিখিতে পারিবে।

অনুশীলনী 13

[1 হইতে 15 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ।]

1. কোন নির্দিষ্ট বৃত্ত বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র নির্ণয় কর

মনে করা যাউক ABC বৃত্ত বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

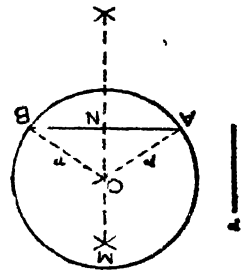
অঙ্কন : ABC চাপের উপর যে কোন A, B, C তিনটি বিন্দু লইয়া AB ও BC জ্যা অঙ্কিত হইল। AB ও BC জ্যাদ্বয়ের OM ও ON লম্বদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে ছেদ করিল। O ই নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র।

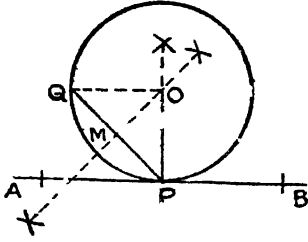
প্রমাণ : O, ABর লম্বদ্বিখণ্ডক OMর উপর অবস্থিত বলিয়া OA = OB এবং O, BCর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত বলিয়া OB = OC অতএব O বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী বলিয়া উহা প্রদত্ত বৃত্ত বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

2. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। [C. U 1922]

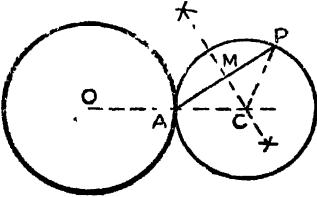
মনে করা যাউক A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ।

অঙ্কন : ABর লম্বদ্বিখণ্ডক MN অঙ্কিত হইল। A কিংবা Bকে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ MN কে O বিন্দুতে ছেদ করিলে Oই উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং OA বা OB বা r ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তটি অঙ্কিত হইল।

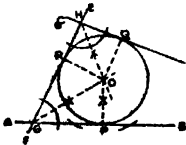
r যদি $\frac{1}{2}$ AB অপেক্ষা ক্ষুদ্র হয় বৃত্তাঙ্কন অসম্ভব হইবে। [প্রমাণ কর]

3. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এইরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

মনে করা যাউক AB সরলরেখার P নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ABর বহির্দেশে Q একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। AB সরলরেখাকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে ও Q বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : PQ যুক্ত করিয়া PQর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক MO ও ABর P বিন্দুতে OP লম্ব অঙ্কিত হইল। উহারা O বিন্দুতে ছেদ করিলে Oকে কেন্দ্র ও OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত Q বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ABকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। [প্রমাণ কর]।

4 একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ বৃত্ত অঙ্কিত কর।

ইঙ্গিত : P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এবং A বৃত্তের পরিধির উপর নির্দিষ্ট বিন্দু।

অঙ্কন : OA যুক্ত করিয়া বর্ধিত করা হইল। AP যুক্ত করিয়া উহার লম্ব-দ্বিখণ্ডক CM বর্ধিত OAকে C বিন্দুতে ছেদ করিল। C-কে কেন্দ্র করিয়া CA বা CP ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কিত হইল। [প্রমাণ]

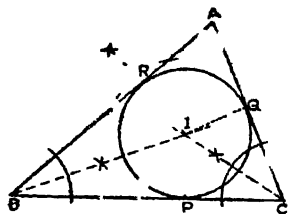
5. সমবিন্দু কিংবা সমান্তরাল নহে এরূপ তিনটি সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

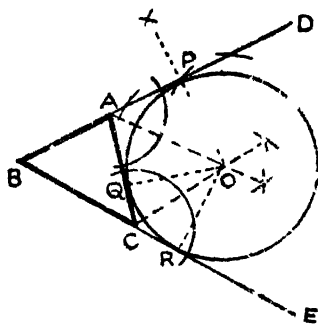
মনে করা যাউক AB, CD ও EF এরূপ তিনটি সরলরেখা যাহারা সমবিন্দু নহে কিংবা সমান্তরাল নহে। একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যাহা AB, CD ও EFকে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন : মনে করা যাউক AB ও EF, G বিন্দুতে এবং CD ও EF, H বিন্দুতে ছেদ করে। ∠BGH-কে GO দ্বারা এবং ∠DHG-কে HO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া ঐ সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O-তে মিলিত হইল। O হইতে ABর উপর OP লম্ব অঙ্কিত হইল। Oকে কেন্দ্র করিয়া OP ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত AB, CD ও EFকে স্পর্শ করিবে। [প্রমাণ কর]

6 এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা ও উহাদের ছেদককে স্পর্শ করে।

7 ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন কর।

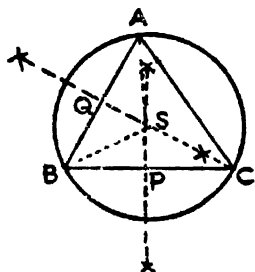
ABC ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

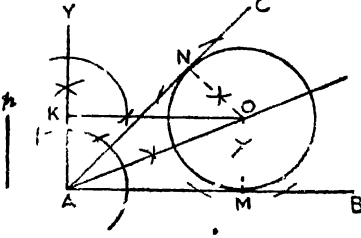
অঙ্কন : ∠ABC ও ∠ACBকে যথাক্রমে BI ও CI দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হইল। উহারা I বিন্দুতে মিলিত হইল। I হইতে AB বাহুর উপর IR লম্ব অঙ্কিত হইল। I-কে কেন্দ্র করিয়া IR ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহাই ABC ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্ত হইবে। I অন্তঃকেন্দ্র এবং IR অন্তঃব্যাসার্ধ।

প্রমাণ : ∠ABCর সমদ্বিখণ্ডকের উপর I অবস্থিত, IR=IP, তদ্রূপ, IP=IQ অতএব IP=IQ=IR পুনরায়, AB, BC, CA-র R, P ও Q বিন্দুতে যথাক্রমে IR, IP ও IQ লম্ব বলিয়া ত্রিভুজের বাহুত্রয় বৃত্তের R, P ও Q বিন্দুতে স্পর্শক।

8 কোন ত্রিভুজের একটি বহিঃবৃত্ত অঙ্কিত কর।

অঙ্কন : ABC ত্রিভুজের BA ও BC বাহু যথাক্রমে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া ∠DAC-কে AO দ্বারা এবং ∠ACE-কে CO দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত করা হইয়াছে। সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইল। O হইতে ADর উপর OP লম্ব অঙ্কিত হইল। Oকে বহিঃকেন্দ্র এবং OPকে বহিঃব্যাসার্ধ লইয়া বহিঃবৃত্ত অঙ্কিত করিলে উহা ACকে এবং বর্ধিত BA ও BCকে স্পর্শ করিবে। [প্রমাণ কর।]

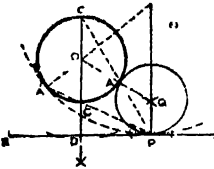
9 কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে করা যাউক ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : QS এবং PS যথাক্রমে AB ও BCর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কিত করা হইল। যেহেতু A, B ও C এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে; এই লম্বদ্বয় সমান্তরাল নহে। ইহারা S বিন্দুতে ছেদ করিল। Sকে পরিকেন্দ্র করিয়া SAকে পরিব্যাসার্ধ লইয়া ABC পরিবৃত্তটি অঙ্কিত করিলে উহা A, B, C শীর্ষবিন্দু দিয়া যাইবে। [প্রমাণ কর]

10. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন কর। [C U. 1918, 1918, 1928]

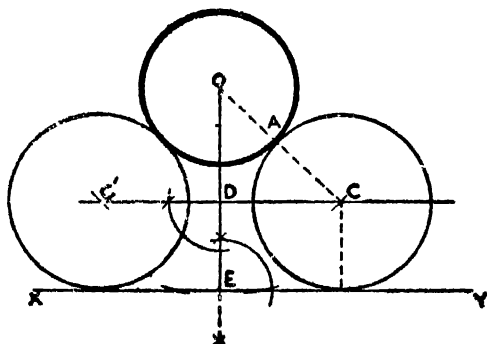
মনে করা যাউক AB ও AC সরলরেখা A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে এবং p ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য। p ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা AB ও ACকে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন: ∠BACর সমদ্বিখণ্ডক AO অঙ্কিত করা হইল। AB এর উপর A বিন্দুতে AY লম্ব অঙ্কন করিয়া উহা হইতে p-এর সমান AK অংশ কাটিয়া ABর সমান্তরাল KO সরলরেখা সমদ্বিখণ্ডক AOকে O বিন্দুতে ছেদ করিল। O হইতে ABর উপর OM লম্ব অঙ্কিত হইল। Oকে কেন্দ্র করিয়া OM ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত। [প্রমাণ কর।

11 একটি বৃত্তকে স্পর্শ করিয়া এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

মনে করা যাউক XY সরলরেখার P নির্দিষ্ট বিন্দু এবং নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O। এরূপ বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা XYকে P বিন্দুতে এবং O কেন্দ্রিক বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। [W B. S F. 1965]

অঙ্কন: OD⊥XY এবং FQR⊥XY অঙ্কিত হইল। OD বৃত্তকে C, C′ বিন্দুতে ছেদ করিল। PC ও PC′ যুক্ত করিলে উহারা প্রদত্ত বৃত্তকে A ও A বিন্দুতে ছেদ করিল। OA এবং A′O বর্ধিত করিয়া PQR তে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করিল। Q কেন্দ্র ও QP ব্যাসার্ধ যুক্ত বৃত্তকে স্পর্শ ও XYকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। R কেন্দ্র ও RP ব্যাসার্ধ যুক্ত বৃত্ত অন্তঃস্থভাবে নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ ও XY কে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

প্রমাণ: CD ও RP উভয়েই XYর উপর লম্ব। ∴ CD ∥ RP. ∴ ∠DCP = একান্তর ∠CAR OC=OA (ব্যাসার্ধ) ∴ ∠OCA=∠OAC=বিপ্রতীপ ∠PAQ=∠APQ ∴ AQ=PQ এবং O, A, Q এক সরলরেখায় অবস্থিত। ∴ A বিন্দুতে উহাদের সাধারণ স্পর্শক থাকিবে। QP⊥XY, অতএব Q কেন্দ্র ও QP ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্ত প্রদত্ত বৃত্তকে A বিন্দুতে ও XYকে P বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

12. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা ও নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

XY নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র। r নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ।

অঙ্কন: OE⊥XY এবং OE হইতে ED$=r$ অংশ কাটিয়া লওয়া হইল: CDC′ ∥ XY অঙ্কিত হইল। Oকে কেন্দ্র করিয়া নির্দিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ$+r$ কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত করিলে উহা CDC′ কে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করিবে। C ও C′ কে কেন্দ্র করিয়া r ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত হইবে। [প্রমাণ দাও]

13. কোন বৃত্তচাপকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

14. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং ঐ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর।

15. দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর।

16. একটি নির্দিষ্ট বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সহিত সদৃশকোণ করিয়া একটি ত্রিভুজ পরিলিখিত কর।

17. ABC ত্রিভুজের O অন্তঃকেন্দ্র। যদি AB = 2′, BC = 3′ এবং CA = 4″ হয়, তবে OAর দৈর্ঘ্য মাপিয়া বাহির কর। (Ans. 2·1′) [C U. 1930]

18. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যেন তাহা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

19. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যেন উহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকে। [G. U. 1926]

20. AB = 4·8 সে. মি. এবং 3 সে. মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও Bর মধ্য দিয়া যায়। ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ABর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। (Ans. 1·8) [W.B.S.F. 1952]

21. OA, OB দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা এবং C, OA সরলরেখার উপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর যাহা DA-কে C বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং OB-কেও স্পর্শ করিবে। [C. U. 1870]

22. দুইটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এরূপ দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহারা পরস্পর স্পর্শ করিবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একই দিকে স্পর্শ করিবে।

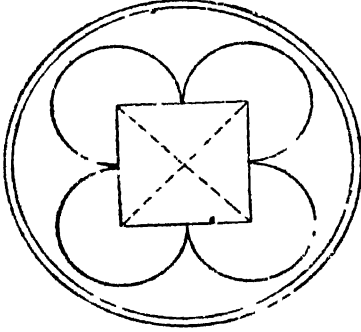
23 একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে। কখন অঙ্কন অসম্ভব হইবে ?

24 বিভিন্ন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহারা বহিঃস্থভাবে পরস্পর স্পর্শ করিবে।

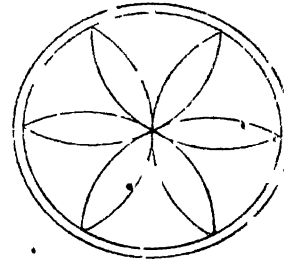
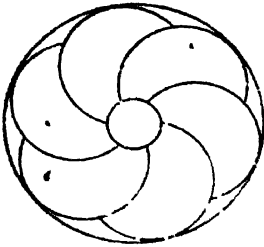
4

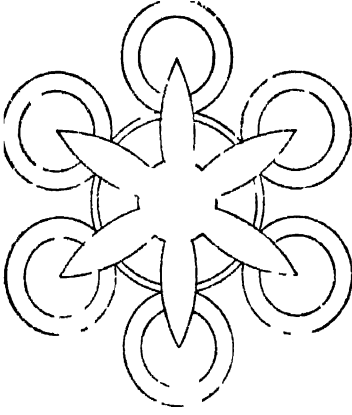
জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে নমুনা অঙ্কন

Designs and Geometrical Figures

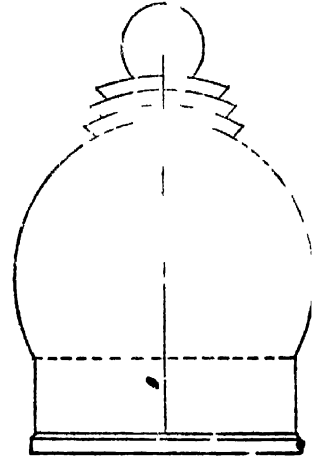
4·1. জ্যামিতির যন্ত্রের বাক্সে যে সকল যন্ত্রাদি আছে তাহাদের দ্বারা অনেক প্রকার সুন্দর জ্যামিতিক নক্সা ও চিত্র অঙ্কন করা যায়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ প্রদত্ত হইল

১ নং চিত্র

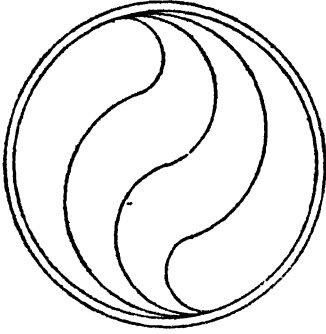
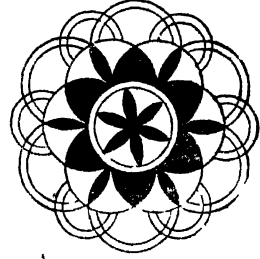
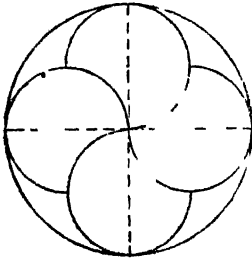
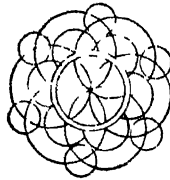
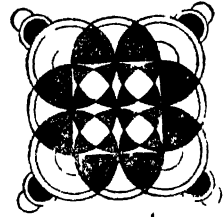
উদাহরণ 1. একটি বর্গক্ষেত্র আঁকিয়া উহার কৌণিক বিন্দুদের কেন্দ্র করিয়া ও বাহুর অর্ধ ব্যাসার্ধ লইয়া বাহিরে চারিটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল, বিভিন্ন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সুন্দর চিত্র হইবে

উদাহরণ 2 একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া উহার পরিধির কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত হইল। ঐ চাপ পূর্বের বৃত্তের পরিধিকে যে দুইটি স্থানে ছেদ করিল তথায় কেন্দ্র করিয়া বৃত্তচাপ অঙ্কন করিয়া যাইলে পর পার্শ্বের চিত্রের ন্যায় একটি সুন্দর নক্সা প্রস্তুত হইবে।

২ নং চিত্র

৩ নং চিত্র

দাহরণ 3. কয়েকটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত করিয়া সুন্দর নক্সাটি প্রস্তুত হইয়াছে

৪ নং চিত্র

উদাহরণ 4 ২ নং চিত্রের ন্যায় অঙ্কন করিয়া যাইতে হইবে। এখানে বৃত্তের বাহিরেও অঙ্কন করিয়া প্রধান বৃত্তটি মুছিয়া দিলে একটি সুন্দর ফুলের নক্সা হইবে।

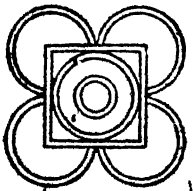
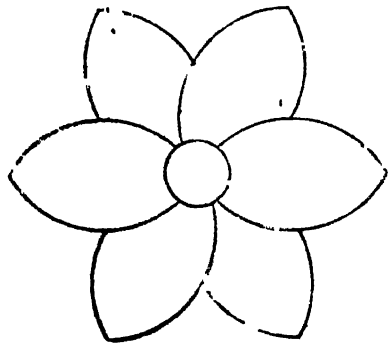
উদাহরণ 5 কয়েকটি বৃত্তের দ্বারা একটি মসজিদের গম্বুজের নক্সা অঙ্কিত হইয়াছে। উপরের বৃত্তচাপগুলি এককেন্দ্রিক বৃত্তচাপ। মধ্যস্থলের উল্লম্ব সরলরেখা মাপিবার সুবিধার জন্য অঙ্কিত হইয়াছে পরে ইহা মুছিয়া দিলে সুন্দর একটি গম্বুজের নক্সা হইবে।

৫ নং চিত্র

নিম্নে আরও কয়েকটির নক্সা প্রদত্ত হইল। অঙ্কন পদ্ধতি নির্ণয় করিয়া খাতায় দ্বিগুণ কিংবা তিনগুণ আকারে অঙ্কিত কর।

৬ নং চিত্র

৭ নং চিত্র

৮ নং চিত্র

৯ নং চিত্র

১০ নং চিত্র

১১ নং চিত্র

১২ নং চিত্র

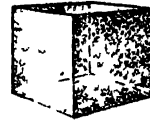
5

জ্যামিতিক ঘন ও তাহার ব্যাখ্যা

Models of Geometrical Figures

5. কয়েকটি কাষ্ঠনির্মিত জ্যামিতিক ঘনবস্তুর আলোচনা করা হইতেছে।

5·1 **সমকোণী চৌপল বা আয়তন** (Rectangular Parallelopiped): যে ঘনর প্রতিটি তল আয়তক্ষেত্র এবং বিপরীত তলগুলি সমান আকারের ও সমান্তরাল তাহাকে 'সমকোণী চৌপল' বলে। ইহার ছয়টি তল, আটটি কোণ ও বারটি ধার আছে।

সমকোণী চৌপল

5·2 **ঘনক** (Cube): এই সমকোণী চৌপলের প্রতিটি তল বর্গক্ষেত্র এবং বিপরীত তল সমান ও সমান্তরাল। ইহার সব কোণগুলি সমকোণ। ইহারও ছয়টি তল, আটটি কোণ ও বারটি ধার আছে।

ঘনক

5·3. **প্রিজম্** (Prism): যে ঘনক সমতল দ্বারা গঠিত তাহাকে বহুতলক বলে। এইরূপ যে বহুতলকের পার্শ্বতলগুলির প্রত্যেকটি সামান্তরিক এবং প্রান্ততল দুইটি সমান্তরাল সমতলে অবস্থিত সর্বসম ঋজুরেখক্ষেত্র তাহাকে 'প্রিজম্' বলে। পার্শ্বতলগুলি আয়তক্ষেত্র হইলে উহাকে **সমকোণী লম্ব প্রিজম** (Right Prism) বলে। প্রান্ততল দুইটি সর্বসম ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ বা বহুভুজ হইতে পারে, কিন্তু ইহারা সর্বদা সমান্তরাল ও সর্বসমক্ষেত্র।

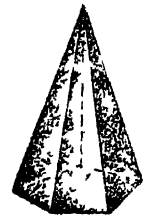
প্রিজম্

5·4. **লম্ব বৃত্তাকার চোঙ বা বেলন** (Right Circular Cylinder): কোন আয়তক্ষেত্র তাহার একটি দৈর্ঘ্যকে অক্ষ ধরিয়া এক পাক ঘুরিয়া আসিলে লম্ব বৃত্তাকার-চোঙের গঠন হয়। ইহার প্রান্ততল দুইটি সর্বসম সমান্তরাল বৃত্ত ও পার্শ্বতল একটি বক্রতল। একটি গোল পেন্সিলের এক অংশ কাটিলে আমরা বেলন পাই।

বেলন

5·5 **শঙ্কু** (Cone) : সমতলে অবস্থিত কোন ক্ষেত্রের পরিসীমায় অবস্থিত প্রতিটি বিন্দু যদি ঐ সমতলের বহিঃস্থ কোন বিন্দুর সহিত সরলরেখা দ্বারা সতত সংযুক্ত থাকে তাহা হইলে শঙ্কু উৎপন্ন হয়। সমতলে অবস্থিত ক্ষেত্রটি বৃত্ত হয় এবং নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উল্লম্বরেখা যে বৃত্তটির কেন্দ্রে লম্ব হয় তাহাকে **লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু** (Right Circular Cone বলে সমতল ক্ষেত্রটি শঙ্কুর ভূমি এবং নির্দিষ্ট বিন্দুটি উহার শীর্ষ। ইহার পার্শ্বতলটি বক্রতল এবং প্রান্ততলটি একটি বৃত্ত। কোন সমকোণী ত্রিভুজ তাহার সমকোণ সংলগ্ন যে কোন একটি বাহুকে অক্ষ ধরিয়া একবার ঘুরিয়া আসিলেও লম্ববৃত্তাকার শঙ্কু উৎপন্ন করে।

শঙ্কু

5·6 **পিরামিড** (Pyramid) : যে ঘনের একটি তল ঋজুরেখ ক্ষেত্র এবং ঐ ক্ষেত্রের প্রতিটি বাহুর উপর সমশীর্ষ ত্রিভুজাকৃতি তল দ্বারা পার্শ্বতল গঠিত তাহাকে 'পিরামিড' বলে। ত্রিভুজাকৃতি পার্শ্বতলগুলি যে বিন্দুতে মিলিত হয় তাহাকে **শীর্ষ** (Vertex) বলে এবং প্রান্ততলকে পিরামিডের **ভূমি** (Base) বলে। প্রান্ততলটি সুষম বহুভুজ এবং শীর্ষ হইতে ঐ তলের উপর লম্ব বহুভুজের কেন্দ্রগামী হইলে ইহাকে **লম্ব পিরামিড** (Right Pyramid) বলে। ইহা না হইলে **তির্যক পিরামিড** (Oblique Pyramid) বলে।

পিরামিড

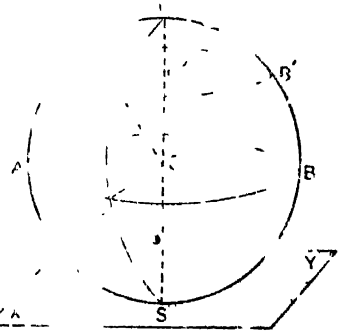
5·7 **গোলক** (Sphere) : যে ঘনক একটিমাত্র তল দ্বারা সীমাবদ্ধ এবং যাহার অভ্যন্তরে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ বক্রতলের সকল বিন্দুই সমদূরবর্তী তাহাকে 'গোলক' বলে। নির্দিষ্ট বিন্দুই গোলকের **কেন্দ্র** (Centre)। কেন্দ্র হইতে বক্রতল পর্যন্ত সকল সরলরেখা উহার ব্যাসার্ধ এবং ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ গোলকের ব্যাস।

গোলক

6

গোলক জ্যামিতি

Geometry of Sphere

6·1. কোনও অর্ধবৃত্তের ব্যাসের চতুর্দিকে অর্ধপরিধিকে একবার ঘুরাইয়া আনিলে যে ঘন বস্তু উৎপন্ন হয় তাহাকে **গোলক বর্তুল** (Sphere) বলে। NC'CS অর্ধবৃত্তের NS ব্যাসকে স্থির রাখিয়া উহার চতুর্দিকে NC'CS অর্ধপরিধিকে ঘুরাইয়া গোলকটি উৎপন্ন হইয়াছে। অর্ধপরিধিটি যে বক্রতল সৃষ্টি করিয়াছে তাহাকে গোলকের **বক্রপৃষ্ঠ** বা **বক্রতল** (Curved surface) বলে। গোলকের ভিতরে এমন একটি বিন্দু (O) আছে যাহা গোলক পৃষ্ঠের সর্ববিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। এই দূরত্বকে গোলকের **ব্যাসার্ধ** (Radius) এবং বিন্দুটিকে গোলকের **কেন্দ্র** (Centre) বলে। চিত্রে OC ব্যাসার্ধ এবং O কেন্দ্র।

যে সরলরেখা গোলকের পৃষ্ঠের যে কোন বিন্দু হইতে কেন্দ্রের ভিতর দিয়া গোলকপৃষ্ঠের অপর বিন্দু পর্যন্ত বিস্তৃত, তাহাকে গোলকের **ব্যাস** (Diameter) **বলে**। স্পষ্টতঃ ব্যাসার্ধের দ্বিগুণই ব্যাস। উপরের চিত্রে NS একটি ব্যাস।

6·2. **গোলক বিষয়ক কয়েকটি জ্যামিতিক তথ্য** :

1. সমতল দ্বারা গোলককে ছেদ করিলে, ঐ তলে গোলকের বক্রপৃষ্ঠ দ্বারা সীমাবদ্ধ ছেদকতলের অংশ সর্বদাই একটি বৃত্ত হইবে। ছেদকতলটি কেন্দ্রগামী হইলে বৃত্তটি সর্ববৃহৎ বৃত্ত হইবে এবং উহাকে **গুরুবৃত্ত** (Great Circle) এবং কেন্দ্রগামী না হইলে বৃত্তটিকে **লঘুবৃত্ত** (Small Circle) বলে। ACB গুরুবৃত্ত এবং A'C'B' লঘুবৃত্ত।

2. গোলকের কেন্দ্রের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সমতলের উভয় পার্শ্বে গোলকটি **প্রতিসম** হইবে, এবং সমতলটি গোলককে দুইটি সর্বসম অর্ধগোলকে (Hemisphere) বিভক্ত করিবে। ABCO তলটি দুইটি সর্বসম অর্ধগোলক সৃষ্টি করিয়াছে—একটি উপরে ACBON, অপরটি নিম্নে ACBOS.

3 যে কোনও দুইটি বিন্দুর মধ্য দিয়া অসংখ্য গোলক অঙ্কিত করা যায় এবং উহাদের কেন্দ্রসমূহ একই সমতলে থাকিবে।

4. গোলকের কেন্দ্রগামী কোনও ছেদকতলের কেন্দ্রের উপর লম্ব ব্যাসকে **অক্ষ** (Axis) ও উহার বক্রতলের ছেদবিন্দুকে **মেরুবিন্দু** (Poles) বলা হয়। NS অক্ষ এবং N ও S মেরুবিন্দুদ্বয়।

5. একই সমতলে অবস্থিত নহে এইরূপ যে কোনও চারিটি বিন্দু দিয়া একটি মাত্র গোলক অঙ্কিত করা যায়।

6. গোলকের কোনও ব্যাসের প্রান্তবিন্দুতে ঐ ব্যাসের উপর লম্ব ভাবে সংলগ্ন সমতলকে গোলকের **স্পর্শতল** (Tangentid plane) বলে। XY স্পর্শতল।

7. গোলকের বক্রতলের যে কোনও দুইটি বিন্দু কেন্দ্রের সহিত যুক্ত করিলে ঐ ব্যাসার্ধ দুইটি কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে বিন্দু দুইটির **কৌণিক দূরত্ব** (Angular distance) বলে। C ও C′ বিন্দু দুইটির কৌণিক দূরত্ব $\angle COC'$। $\angle COC'$ কে **গোলকীয় কোণ** (Spherical angle) বলে।

8. গোলকের বক্রতলের যে কোনও বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বিভিন্ন ব্যাসার্ধ লইয়া কয়েকটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে বৃত্তগুলির পরিধির ব্যবধান সর্বদা সমান থাকিবে এবং উহাদের তলগুলি সমান্তরাল থাকিবে।

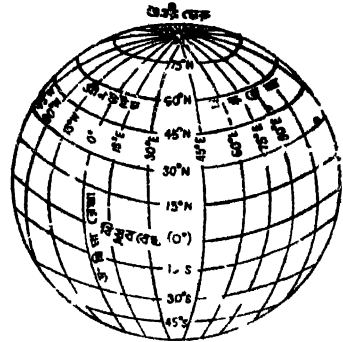
9. গোলকের বক্রতলে যে কোনও দুইটি গুরুবৃত্ত সর্বদা সমদ্বিখণ্ডিত হয় এবং ছেদবিন্দু দুইটির সংযোজক সরলরেখা গোলকের ব্যাস হইবে।

10. দুইটি গোলক পরস্পর ছেদ করিলে ছেদতলটি বৃত্ত হইবে এবং গোলকের কেন্দ্র সংযোজক সরলরেখাটি ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে লম্ব হইবে। সুতরাং ঐ ছেদতলের বৃত্তের কেন্দ্র এবং গোলকদ্বয়ের কেন্দ্র দুইটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

6·3. **পৃথিবীর আকৃতি :** পৃথিবীর আকৃতি প্রায় গোলকের ন্যায়। যদিও ইহা উত্তর-দক্ষিণ অংশে কিঞ্চিৎ চাপা কিন্তু আমরা ইহাকে গোলাকৃতি বলিয়া থাকি। পৃথিবীর কেন্দ্রের মধ্য দিয়া যে কাল্পনিক ব্যাসের চতুর্দিকে পৃথিবী দৈনিক আবর্তন করে তাহাকে পৃথিবীর **অক্ষ** (Axis of the Earth) বা **মেরুরেখা** (Polar Axis) বলে। এই অক্ষ ভূপৃষ্ঠে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে তাহাদের **মেরু** (Poles) বলে। উত্তর দিকেরটি **উত্তরমেরু** বা **সুমেরু** (North pole) এবং দক্ষিণ দিকেরটি **দক্ষিণমেরু** বা **কুমেরু** (South pole) বলে।

পৃথিবীর কেন্দ্র মেরুরেখা যে তলের উপর লম্ব সেই গুরুবৃত্তলকে **বিষুবাবৃত্ততল** বা **নিরক্ষীয়বৃত্ততল** (Plane of Equator) এবং ঐ গুরুবৃত্তের পরিধিকে

(WGE) **বিষুবরেখা** বা **নিরক্ষরেখা** (Equator) বলে। বিষুববৃত্ততল ভূগোলককে দুইটি সমান অংশে বিভক্ত করে। উত্তরের অর্ধাংশকে **উত্তর গোলার্ধ** (Northern Hemisphere) ও দক্ষিণের অর্ধাংশকে **দক্ষিণ গোলার্ধ** (Southern Hemisphere) বলে। বিষুবরৃত্ততলের উপর যে কোনও ব্যাসের দৈর্ঘ্য 8169 মাইল এবং মেরুরেখার দৈর্ঘ্য 8196 মাইল, পৃথিবীর বিরাট আয়তনের তুলনায় এই 27 মাইলের পার্থক্য অতি নগণ্য বলিয়া পৃথিবীকে গোলক বলিয়াই ধরা হয়। প্রকৃতপক্ষে ইহা একটি অভিগত গোলাকৃতি (Oblate Spheroid)।

6·4 **অক্ষাংশ ও সমাক্ষরেখা :** ভূপৃষ্ঠে কোন স্থান হইতে যে কাল্পনিক ব্যাসার্ধ ভূকেন্দ্রে বিষুববৃত্ততলে যে কোণের সৃষ্টি করে উহাকে ঐ স্থানের **অক্ষাংশ** (Latitude) বলে। ঐ কাল্পনিক ব্যাসার্ধ বিষুববৃত্ততলে সর্বদা একই কোণ করিয়া ঘুরিতে থাকিলে ভূপৃষ্ঠে যে বৃত্তের সৃষ্টি করে তাহাকে **সমাক্ষরেখা**। (Parallels of Latitude) বলে। বস্তুতঃ ইহারা বিষুব-রেখার সহিত সমান্তরাল এবং এই একই বৃত্তের উপর সকল স্থানের অক্ষাংশ সমান। মেরুরেখা বিষুববৃত্ততলে 90° কোণ করিয়া আছে বলিয়া প্রতি ডিগ্রী কোণ করিয়া উত্তর গোলার্ধে নব্বুইটি **উত্তর সমাক্ষরেখা** ও দক্ষিণগোলার্ধে তদ্রূপ নব্বুইটি **দক্ষিণ সমাক্ষরেখা** কল্পনা করা হয়। ডিগ্রী সমাক্ষরেখাকে পুনরায় মিনিট ও সেকেণ্ড প্রভৃতিতে বিভক্ত করা হয়। সেইজন্য কোন স্থানের অক্ষাংশ উত্তর কিংবা দক্ষিণ বলিলে তাহা উত্তর বা দক্ষিণ গোলার্ধ বুঝা যায়।

6·5. **দ্রাঘিমারেখা বা মধ্যরেখা :** কল্পিত মেরুরেখাকে ব্যাস করিয়া যে সকল অর্ধবৃত্তের পরিধি উভয়মেরু পর্যন্ত বিস্তৃত এবং বিষুবরেখাকে ভূপৃষ্ঠের উপর সমকোণে ছেদ করে, তাহাদের **দ্রাঘিমারেখা** বা **মধ্যরেখা** (Line of Longitude বা Meridian) বলে। একই দ্রাঘিমার উপর অবস্থিত স্থানগুলির একই সময়ে মধ্যাহ্ন (Noon) হয়। বৃটিশ দ্বীপপুঞ্জে লণ্ডনের উপকণ্ঠে গ্রীণউইচ মান-মন্দিরের উপর দিয়া যে দ্রাঘিমারেখা গিয়াছে তাহাকে **মুল দ্রাঘিমারেখা** (Prime Meridian) বলা হয়। বিষুববৃত্ততলে ভূকেন্দ্রে 360° কোণ কল্পনা করিলে বিষুবরেখাকে 360টি দ্রাঘিমারেখা ছেদ করে। ইহাদের মূল মধ্যরেখার পূর্ব ও

পশ্চিম দুইদিকে 180টি করিয়া মোট 360টি দ্রাঘিমারেখা কল্পনা করা হইয়াছে। সুতরাং মূল মধ্যরেখার বিপরীত দিকে যে দ্রাঘিমারেখা আছে সেখানে 180° পূর্ব ও 180° পশ্চিম দ্রাঘিমারেখা সমপাতিত হইয়াছে, এই কাল্পনিক রেখাকে **আন্তর্জাতিক তারিখ রেখা** (International Date Line) বলে।

ছক কাগজে কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকিলে যেমন তাহার অবস্থান নির্ণয় করা যায়, তদ্রূপ ভূপৃষ্ঠে কোন স্থানের অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমাংশ প্রদত্ত থাকিলে তাহার অবস্থান নির্ণয় করা সহজ হয়। সেইজন্য এই সব কাল্পনিক রেখাগুলি পণ্ডিতেরা প্রবর্তন করিয়াছেন। কোনও স্থানের দ্রাঘিমাংশ পূর্ব বা পশ্চিম এবং অক্ষাংশ উত্তর বা দক্ষিণ বলিতে হয়।

উত্তর গোলার্ধে **ধ্রুব নক্ষত্র** (Pole Star) এবং দক্ষিণ গোলার্ধে **হ্যাড্‌লির অক্টাণ্ট** (Hadley's Octant) প্রভৃতির সাহায্যে অক্ষাংশ নির্ণয় এবং **গ্রীনউইচ্‌ ও স্থানীয় সময়ের** (Local time) সাহায্যে কিরূপে দ্রাঘিমাংশ নির্ণয় করা যায় তাহা ভূগোলে সবিস্তারে পড়িবে।

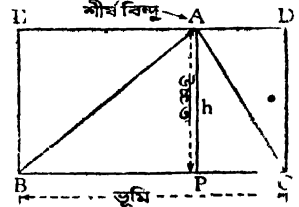
1

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

Area of a triangle.

1.1. **ত্রিভুজ** ঃ তিনটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রকে **ত্রিভুজ বলে।** ত্রিভুজের **শীর্ষবিন্দু** (A) হইতে **ভূমির** (BC) উপর লম্বকে ত্রিভুজের **উচ্চতা** (AP) (Height বা Altitude) বলে।

1.2 **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (Area) : একই উচ্চতা বিশিষ্ট **এবং একই** ভূমির উপরি অবস্থিত একটি ত্রিভুজ একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের **অর্ধেক।** **সুতরাং**

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ BCDE $= \frac{1}{2}$ (BC × AP) $=$ $\frac{1}{2}$ **ভূমি** × **উচ্চতা** $= \frac{1}{2}\, a.\, h.$

1.3 ABC একটি ত্রিভুজের ∠BACর বিপরীত বাহুকে a, ∠ABCর বিপরীত বাহুকে b এবং ∠ACBর বিপরীত বাহুকে c বলে। বাহুগুলির যোগফলকে **পরিসীমা** (perimeter) বলে। অর্থাৎ পরিসীমা $= a + b + c$ **অর্ধ-পরিসীমাকে** s বলিলে, $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ এবং **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল** $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

মনে করা যাক △ABC ত্রিভুজের

BD $= x$ ∴ CD $= a - x$.

সমকোণী △ABD হইতে $h^2 = c^2 - x^2$, আবার

সমকোণী △ACD হইতে $h^2 = b^2 - (a-x)^2$

$\therefore \quad c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$

$\therefore \quad x = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$

$\therefore \quad h^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)}{4a^2}$$

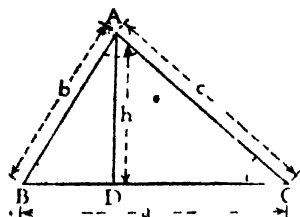
$\therefore \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} a.h$

$= \frac{1}{2} a. \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-2c)(b+c-2a)(c+a-2b)}{4a^2}}$

$= \frac{1}{2} a. \sqrt{\frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4a^2}}$

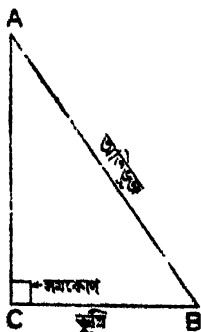
$= \frac{4a}{2.2a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\therefore$ যে কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

14 ত্রিভুজের **তিনটি বাহু** পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **সমবাহু ত্রিভুজ** (Equilateral triangle) বলে।

ত্রিভুজের **দুইটি বাহু** পরস্পর সমান হইলে তাহাকে **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ** (Isosceles triangle) বলে। (ছবিতে AC বাহুকে C এবং AB বাহুতে B লেখা আছে। এখানে Cএর স্থলে B এবং Bএর স্থলে C পরিবে)

যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ তাহাকে **সমকোণী ত্রিভুজ** (Right-angled triangle) বলে। ঐ ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বৃহত্তম বাহুকে **অতিভুজ** (Hypotenuse) বলে।

15 **সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :** জ্যামিতির 35 নং উপপাদ্যে তোমরা পিথাগোরাসের উপপাদ্য পড়িয়াছ যে **সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র সমষ্টির সমান।** $\therefore$ অতিভুজ c এবং অপর দুইবাহু a, b হইলে,

(i) $c^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$

(ii) $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

(iii) $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ এবং **ক্ষেত্রফল** $= \frac{1}{2} ab.$

[$\because$ a ভূমি এবং b উচ্চতা এবং $a \perp b$]

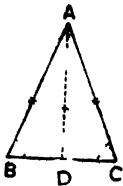
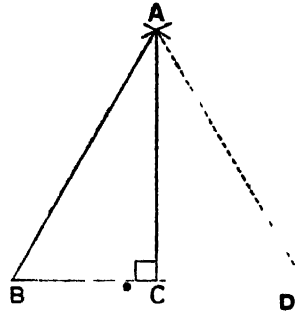
1·6 **সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :** এই ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু সমান। যদি প্রত্যেক বাহু $=a$ একক হয় অর্থাৎ $AB=AC=BC=a$, $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$.

$\because$ $AD\perp BC$ $\therefore$ $\angle ADB$ সম$\angle$, $\therefore$ $AB^2=AD^2+BD^2$; $\therefore$ $AD^2=AB^2-BD^2$ বা $AD^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=a^2-\frac{a}{4}=\frac{3a^2}{4}$;

$\therefore$ AC বা উচ্চতা $=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ একক

ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}BC.\ AD=\frac{1}{2}a.\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ বর্গ একক [$\sqrt{3}=1{\cdot}7320\cdots$]

1·7 **সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :** এই ত্রিভুজের ভূমি c একক এবং সমান দুইটি বাহুর প্রত্যেকে a একক দীর্ঘ হইলে,

উচ্চতা $AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}.$

$=\sqrt{a^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}.$

ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}$ AB. CD.

$=\frac{1}{2}c\sqrt{a^2-\frac{c^2}{4}}=\frac{c}{4}\sqrt{4a^2-c^2}$

1·8 ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ (ডেল্টা) অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore$ $\triangle=\frac{1}{2}ah$; a (ভূমি) $=\frac{2\triangle}{h}$; $h=\frac{2\triangle}{a}$

প্রশ্নমালা 1

[1 হইতে 10 পর্যন্ত ক্লাসে কর, বাকী বাড়ীর কাজ]

1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 5, 6 ও 7 মিটার, উহার ক্ষেত্রফল কত?

এখানে $a=7$ মি $b=6$ মি. ও $c=5$ মি. $\therefore s=\frac{a+b+c}{2}$ মি. $=\frac{7+6+5}{2}$ মি.

$=9$ মি.

অতএব $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-7)(9-6)(9-5)}$

$=\sqrt{9\times2\times3\times4}=6\sqrt{6}$ বর্গ মি.

2. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু 8 সে. মি. হইলে, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}$(বাহুর দৈর্ঘ্য)$^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} 8^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \overset{16}{64}$

$= \sqrt{3}.\ 16 = 16 \times 1{\cdot}7320$ ব. সে. মি. $= 27{\cdot}712$ ব. সে মি. (প্রায়)

3. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 12মি. এবং সমান বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটি 10মি. দীর্ঘ হইলে উহার উচ্চতা কত ?

ভূমি $c = 12$ মি. এবং $a = 10$ মি. সুতরাং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{(10+6)\ (10-6)} = \sqrt{16 \times 4}$$

$= 4{\cdot}2 = 8$ মি

4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 13 মিটার এবং অপর একটি বাহু 12 মিটার হইলে, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমকোণ সংলগ্ন অপর বাহু $= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13+12)\ (13-12)}$

$= \sqrt{25.1} = \sqrt{25} = 5$ মি.

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (12×5) $= \frac{1}{2}.60 = 30$ বর্গমিটার।

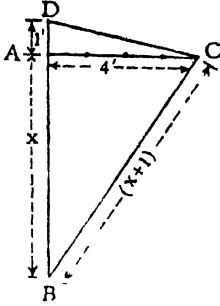
5. একই স্থান হইতে রওনা হইয়া একখানি জাহাজ ঠিক উত্তর দিকে 30 কি.মি. এবং আর একটি জাহাজ ঠিক পূর্ব দিকে 40 কি. মি. গিয়াছে। এখন জাহাজ দুইটির মধ্যে দূরত্ব কত ?

জাহাজ দুইটি উত্তর ও পূর্বে গিয়াছে বলিয়া সমকোণী ত্রিভুজ সৃষ্টি করিয়াছে। ঐ ত্রিভুজের অতিভুজই উহাদের দূরত্ব হইবে। $\therefore$ উহাদের মধ্যে আন্তঃ দূরত্ব $= \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50$ কি. মিটার।

6. 13 মিটার দীর্ঘ একটি মই কোন রাস্তার এক পার্শ্ব হইতে অপর পার্শ্বস্থিত একটি অট্টালিকার গাত্রে 12 মিটার উপরে ঠেকান ছিল। রাস্তাটির পরিসর কত ?

চিত্র আঁকিলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে যাহার অতিভুজ মই এর দৈর্ঘ্য, লম্বটি অট্টালিকার উচ্চতা এবং ভূমি রাস্তার পরিসর হইবে।

অতএব রাস্তার পরিসর $= \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{(13+12)(13-12)} = \sqrt{25{\cdot}1}$ $= 5$ মি.

7. কোন হ্রদে একটি সরল কমল কলিকার অগ্রভাগ্ জল হইতে এক ফুট উপরে ছিল। বায়ুচালিত হইয়া উহা ক্রমশঃ সরিয়া গিয়া জল তলের পূর্বস্থান হইতে 4 ফুট দূরে জলের সহিত মিশিল। জলের গভীরতা নির্ণয় কর।

মনে করি AD = 1 ফু. AC = 4 ফু. এবং জলের গভীরতা = x ফুট।

কমল কলিকার দৈর্ঘ্য BC বা BD = $x+1$; ACB সমকোণী ত্রিভুজের BC অতিভুজ। ∴ $BC^2 = AB^2 + AC^2$।

বা $(x+1)^2 = x^2 + 4^2$, বা $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 16$, বা $2x = 15$ ∴ $x = 7\frac{1}{2}$ অতএব জলের **গভীরতা = $7\frac{1}{2}$ ফুট।**

8 একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 13 মিটার এবং ক্ষেত্রফল 60 বর্গমিটাব। উহার অসমান বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

9. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 336 বর্গমিটার এবং পরিসীমা 84 মিটার। উহার একটি বাহু 30 মিটার হইলে অপর বাহু দুইটি নির্ণয় কর।

10. একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পবিসীমা ($\sqrt{2}+1$ ফুট হইলে, উহার অতিভুজ কত ?

11 . 54 মি. উচ্চ একটি তালগাছ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় উহার অগ্রভাগ বৃক্ষমূল হইতে 18 মি. দূরে ভূমি স্পর্শ করিল। গাছটি কত উচ্চে ভাঙ্গিয়াছিল ?

12. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $625\sqrt{3}$ ব. মি , উহার পরিসীমা নির্ণয় কর।

13 একটি সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহু 20 মিটার দীর্ঘ হইলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14 একটি ত্রিকোণাকৃতি ক্ষেত্রের পরিসীমা 1020 মিটার ও ক্ষেত্রফল 3570 ব. মিটার। উহার একটি বাহু 20 মিটার দীর্ঘ হইলে অপর বাহু দুইটির পরিমাণ নির্ণয় কর।

15. একটি সামান্তরিকের কর্ণ 60 মিটার এবং সন্নিহিত বাহুদ্বয় 56মি. ও 52 মি.। উহার ক্ষেত্রফল কত ?

16. একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের অনুপাত 5: 12: 13. এবং পরিসীমা 300 মিটার হইলে উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

17. কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটির অনুপাত 3: 4: 5 এবং পরিসীমা 432 মিটার। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

18. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 8 মি., 15 মি. ও 17 মি.। উহার বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে ঐ বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য কত?

19. একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণ $10\sqrt{2}$ সে মি. এবং একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঐ বর্গক্ষেত্রের সমান। ত্রিভুজটির কোন বাহুর উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিলে তাহার ক্ষেত্রফল কত হইবে?

20. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে 13 ফুট, 14 ফুট ও 15 ফুট; দ্বিতীয় বাহুটির উপর বিপরীত কৌণিক বিন্দু হইতে লম্বের দৈর্ঘ্য কত? [P. U.]

21. ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 85 ফুট এবং 154 ফুট এবং পরিসীমা 324 ফুট হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত? [P. U.]

22. 24 ফুট দীর্ঘ একটি মই কোন প্রাচীর গাত্রে সোজা দাঁড় করান আছে। উহার নিম্নপ্রান্ত প্রাচীর গাত্র হইতে কতটা টানিয়া লইলে উহার অপর প্রান্ত পূর্বাপেক্ষা 3 ফুট নামিয়া পড়িবে? [A. U.]

23 26 মি দীর্ঘ একখানা মই এর অগ্রভাগ কোন প্রাচীর গাত্রে 24 মি. উপরে ঠেকান ছিল। মইটির অগ্রভাগ 6 মি. নীচে নামাইয়া দিলে উহার নিম্নভাগ কতটা সরিয়া যাইবে?

24. একটি ত্রিকোণ পার্কের তিন বাহু যথাক্রমে 120মি., 182 মি.এবং 218মি.। প্রতি বর্গমিটার 10 পয়সা হিসাবে উহাতে ঘাসের চাবড়া লাগাইতে কত টাকা খরচ হইবে?

25. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন দুই বাহু 4 হে.মি 1 মি. এবং 40 মি. 2 ডেসি. মি, উহার ক্ষেত্রফল কত?

26. একটি ত্রিভুজের বাহুত্রয় 3 : 4 . 5 এর সমানুপাতী এবং উহাদের সমষ্টি 84 মি.; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল এবং বাহুগুলি নির্ণয় কর।

27. 16 মি ভূমির উপর একটি সমদ্বিবাহু ও একটি সমবাহু ত্রিভুজ দণ্ডায়মান। প্রথম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল দ্বিতীয়টির দ্বিগুণ হইলে সমদ্বিবাহুর একটি বাহু কত দীর্ঘ হইবে?

28. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতি বাহু 1 মিটার করিয়া বর্ধিত করিলে উহার ক্ষেত্রফল $\sqrt{3}$ বর্গমিটার বর্ধিত হয়। বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

29. *কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহুগুহির উপর লম্ব টানা হইল। লম্বত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8 সে. মি., 10 সে. মি ও 12 সে. মি. হইলে উহার বাহুর দৈর্ঘ্য ও ক্ষেত্রফল কত?

2

বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল

Circumference and Area of a Circle.

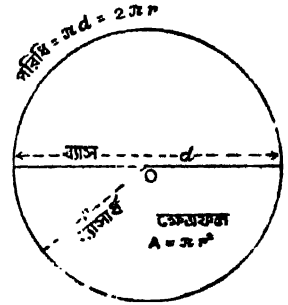
2·1. যে কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাস মাপিলে দেখা যাইবে যে পরিধিটি ব্যাসের প্রায় $3\frac{1}{7}$ গুণ। অর্থাৎ $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}}$ = ধ্রুবক (Constant). এই ধ্রুবকটি একটি অমূলদ সংখ্যা। ইহাকে গ্রীক অক্ষর π (পাই) দ্বারা সূচিত করা হয়। অতএব পরিধি= πx ব্যাস $=2\pi$ ব্যাসার্ধ $=2\pi r$ ($\pi=\frac{22}{7}=\frac{355}{113}=3·1415926\cdots\cdots$)

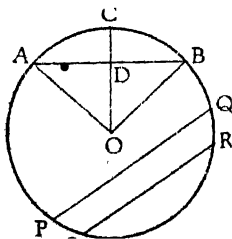
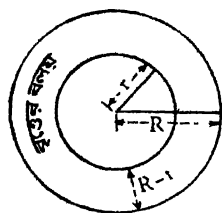
2·2. পরিধিকে বা Circumference-কে O^{ce}, ব্যাস বা Diameter-কে d, ব্যাসার্ধ বা Radiusকে r দ্বারা সূচিত করিলে নিম্নলিখিত সূত্র পাওয়া যায় :—

(i) $O^{ce}=\pi d$ (ii) $O^{ce}=2\pi r$ (iii) $d=\frac{O^{ce}}{\pi}$ (iv) $r=\frac{O^{ce}}{2\pi}$; বৃত্তের ক্ষেত্রফলকে A দ্বারা সূচিত করিলে দেখা যাইবে।

(v) $A=\pi r^2$ (vi) $r=\sqrt{\frac{A}{\pi}}$

অতএব কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা থাকিলে উহার ব্যাস, পরিধি ও ক্ষেত্রফল জানা যাইবে।

2·3. PQ ও SR দুইটি সমান্তরাল জ্যা। এই দুইটি জ্যা ও PS ও QR দুইটি চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তের জোন** (Zone of the circle) বলে। PQRS একটি জোন।

বৃত্তের কোন চাপ ও উহার প্রান্ত বিন্দুতে দুইটি ব্যাসার্ধদ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা** (Sector) বলে। ঐ ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণকে **বৃত্তকলার** কোণ বলে। কলার ক্ষেত্রফল $=\frac{D}{360}x\pi r^2$. [D বৃত্তকলার কোণ।]

বৃত্তের কোণ চাপ ও ঐ চাপের প্রান্তবিন্দু সংযোজক জ্যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তাংশ** (Segment) বলে। ACBD একটি বৃত্তাংশ। জ্যার সমদ্বিখণ্ডক ব্যাসার্ধের জ্যার মধ্যবিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অংশকে বৃত্তাংশের উচ্চতা বলে। বৃত্তাংশের ক্ষেত্রফল=বৃত্তকলা−জ্যা ও ব্যাসার্ধ দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ অর্থাৎ ACBO−△AOB.

2·4. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের পরিবিধিদ্বয় যে গোলাকার স্থান সীমাবদ্ধ করে তাহাকে গোলাকার বলয় (Circular Ring) বলে। বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ R এবং এবং অন্তবৃত্তের ব্যাসধ r হইলে বলয়ের ক্ষেত্রফল $=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)$, $[R>r]$

প্রশ্নমালা 2 A

[1 ইহতে 10 পর্যন্ত ক্লাসের এবং বাকী বাড়ীর কাজ]

1. নিম্নে বৃত্তের ব্যাস প্রদত্ত আছে ; পরিধি নির্ণয় কর :— .

(a) 28 সে. মি (b) 21 মি. (c) 6 মি. 3 ডেসি. মি. (d) 4 ফু. 8 ইঃ

(a) এখানে $d=28$ সে. মি. ; $\therefore$ পরিধি $=\pi d=\frac{22}{7}.28=$ **88** সে. মি.

2. নিম্নে বৃত্তের ব্যাসার্ধ প্রদত্ত আছে ; পরিধি নির্ণয় কর : --

(a) 7 সে মি. (b) 2 ডে মি 1 মি. (c) 7 ডেসি মি. 7 সে.মি. (d) 4 ফু. 8ই.

(a) এই প্রশ্নে $r=7$ সে. মি. ; পরিধি $=2\cdot r=2\times\frac{22}{7}\times7$ সে. মি. $=$ **44** সে. মি

3. নিম্নে বৃত্তের পরিধি প্রদত্ত আছে। ব্যাস নির্ণয় কর :—

(a) $\frac{88}{7}$ সে. মি (b) 8 মি. 8 ডেসি. মি. (c) 1 হে,মি. 1 ডে. মি. (d) 39 গ. 2 ফু.

(a) ব্যাস $=\frac{O^{ce}}{\pi}=\frac{\frac{88}{7}\text{ সে. মি.}}{\frac{22}{7}}=\frac{88}{7}\times\frac{7}{22}=4$ সে মি.

4. একটি চক্রের পরিধি 6 হে. মি. 3 মি. ; উহা 100 বার ঘুরিলে কতদূর যাইবে ?

5. যে চক্রের ব্যাসার্ধ 1·500 মিটার। তাহা এক কিলোমিটার যাইতে কতবার ঘুরিবে ?

6. একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাসার্ধ 21 মি.। প্রতি মিটার 15 পয়সা হিসাবে বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত ব্যয় হইবে ?

7. একটি চক্রের পরিধি ও ব্যাসের অন্তর 45 মি. হইলে উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

8. একটি বৃত্তকার তৃণভূমিকে বেড়া দিতে 1089 টাকা খরচ হইল। প্রতি মিটারে 2 টা. 25 পয়সা খরচ হলে ঐ তৃণভূমির ব্যাসার্ধ কত ?

9. একটি বৃত্তের ব্যাস ও পরিধির সমষ্টি 87 মি. হইলে উহার ব্যাসার্ধ ও পরিধি কত ?

10. একটি তারকে বৃত্তাকারে পরিণত করিলে তাহার ব্যাস 5 মি. 6 ডেসি. মি হয়। উহাকে বর্গাকারে পরিণত করিলে সেই বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

11. একটি বৃত্তের পরিধি অপর বৃত্তের পরিধির দেড়গুণ এবং উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর 2 ডেসি. মি 1 সে. মি ; ব্যাসার্ধ দুইটি নির্ণয় কর।

12. একটি ঘড়ির কাঁটা দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সে মি ও 3·5 সে. মি। 30 ঘণ্টায় একটি কাঁটার প্রান্তবিন্দু অন্যটির প্রান্তবিন্দু অপেক্ষা কত অধিক ঘুরিবে ?

13. এক ব্যক্তি দেখিল যে, কোন বৃত্তাকার মাঠ প্রদক্ষিণ করিতে তাহার যে সময় লাগে, মাঠটিকে সোজাসুজি মধ্যস্থল দিয়া পার হইতে তাহা অপেক্ষা 45 সেকেণ্ড কম সময় লাগে। তাহার গতি মিনিটে 80 গজ হইলে, ঐ মাঠের ব্যাস কত ?

[C. U.]

14. একটি আয়তের প্রস্থ 44 মিটার এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{1}{2}$ গুণ। আয়তটির পরিসীমার সমান পরিধিবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস কত ?

15. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাসার্ধ 77 সে. মি. ; ঐ বৃত্তের পরিধির সমান বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?

16. একটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অন্তর 75 মিটার। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ কত ?

17. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 420 সে. মি. ; ঐ বৃত্তে যে চাপ কেন্দ্রে 24·15 ডিগ্রী কোণ উৎপন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : চাপ $= \frac{D}{360} \times$ পরিধি। এখানে D = 24·15 ডিগ্রী]

18 একটি বৃত্তের কোন চাপের জ্যা 48 সে মি. ও অর্ধচাপের জ্যা 27 সে. মি. দীর্ঘ। চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

19. একটি বৃত্তের চাপ 55 সে. মি দীর্ঘ এবং উহা কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

20. দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি 10·5 মিটার এবং উহাদের পরিধিদ্বয়ের পার্থক্য 22 মিটার। বৃত্তদুইটির পরিধি নির্ণয় কর।

21. একটি অর্ধবৃত্তের ব্যাস ও চাপের সমষ্টি 180 সে. মি.। ব্যাসের দৈর্ঘ্য কত ?

প্রশ্নমালা 2. B

[1 হইতে 8 পর্যন্ত ক্লাশে কর অবশিষ্ট বাড়ীর কাজ]

1. নিম্নে বৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে, ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(*a*) 14 সে. মি. (*b*) 3 ডেসি. মি. 5 সে. মি. (*c*) 1 গ. 6 ই.

(*a*) আলোচ্য প্রশ্নে $r = 14$ সে. মি. ∴ ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \frac{22}{7}.(14)^2$ ব. সে মি.
$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 = 616$ ব. সে. মি.

2. নিম্নে বৃত্তের ব্যাস দেওয়া আছে, ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(*a*) 7 মি. (*b*) 12 মি. 6 ডেসি. মি. (*c*) 2 ফু. 4 ই.

(*a*) আলোচ্য প্রশ্নের ব্যাস = 7 মি. ∴ ব্যাসার্ধ বা $r = \frac{7}{2}$ মি. ∴ ক্ষেত্রফল =
$\pi r^2 = \frac{22}{7} \times (\frac{7}{2})^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ ব. মি. = 38·5 ব. মি.

3. নিম্নে বৃত্তের ক্ষেত্রফল দেওয়া আছে, ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :

(*a*) 616 ব মি. (*b*) 154 ব. সে. মি. (*c*) 4 ব. ফু. 40 ব. ই.

(*a*) নির্ণেয় ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\pi}} = \sqrt{\frac{616 \text{ ব. মি.}}{\frac{22}{7}}} = \sqrt{616 \times \frac{7}{22}}$
$= \sqrt{196} = 14$ মি.

4. এক বৃত্তের পরিধি 66 সে. মি. ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

5. একটি গরুকে কত দীর্ঘ রজ্জু দ্বারা কোন তৃণক্ষেত্রে বাঁধিয়া রাখিলে সে 2464 বর্গমিটার স্থানের তৃণ ভক্ষণ করিতে পারিবে ?

6. 35 সে. মি. ও 21 সে মি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?

নির্ণেয় বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi(R^2 - r^2) = \pi(R+r)(R-r)$
$= \frac{22}{7}(35+21)(35-21) = \frac{22}{7} \times 56 \times 14$ ব. সে. মি. = 2464 ব. সে. মি =
24 ব. ডেসি. 64 ব. সে মি.

7. একটি বৃত্তাকার তৃণক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া যে পথ আছে তাহার বাহিরের সীমারেখা ও ভিতরের সীমারেখা যথাক্রমে ৳00 ও 300 গজ হইলে, পথটির ক্ষেত্রফল কত হইবে ? [P. U.]

8. একটি বলয়াকার ক্ষেত্রের বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ 342 ফুট এবং অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ উহার অর্ধেক হইলে, ক্ষেত্রফল কত ? [P. U.]

9. তৃণাচ্ছাদিত একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া 12 ফুট চওড়া একটি রাস্তা আছে। ক্ষেত্রটির পরিধি 528 ফুট হইলে রাস্তাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [W. B. S. F. 68]

10. 50 মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকার তৃণক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া একটি পথ আছে। পথটি কত প্রশস্ত হইলে ক্ষেত্রটি ও পথের ক্ষেত্রফল সমান হইবে ?

11. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 4 মি. 2 ডেসি. মি. এবং প্রস্থ 3মি. 3ডেসি. মি.। ইহার সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত হইবে ?

12. একটি বৃত্তাকার ভূমিখণ্ডকে বেষ্টন করিয়া একটি পথ আছে। পথটির বাহিরের ও ভিতরের পরিধিদ্বয়ের অন্তর 44 মি হইলে পথটির পরিসর কত ?

[Roorkee Eng.]

13. 205 মিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পুষ্পোদ্যানের ভিতরে চারিদিকে 10 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। প্রতি বর্গমিটারে 25 প. হিসাবে রাস্তাটি মেরামত করিতে কত খরচ হইবে ?

14. একটি বৃত্তাকার গৃহের ব্যাস 68 ফুট 10 ইঞ্চি এবং উহার দেওয়াল 22 ইঞ্চি পুরু। দেওয়ালটি কত বর্গ ফুট ভূমির উপর অবস্থিত ? [Roorkee Eng.]

15. চারিটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে 2, 4, 5 ও 6 মিটার। ঐ বৃত্ত চারিটির সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

16. একটি পুষ্করিণীর ক্ষেত্রফল অর্ধ একর হইবে। কত দীর্ঘ রজ্জু দ্বারা উহার পরিধি চিহ্নিত করা যাইবে ? [Roorkee Eng.]

3

সমকোণী চৌপলের পৃষ্ঠফল ও ঘনফল

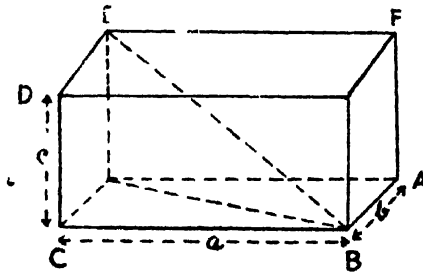
Surface and Volume of Rectangular Parallelopiped

3·1. যে সকল বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা বা বেধ আছে তাহাকে **ঘন** বা **ঘনবস্তু** বলে। ঘন বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধকে উহার **মাত্রা** (Dimension) বলে। ঘনবস্তুর উপরের অংশগুলিকে উহার **তল** বা পৃষ্ঠ বলে।

3·2 যে ঘন বস্তুর ছয়টি তল এবং যাহার দুই দুইটি বিপরীত তল সমতল ও সমান্তরাল তাহাকে **চৌপল** (Parallelopiped) বলে।

3·3. যে চৌপলের প্রত্যেকটি তল আয়তক্ষেত্র তাহাকে **আয়ত ঘন** বা **সমকোণী চৌপল** (Rectangular parallelopiped) বলে। চৌপলের পাশাপাশি তলগুলি যে রেখা বরাবর ছেদ করিয়াছে তাহাকে **ধার** বা **প্রান্তরেখা** (Edge) বলে।

3·4 যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ এই তিনটি মাত্রাই সমান তাহাকে **ঘনক** (Cube) বলে। ঘনকের ছয়টি তলই বর্গক্ষেত্র। ঘনক যতখানি স্থান জুড়িয়া থাকে তাহাকে উহার **ঘনফল** (Volume) বলে।

3·5 কয়েকটি সূত্র :—

A. কোন সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে a, b এবং c একক দ্বারা সূচিত হইলে

(a) সমকোণী চৌপলের ঘনফল $= a.\ b.\ c$ ঘন একক। অর্থাৎ দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের গুণফল উহার ঘনফল।

(b) সমকোণী চৌপলের সমগ্র পৃষ্ঠতল $= 2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক।

(c) সমকোণী চৌপলের কর্ণ $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক।

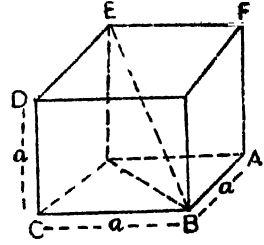
B. ঘনকের তিনটি মাত্র সমান অর্থাৎ দৈর্ঘ্য=প্রস্থ=বেধ। উহার যে কোন মাত্রা a একক দীর্ঘ হইলে,

(i) ঘনকের ঘনফল $=a^3$ ঘন একক।

(ii) ঘনকের সমগ্র পৃষ্ঠ $=6a^2$ বর্গ একক।

(iii) ঘনকের কর্ণ $=a\sqrt{3}$ একক

∴ ঘনকের একটি বাহু $=\sqrt[3]{\text{ঘনকের ঘনফল}}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot$ ঘনকের কর্ণ

প্রশ্নমালা—3

[1 হইতে 9 পর্যন্ত ক্লাশে কর, বাকী বাড়ীর কাজ]

1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 8 সে. মি. প্রস্থ 6 সে. মি. এবং উচ্চতা 4 সে. মি , উহার ঘনফল কত ?

আলোচ্য প্রশ্নে $a=8$ সে. মি., $b=6$ সে. মি. এবং $c=4$ সে. মি.।

∴ সমকোণী চৌপলের ঘনফল $=abc=8$ সে. মি. $\times 6$ সে. মি. $\times 4$ সে. মি.

$=\mathbf{192}$ ঘন সে. মি.।

2. একটি আয়তিক ঘনের দৈর্ঘ্য 13·5 মি., প্রস্থ 11·5 মি. এবং উচ্চতা 8 মি. হইলে উহার ঘনফল কত ?

3. একটি ঘনকের প্রত্যেক ধার 7 মি. হইলে উহার ঘনফল কত ?

আলোচ্য প্রশ্নে ঘনকের প্রত্যেক ধার $a=7$ মি.

∴ ঘনকের ঘনফল $=a^3=(7\text{ মি.})^3=\mathbf{343}$ ঘ. মি.।

4. একটি আয়তিক ঘনের ভূমির ক্ষেত্রফল 736 ব. মি এবং উচ্চতা 6 মি.; উহার ঘনফল নির্ণয় কর।

5. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 14 মি., প্রস্থ 12 মি. এবং উচ্চতা 10 মি., উহার সব কয়টি তলের ক্ষেত্রফল কত ?

আলোচ্য প্রশ্নে $a=14$ মি., $b=12$ মি. এবং $c=10$ মি.।

∴ সমকোণী চৌপলের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $=2(ab+bc+ca)$

$=2(14\times 12+12\times 10+14\times 10)$ ব. মি. $=2(168+120+140)$ ব. মি

$=2\times 428$ ব মি $=\mathbf{856}$ ব. মি.

6. একটি ঘনকের একটি ধার 1 ডেসি. মি. 2 সে. মি.; উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?

আলোচ্য প্রশ্নে ঘনকের একটি ধার $a=1$ ডেসি মি. 2 সে. মি. $=12$ সে. মি.

∴ উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল $6a^2=6.(12)^2=6\times144$ ব. সে. মি.

$=864$ ব. সে.মি.।

7. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 5 ডে. মি., প্রস্থ 3 ডে. মি. এবং উচ্চতা 2 ডে. মি.; উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

আলোচ্য প্রশ্নে $a=5$ ডে মি, $b=3$ ডে. মি এবং $c=2$ ডে. মি ।

∴ ঐ সমকোণী চৌপলের কর্ণ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{5^2+3^2+2^2}$

$=\sqrt{38}$ ডে মি.।

8. একটি ঘনকের একটি ধার 18 ডেকা মি.; উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

কর্ণের দৈর্ঘ্য $=a\sqrt{3}=18\sqrt{3}$ ডেকা. মি ।

9 (a) একটি সমকোণী চৌপলের তিনটি মাত্রা যথাক্রমে 13 মি, 12 মি, 11 মি ; উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(b) একটি ঘনকের একটি ধার 7 সে মি. হইলে, উহার কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

10 একটি সমকোণী চৌপলের ভূমির ক্ষেত্রফল 90 বর্গমিটার, একটি পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 80 বর্গমিটার ও অপর একটি পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল 72 বর্গমিটার। উহার ঘনফল কত ?

11. 1 ঘ. সে. মি. বিশুদ্ধ জলের ওজন 1 গ্রাম। 6 মি দীর্ঘ, 5 মি প্রস্থ ও $1\frac{1}{3}$ মি গভীর চৌবাচ্চায় কত কুইন্টাল জল ধরিবে ?

12. দেখাও যে একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেক মাত্রাকে দ্বিগুণ করিলে উহার ঘনফল 8 গুণ হইবে।

13. প্রতি বর্গমিটার 25 প. হিসাবে একটি ঘনকের সমুদয় তল রং করিতে 15 টাকা খরচ হইল। ঘনকটির ঘনফল কত ?

14. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 18 মিটার ও প্রস্থ 12 মিটার ; যদি উহার সমগ্রতল পরিমাণ 732 বর্গমিটার হয়, তবে উহার উচ্চতা নির্ণয় কর।

[W. B. S. F. Compt. '66]

15. একটি স্নানাগারের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণ এবং গভীরতা, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তরের অর্ধেক। উহাতে যদি 1000 ঘন মিটার জল ধরে, তবে উহার মাত্রা তিনটি কত ?

16 একটি সমকোণী চৌপলের মাত্রাগুলি 16 মি. 12 মি ও 9 মি। উহার সমান ঘনফল বিশিষ্ট ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

17. তিনটি ধাতু নির্ম্মিত ঘনকের প্রান্তগুলি যথাক্রমে 5 সে. মি, 4 সে. মি. ও 3 সে. মি.। উহাদের গলাইয়া একটি বড় ঘনকে পরিণত করিলে, দেখাও যে এই বড় ঘনকের ধার 6 সে মি হইবে।

18 5 মি. দীর্ঘ ও 4 মি প্রস্থ একটি চৌবাচ্চা হইতে 1000 বালতি জল তুলিয়া লইলে জলের গভীরত 4 ডেসিমিটার কমিয়া গেল। বালতিতে কত ডেসিমিটার জল ধরে ?

19. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের অনুপাত 3 : 2 : 1. উহার ঘনফল 1296 ঘন সে মি হইলে উহার সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল কত ?

20 একটি আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার অনুপাত 5 : 4 : 3 এবং তলগুলির মোট ক্ষেত্রফল 13536 বর্গ সে. মি হইলে, উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর। [W B. S F Comp '67]

21. একটি সমকোণী চৌপলের মাত্রাগুলি 12 মি 6 মি ও 2 মি যে ঘনকের সমুদয় তলের ক্ষেত্রফল চৌপলের ক্ষেত্রফলের সমান, তাহার প্রত্যেক ধারের পরিমাণ কত ?

22. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 6 : 5 : 4 এবং উহার সমগ্র তল পরিমাণ 33,300 বর্গ সেন্টিমিটার। চৌপলটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর। [W. B S. F. '65]

23. কোন কাঠের বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 40, 30 ও 20 সে মি.; 2 সে. মি. পুরু তক্তা দ্বারা বাক্সটি প্রস্তুত করিতে কত আয়তনের কাঠ লাগিবে ?

24 একটি জলাধারের দৈর্ঘ্য, বিস্তারের $2\frac{1}{2}$ গুণ, উহার গভীরতা $3\frac{1}{2}$ মিটার। ঐ জলাধারে 560 মেট্রিক টন জল ধরে। এক ঘন সে মি. জলের ওজন এক গ্রাম হইলে, জলাধারটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

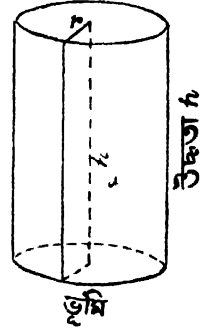
25. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য 300 গজ এবং প্রস্থ 150 গজ। একটি নল দ্বারা উহাতে প্রতি সেকেণ্ডে $12\frac{1}{2}$ ঘনফুট জল পড়িলে কত সময়ে ঐ চৌবাচ্চার জল $2\frac{1}{2}$ ফুট গভীর হইবে ? [W. B. S F. '56]

4

স্তম্ভক বা বেলন

Surface and Volume of Cylinder

4·1. যে স্তম্ভকের প্রান্তদ্বয় সমান ও সমান্তরাল বৃত্ত তাহাকে বৃত্তীয় স্তম্ভক বা বেলন (Circular Cylinder) বলে।

4·2. কোন আয়তক্ষেত্রের এক বাহু স্থির রাখিয়া, ঐ বাহুর চারিপাশে ক্ষেত্রটিকে সম্পূর্ণভাবে ঘুরাইলে বৃত্তাকার স্তম্ভক উৎপন্ন হয়। ইহার প্রান্তীয় বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা প্রান্তীয় বৃত্ত দুইটির উপর লম্ব। সেইজন্য ইহাকে লম্ব বৃত্তাকার চোঙ **সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভক** (Right Circular Cylinder) বলে।

ঐ লম্বকে স্তম্ভকের **উচ্চতা** (Height) বা **অক্ষ** (Axis) বলে। ছবিতে h উচ্চতা বা অক্ষ। h এর ॥ রেখাটি অক্ষের সমান্তরাল থাকিয়া স্তম্ভকটি গঠন করে বলিয়া উহাকে **উৎপাদক রেখা** (Generating Line) বলে। BC রেখা যে তল উৎপন্ন করে তাহাকে **বক্রতল** (Curved Surface) বলে।

4·3. স্তম্ভকের ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= যে কোন একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= $\pi r^2 \times h$ ঘন একক [যদি বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r এবং উচ্চতা h হয়]

বক্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা

= $2\pi r \times h$. বর্গ একক

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + প্রান্ত বৃত্তদ্বয়ের ক্ষেত্রফল

= $2\pi rh + 2\pi r^2$

= $2\pi r(r+h)$ বর্গ একক

প্রশ্নমালা 4

[1 হইতে 7 পর্যন্ত ক্লাসের এবং অবশিষ্ট বাড়ীর কাজ।]

1 নিম্নলিখিত সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল নির্ণয় কর :

(*a*) ভূমির ব্যাসার্ধ 3 সে মি.; উচ্চতা 14 সে মি.

(*b*) ঐ 2 মি 8 ডেসি. মি; উচ্চতা 5 মি. 3 ডেসি মি.

(*c*) ঐ 4 ফু. 8 ই.; উচ্চতা 7 ফু. 6 ই.

(a) সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল $= \pi r^2 h$ ঘন একক

$= \frac{22}{7} \times$ (3 সে. মি $)^2 \times$ 4 ঘ. সে মি.

$= \frac{22}{7} \times 9 \times 14 = 396$ ঘ. সে. মি.

2. নিম্নলিখিত সমকোণী স্তম্ভকগুলির বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :—

(a) ব্যাস 2 ডে. মি 8 মি , উচ্চতা 4 মি.

(b) ব্যাসার্ধ 6 ডেসি. মি , উচ্চতা 14 সে. মি.

(c) পরিধি 3 ফু. , উচ্চতা 8 ফু.

(a) প্রদত্ত স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $2\pi rh$ বর্গ একক

$= 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{28}{2} \times 4$ বর্গ মি $= $ **352** ব. মি.

3. নিম্নলিখিত সমকৌণী স্তম্ভকগুলির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(a) ব্যাসার্ধ 14 সে. মি , উচ্চতা 10 সে. মি.

(b) পরিধি 11 মি. , উচ্চতা 21 মি.

(c) ব্যাস 2 ফু. 11 ই. , উচ্চতা 4 ফু.

(a) প্রদত্ত স্তম্ভকের নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 2\pi r\,(h+r)$ বর্গ একক

$= 2 . \frac{22}{7} \times 14\,(10+14)$ ব. সে. মি. $=$ **2112** ব. সে. মি.

4. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 7 বর্গফুট 48 বর্গ ইঞ্চি এবং উচ্চতা 1 ফুট , উহার ভূমির ক্ষেত্রফল কত ?

5. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ভূমির ক্ষেত্রফল উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান। স্তম্ভকটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধের অনুপাত কত ?

6 একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 1000 বর্গ ডে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 20 সে মি. । উহার ঘনফল নির্ণয় কর। [W. B. S. F. '66]

7. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ঘনফল 1584 ঘন ইঞ্চি এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 ইঞ্চি, প্রতি বর্গফুটে 27 প. হিসাবে উহার বক্রতল রং করিতে কত খরচ হইবে ?

8. একটি কূপ খনন করিতে হইবে, যাহার ভিতরের ব্যাস 5 ফুট এবং গভীরতা 36 ফুট। কত মাটি খুঁড়িয়া বাহির করিতে হইবে ?

9. একটি কূপের ব্যাস 3 মিটার এবং উহা 1. ডেকা. মি. 4 মি. গভীর। ঐ কূপে কত আয়তনের জল ধরিবে ?

10. প্রতি ঘন মিটার 15 টাকা হিসাবে 1 মিটার ব্যাসার্ধ এবং 21 মিটার গভীর একটি কূপ খনন করিতে কত খরচ হইবে ?

11 একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের ঘনফল যত মিটার, উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফলও তত মিটার হইলে, ঐ চোঙের ব্যাস কত ?

12. $4\frac{1}{2}$ ফুট ব্যাস বিশিষ্ট একটি সমকোণী স্তম্ভাকৃতি জলাশয় হইতে ঘণ্টায় 110 গ্যালন জল তোলা হইতেছে। 27 মিনিট পরে জল-তল কত ইঞ্চি নামিয়া যাইবে, ইঞ্চির এক দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় কর। [$\pi = 3{\cdot}1416$, 1 গ্যালন= 277·25 ঘন ইঞ্চি]। [C· U.]

13. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের ব্যাস 7 ইঞ্চি এবং উহাতে 4 ঘন ফুট পাথর আছে। ইহার সমান উচ্চতা বিশিষ্ট ও 10 গুণ পাথর আছে এরূপ স্তম্ভের ব্যাস কত? [Roorkee]

14 এক ঘন সে মি তাম্র হইতে তার প্রস্তুত হইল। তারটি যদি 1 মি মি. ব্যাসের হয় তবে উহার দৈর্ঘ্য কত?

15. $\frac{3}{4}$ ইঞ্চি ব্যাস ও $\frac{1}{8}$ ইঞ্চি পুরু কতগুলি মুদ্রা গলাইয়া প্রতি বাহু 3 ইঞ্চির একটি ঘনক প্রস্তুত করা যাবে?

16 একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের উচ্চতা ভূমির ব্যাসর্ধের 6 গুণ। উহার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 215 6 ব সে মি হইলে, ব্যাসাধ কত হইবে?

17. কোন সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের দুই প্রান্তের ক্ষেত্রফল উহার ক্ষেত্রফলের সমান হইলে, উহার ভূমির ব্যাস ও উচ্চতার অনুপাত নির্ণয় কর। [Roorkee]

18 একটি ঢালাই লোহার নল 9 ফুট দীর্ঘ, অন্তর্ব্যাস 3 ইঞ্চি ও 1 ইঞ্চি পুরু। এক ঘন ইঞ্চি লোহার ওজন ·25 পাউণ্ড হইলে নলটির ওজন নির্ণয় কর। [Roorkee]

19 এক ফুট বাহু বিশিষ্ট একটি পিতলের ঘনক হইতে $\frac{1}{10}$ ইঞ্চি ব্যাসের দীর্ঘ তার প্রস্তুত হইল। ঐ তার দ্বারা একটি বৃত্তাকার স্থানকে ঘিরিয়া রাখিলে, ঐ স্থানের ক্ষেত্রফল একরে নির্ণয় কর? [B. U.]

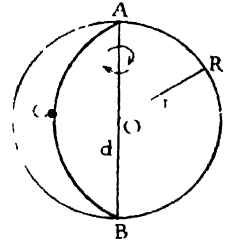
20. 3 মিটার ব্যাসের একটি গাছের গুঁড়ি 14 মিটার একটি সমকোণী বৃত্তাকার স্তম্ভক। গুঁড়িটিকে যতটুকু ছাঁটিলে একটি বর্গাকার ভূমির সমকোণী চৌপল হয় তাহা করা হইল। ঐ চৌপলের ঘনফল এবং কতখানি কাঠ ছাটিয়া ফেলা হইল তাহা নির্ণয় কর।

21. 100 সে. মি. দীর্ঘ একটি নলের অন্তর্ব্যাসার্ধ 10 সে. মি. ও উহা 1 সে. মি. পুরু। যে ধাতু দ্বারা ইহা নির্মিত তাহা প্রতি ঘন সে. মি. এর ওজন 200 গ্রাম। প্রতি কিলোগ্রাম 6 টাকা দরে ঐ নলটির মূল্য কত?

5

গোলকের পৃষ্ঠফল ও ঘনফল

Surface and Volume of Sphere.

5·1. **গোলক :** একটি মাত্র বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত যে ঘন বস্তুর মধ্যস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ তলের সকল বিন্দু সমদূরবর্তী তাহাকে **গোলক** বা **বর্তুল** (sphere) বলে। ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে গোলকের **কেন্দ্র** (Centre) ও কেন্দ্র হইতে গোলকের তল পর্যন্ত দূরত্বকে ব্যাসার্ধ (Radius) বলে। চিত্রে O কেন্দ্র OR (r) ব্যাসার্ধ। যে সরলরেখা কেন্দ্রগামী হইয়া উভয় দিকে তল পর্য্যন্ত বিস্তৃত তাহাকে **ব্যাস** (Diameter) বলে। চিত্রে AB (d) ব্যাস। স্পষ্টতঃ $d = 2r$

5·2. কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে স্থির রাখিয়া অর্ধবৃত্তকে ব্যাসের চারিদিকে ঘুরাইয়া আনিলেও একটি গোলকের উৎপন্ন হয়। ACB অর্ধবৃত্তটিকে AB ব্যাসের চারিদিকে ঘুরাইয়া চিত্রের গোলকটি উৎপন্ন হইয়াছে।

5·3. **গোলকের ঘনফল :** কোনও গোলকের ব্যাসার্ধ r, ব্যাস d ও ঘনফল (Volume) V হইলে,

গোলকের ঘনফল, $V = \frac{1}{6}\pi d^3$ $\therefore d = \left(\frac{6}{\pi}V\right)^{\frac{1}{3}}$

এবং $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\therefore r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$

5·4. **গোলকের তলের ক্ষেত্রফল :** গোলক তলের ক্ষেত্রফল $= S$ হইলে,

$S = \pi d^2$ $\therefore d = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

এবং $S = 4\pi r^2$ $\therefore r = \sqrt{\frac{S}{4\pi}}$

5·5. **ফাঁপা গোলকের ঘনফল :** বহির্গোলকের ব্যাস D, ব্যাসার্ধ R এবং অন্তর্গোলকের ব্যাস d ও ব্যাসার্ধ r হইলে,

ফাঁপা গোলকের ঘনফল $= \frac{1}{6}\pi D^3 - \frac{1}{6}\pi d^3 = \frac{1}{6}\pi(D^3 - d^3)$

$= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$

প্রশ্নমালা 5

[1 হইতে 11 পর্যন্ত ক্লাসের এবং অবশিষ্ট বাড়ীর কাজ।]

1. নিম্নলিখিত ব্যাস-বিশিষ্ট গোলকের ঘনফল নির্ণয় কর :

(a) 7 সে. মি. (b) 10 মি 5 ডেসি মি (c) 1ফু. 9 ই

(a) গোলকের ঘনফল $= \frac{1}{6}\pi d^3$ ঘন একক

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 7^3$ ঘন সে মি

$= \frac{539}{3} = 179\frac{2}{3}$ ঘ সে মি।

2 নিম্নলিখিত ঘনফল বিশিষ্ট গোলকগুলির ব্যাস নির্ণয় কব :

(a) $179\frac{2}{3}$ ঘন মিটাব (b) $381\frac{9}{?}$ ঘন ইঞ্চি

(a) ব্যাস $d = \left(\frac{6}{\pi} \times \text{গোলকের ঘনফল}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \left(\frac{6}{\frac{22}{7}} \times 179\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= \left(6 \times \frac{7}{22} \times \frac{539}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= (343 \text{ ঘন মি })^{\frac{1}{3}} = 7$ মি

3 নিম্নলিখিত গোলকগুলিব তলেব ক্ষেত্রফল নির্ণয় কব :

(a) ব্যাসার্ধ 14 সে মি (b ব্যাসার্ধ 35 সে মি (c) ব্যাস 4ফু. 6 ই (d) পরিধি 14 ফু 8 ই

(a) নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক

$= 4 \cdot \frac{22}{7} \cdot 14^2$ ব সে মি.

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 2464$ ব সে মি.

4 একটি গোলকেব এবং একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকেব ব্যাস পরস্পর সমান। যদি স্তম্ভকেব উচ্চতা উহার ব্যাসের সমান হয়, তবে উহাদের ঘনফলদ্বয়ের অনুপাত কত ?

5 4 সে মি ব্যাস বিশিষ্ট একটি নিরেট লৌহ গোলকেব ওজন 18 কি গ্রা. হইলে যে ফাঁপা লৌহ গোলকের বহিঃতলেব ব্যাস 13 সে মি এবং অন্তঃতলের ব্যাস 10 সে .মি, তাহার ওজন কত হইবে ?

6. 3, 4 ও 5 সে. মি ব্যাসার্ধের তিনটি ধাতব গোলক গলাইয়া একটি মাত্র গোলক প্রস্তুত করা হইয়াছে। এই গোলকের ব্যাসার্ধ কত ?

[W. B. S. F. '67]

7. একটি লৌহ ডাম্বেলের দুই ধারে 5 ইঞ্চি ব্যাসের দুইটি গোলকের অংশ আছে এবং মধ্যের হাতলটি 7 ইঞ্চি দীর্ঘ এবং 2 ইঞ্চি ব্যাসের লম্ব বৃত্তাকার চোঙ, যদি 4 ইঞ্চি ব্যাসের লৌহ গোলকের ওজন 9 পাউণ্ড হয় তবে ডাম্বেলটির ওজন কত ?

8. একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের উচ্চতা উহার ব্যাসের সমান। উহা হইতে একটি সর্ববৃহৎ গোলক কাটিয়া বাহির করা হইল। স্তম্ভকের কত অংশ কাটিয়া ফেলা হইল ? [C U]

9 1 ফু. 3 ই. দীর্ঘ, 1 ফু. 2 ই প্রস্থ ও 5 ইঞ্চি উচ্চতার একটি সমকোণী সীসার চৌপল হইতে অর্ধ ইঞ্চি ব্যাসের কতগুলি গুলি তৈয়ার করা যাইবে ?

[B. Eng]

10. একটি বৃত্তাকার হল ঘরের বহির্ব্যাস 14 মিটার এবং খাড়া দেওয়াল 5 মিটার উচ্চ। উহার ছাদ অর্ধগোলকাকৃতি একটি গম্বুজ। প্রতি বর্গমিটার 10 টাকা 50 পয়সা হিসাবে বাহিরের তল অস্তর করিতে কত খরচ হইবে ?

11 একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকের দুই প্রান্ত দুইটি অর্ধগোলক দ্বারা গঠিত। এইরূপ ঘন বস্তুটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য 17 মিটার এবং ব্যাস 3 মিটার। উহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12 1 সে. মি, 6 সে মি. ও 8 সেমি ব্যাসার্ধের তিনটি ভরাট অংগোলক একত্রে গলাইয়া একটি মাত্র নিরেট গোলক প্রস্তুত করা হইল। এই গোলকটির ব্যাস নির্ণয় কর। [C. U. '56]

13 নিরেট গোলাকার একটি মাটির গোলককে 16 ইঞ্চি উচ্চ একটি সমকোণী বৃত্তীয় স্তম্ভকে পরিণত করা হইল। স্তম্ভকের ভূমির ব্যাসার্ধ ও গোলকের ব্যাসার্ধ সমান হইলে ঐ ব্যাসার্ধের মান নির্ণয় কর। [C U. '49]

14 একটি গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল যত বর্গ ফুট উহার আয়তনও তত ঘনফুট হইলে, গোলকটির ব্যাস নির্ণয় কর। [সি সা.]

15 একটি গোলকের ঘনফলের মান উহার পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের মানের দ্বিগুণ হইলে গোলকটির ব্যাসার্ধ কত হইবে ? [C. U. '53]

16. একটি অর্ধগোলাকৃতি পাত্রের বহির্ব্যাস 42 সে মি এবং উহা 2 সে. মি.

পুরু প্রতি বর্গ সে মি. 3 টাকা 50 পয়সা হিসাবে পাত্রটির সমগ্র তল পালিস করিতে কত ব্যয় হইবে ?

17. 14 সে. মি. ব্যাস বিশিষ্ট একটি নিরেট গোলকের ওজন 314 গ্রাম। বহির্ব্যাস বিশিষ্ট একটি ফাঁপা গোলকেব ওজনের অনুপাত 216 : 215 হইলে ফাঁপা গোলকটি কত পুরু ?

18 30 ঘন ইঞ্চি বারুদেব ওজন এক পাউণ্ড। যে ফাঁপা গোলকেব ভিতব 11 পাউণ্ড বারুদ ধরিবে তাহাব ব্যাস নির্ণয় কব। [Roorkee]

1 একটি অর্ধগোলাকৃতি কডাইর কানা বরাবর পবিধি 5 ফু 6 ই। ইহা অধেক অংশ পানীয় তবল দ্বাবা পূর্ণ। 1 75 ইঞ্চি ব্যাসের একটি বাটি দ্বারা ঐ তরল লইয়া কতজন লোককে দেওযা যাইবে ? [Beng. Eng]

20 সারা বৎসবে সূর্য্যের যে তাপ পৃথিবীতে আসে তাহা পৃথিবী পৃষ্ঠে 100 ফুট গভীর বরফের স্তরকে গলাইতে পারে। গোলকাকৃতি পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 4000 মাইল হইলে ঐ ববফের আয়তন ঘন মাইলে নির্ণয় কব। [Madras Eng]

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা—1 (পৃঃ 211—216)

8 10 মি. **9** 26 মি, 28মি **10.** 1 ফু. **11.** 24 মি.
12. 150 মি. **13** 173 20 ব মি **14** 493 মি, 507 মি.
15. 2688 ব. মি **16** 3000 ব মি **17.** 7776 ব মি **18** $7\frac{1}{17}$ মি.
19. 230 8 ব. সে মি **20** 12 ফু. **21.** 2772 ব.ফু **22** 11 6 ফু (আসন্ন)
23. 8 8 মি. **24.** 1092 টা. **25.** 8050·1 ব. মি **26.** 294 ব. মি 21, 28, 35 মি **27.** 28·83 মি **28.** 1·5 মি **29.** 24·69 সে মি, 519 6 ব সে মি (প্রায়)

প্রশ্নমালা—2A (পৃঃ 217—219)

1 (b) 132 মি. (c) 19 মি. 8 ডে. মি (d) 14 ফু. 8 ই.

2. (b) 132 মি (c) 484 সে মি (d) 29 ফু 4 ই.

3. (b) 2 মি. 8 ডেসি. মি (c) 3 ডেসি মি. (d) $12\frac{41}{88}$ গজ

4. 6 কি. মি 3 হে. মি. **5.** 100 বার **6.** 19 টা. 80 প. **7.** 10 5 মি.
8. 38·5 মি. **9.** 10 5 মি., 66 মি **10** 4 মি 4 ডেসি মি **11.** 4 ডেসি মি. 2 সে. মি., 6 ডেসি মি 3 সে মি **12** 660 সে. মি **13.** 28 গজ
14. 98 মি **15.** 14641 ব. সে মি. **16** 17 5 মি. **17** 177·1 সে. মি.
18 56 সে. মি. **19.** 105 সে. মি **20.** 22 মি, 44 মি **21.** 7 ডেসি. মি.

প্রশ্নমালা—2B (পৃঃ 220—221)

1. (b) 3850 ব সে. মি. (c) 4 ব. গ 2 ব. ফু. 72 ব. ই.

2 (b) 124 ব. মি. 74 ব ডে. মি (c) 616 ব ই.

(3) (b) 7 সে মি (c) 14 ই. **3** 346 5 ব. সে. মি. **4.** 28 মি.
5. 2464 সে মি. **6.** $2727\frac{8}{11}$ ব. গ. **7.** $12727\frac{8}{11}$ ব. গ **8** 30633 ব. গ. $3\frac{6}{7}$ ব. ফু. **9.** $6783\frac{4}{7}$ ব. ফু. **10.** 20·7 মি. **11.** 2 মি. 1 ডেসি মি.
12. 7 মি. **13.** $3162\frac{6}{7}$ টা. **14** $386\frac{1}{21}$ ব. ফু. **15.** 9 মি.
16 27 74 গ.

প্রশ্নমালা—3 পৃঃ 223—225)

2. 1242 ঘ. মি. '**4** '4416 ঘ মি. **9.** (a) 20'8 মি. (প্রায়) (b) $7\sqrt{3}$ সে. মি. **10.** 720 ঘ. মি. **11.** 400 কুইণ্টাল **13.** 1000 ঘ মি. **14.** 5 মি. **15.** 20 মি., 10 মি., 5 মি. **16.** 864 ব. মি. **18.** 8 ডেসি. মি. **19** 792 ব সে. মি. **20.** দৈঃ 60 সে. মি. প্রঃ 48 সে. মি. উঃ 36 সে. মি. **21** 6 মি. **22.** দৈঃ 90 সে. মি. প্রঃ 9'5 সে মি. উঃ 60 সে. মি **23.** 11904 ঘ সে মি **24.** দৈঃ 20 মি প্রঃ 8 মি. **25.** $22\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

প্রশ্নমালা—4 (পৃঃ 226—228)

1 (b) 130 ঘ মি 592 ঘ ডেসি মি (c) $513\frac{1}{8}$ ঘ. ফু.

2. (b) 5280 ব সে. মি. (c) 24 ব. ফু. **3.** (b) 2500 ব. মি. 25 ব. ডেসি মি. (c) 7205 ব. ই. **4.** 4 ব ফু. 40 ব. ই. **5.** 1:2 **6.** 5000 ঘ. সে, মি. **7.** 99 পয়সা. **8** 707 $\frac{1}{7}$ ঘ. ফু. **9.** 99 ঘ. মি. **10.** 990 টা. **11.** 4 মি. **12.** 5'9 ই. নামিয়া যাইবে। **13** 22 13 ই. **14** 127 27 সে. মি (প্রায়) **15.** 489 (প্রায়) **16.** 7 সে. মি. **17** 1'1. **18.** $339\frac{3}{7}$ পা **19.** 157023 একর **20.** 63 ঘ. মি., 36 ঘ. মি. **21.** 7920 টা

প্রশ্নমালা—5 (পৃঃ 229—232)

1. (**b**) 606 ঘ মি., 375 ঘ. ডেসি মি. (**c**) 2ঘ. ফু. 1395 ঘ. ই. **2.** (**b**) 9 ই. **3.** (**b**) 15400 ব. সে. মি. (**c**) 38 ব ফু. 72 ব. ই. (**d**) 68 ব. ফু. 64 ব. ই. **4.** 2:3. **5.** $336\frac{2}{?}$ কি. গ্রা **6.** 6 সে. মি. **7.** 4058 পাউণ্ড (প্রায়) **8.** $\frac{1}{3}$ **9.** $16036\frac{4}{11}$ **10.** টা. 5544. **11.** $160\frac{3}{7}$ ব. মি. **12** 9 সে. মি. **13** 12 ই. **14.** 6 একক **15.** 6 একক **16.** 18524 টা. **17.** $2\frac{1}{3}$ সে. মি. **18.** 8'57 ই. **19.** 864 জন **20.** 3809523 ঘন মাইল প্রায়।

West Bengal Board Of Secondary Education

MATHEMATICS (Compulsory)

(S. F.) 1968

Time—Three Hours Full Marks—100

1. (*a*) **সরল কর :**

$$\frac{5\cdot75-\frac{3}{7}\times15\frac{3}{4}+2\frac{2}{35}+1\cdot44}{7\frac{3}{7}\text{এর}\frac{3}{4}-5\cdot6+3\cdot28}$$

উঃ = (·1)

অথবা

(*a*) যদি 1 সের = 933 গ্রাম হয়, তবে 1 কিলোগ্রামকে $1\frac{1}{14}$ সের ধরিলে যে ভুল হইবে তাহা গ্রামে দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত শুদ্ধরূপে নির্ণয় কর। উঃ = (·36)

(*b*) কোন ভদ্রলোক তাঁহার বেতনের প্রতি টাকায় গড়ে 8 (আট) পয়সা হিসাবে আয়কর এবং 10 পয়সা হিসাবে প্রভিডেণ্ড ফণ্ডে জমা দিয়া মাসে নগদ 902 টাকা পাইয়া থাকেন। তাঁহার মাসিক বেতন কত নির্ণয় কর। উঃ = (1100)

2 (*a*) এবং (*b*), অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) একটি টেনিসকোর্টের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দেড় গুণ। প্রতি বর্গমিটার 30 পয়সা হিসাবে ইহাকে সমতল করিবার ব্যয় 2205 টাকা। প্রতি মিটার রেলিং এর মূল্য 6 টাকা হইলে কোর্টের চতুর্দিকে রেলিং দিতে কত ব্যয় হইবে ? উঃ = (2100 টা)

(*b*) 9 টা. 60 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা এর সহিত 13 টা 44 পয়সা কিলোগ্রাম দরের চা কি অনুপাতে মিশাইয়া মিশ্রিত চা'র প্রতি কিলোগ্রাম 13 টা 20 পয়সা দরে বিক্রয় করিলে 10% লাভ হইবে ? উঃ = (3 : 5)

(*c*) একজন পুরুষ ও একজন বালক একত্রে 72 দিনে একটি কার্য্য সম্পন্ন করিতে পারে। শেষ 20 দিন যদি পুরুষটি একাকী কাজ করে তবে কার্যটি 80 (আশি) দিনে শেষ হয়। পুরুষটি একাকী সম্পূর্ণ কার্যটি কত দিনে করিবে ? উঃ = (120 দিন)

(*d*) এক ব্যক্তি দুইটি ঘোড়া বিক্রয় করিল। প্রত্যেকটি 1955 টাকায় বিক্রয় করায় একটিতে 15% লাভ এবং অপরটিতে 15% ক্ষতি হইল। তাহার মোট কত লাভ বা ক্ষতি হইল ? উঃ = (90 টাকা ক্ষতি)

3. কোন টাকার 4% হারে 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ 2448 টাকা। একই হারে ঐ পরিমাণ টাকার 2 বৎসরের সরল সুদ কত হইবে নির্ণয় কর। উঃ = (2400)

(ধর যে চক্রবৃদ্ধি সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।)

অথবা

নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় (Arithmetic Mean) ও গড়পার্থক্য (Mean Deviation) নির্ণয় কর :

'7, 73, 75, 70 72, 76, 75, 71, 74, 78. (উ: = 74·1,2 1)

4. (*a*) এবং (*b*), অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) যে কোন দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(*i*) $a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2$ উ: $(a+b-3c)(a-b+3c)$

(*ii*) $6x^2 + xy - 15y^2$. উ: $= (3x+5y)(2x-3y)$

(*iii*) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)+4$ উ: $= (x^2+2x-7)(x^2+2x-4)$

(*b*) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ সা গু নির্ণয় কর :

$x^4 + 6x^2 + 5$ এবং $x^3 - 3x^2 + x - 3$. উ: $= (x^2+1)$

(*c*) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল সা গু নির্ণয় কর :

$x^2 + 7x + 10$, $x^3 - x^2 - 6x$ এবং $x^4 - 15x^3 + 2x^2$.

উ: $= x^2(x+2)\ (x+5)(x-3)$

(*d*) যদি $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{b}{a} + \frac{d}{c}$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{a^3}{b^3} + \frac{c^3}{d^3} = \frac{b^3}{a^3} + \frac{d^3}{c^3}.$$

5. (*a*) যে কোন দুইটি সমীকরণের সমাধান কর :

(*i*) $\frac{5}{5x-4} + \frac{6}{4x-3} = \frac{5}{2x-1}$. উ: $= (x = \frac{1}{5})$

(*ii*) $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 1, \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{19}{20} \end{array}\right\}$ উ: $= (x=4,\ y=10)$

(*iii*) $(x-7)(x-9) = 195$ উ: $= (x = 22, -6)$

অথবা

(*a*) 8 (আট) বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিন গুণ হইবে এবং 4 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের নয় গুণ ছিল। তাহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর। উ: = (পিতা = 40, পুত্র = 8)

6. একই একক ও একই অক্ষদ্বয় (Axes of Coordinates) লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কিত কর :

$3x - y = 5$,

$4x + 3y = 11$ উ: $= (2,\ 1)$

(প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।)
লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় কর।

7. (*a*) এবং (*b*), অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে একটি ত্রিভুজের যে কোন বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া অপর একটি বাহুর সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করিলে উহা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

(*b*) একটি ট্রাপিজিয়মের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য a সেন্টিমিটার ও b সেন্টিমিটার। প্রমাণ কর যে তির্যক্ বাহু দুইটির মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল এবং ইহার দৈর্ঘ্য $\frac{1}{2}(a+b)$ সেন্টিমিটার।

(*c*) প্রমাণ কর যে একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

(*d*) ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q এবং BC ভূমির উপর X যে কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে APXQ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

8. (*a*) এবং (*b*), অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর :

(*a*) প্রমাণ কর যে বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ, পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ হইবে।

(*b*) কোন বৃত্তের কেন্দ্র O ; AB ও CD বৃত্তের দুইটি জ্যা বহিঃস্থভাবে পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে

$$\angle AOC - \angle BOD = 2\ \angle APC.$$

(*c*) প্রমাণ কর যে বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

(*d*) তৃণাচ্ছাদিত একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রকে বেষ্টন করিয়া 12 ফুট চওড়া একটি রাস্তা আছে। ক্ষেত্রটির পরিধি 528 ফুট হইলে রাস্তাটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। $\left(\text{ধর } \pi = \frac{22}{7}\right)$ (উঃ = 6788 ;)

9. (*a*) হইতে (*f*) প্রশ্নগুলির যে-কোন দুইটি উত্তর কর :

(*a*) এক ব্যবসায়ী 5 ই জুন তারিখে লিখিত তিন মাস পরে দেয় 12,000 টাকার একটি বিল 27 শে জুন তারিখে ভাঙ্গাইলেন। সুদের হার $4\frac{3}{4}\%$ হইলে, ব্যবসায়ী ব্যাঙ্ক হইতে কত টাকা পাইলেন ? (উঃ = 11886 [illegible])

(*b*) 1 কিউবিক সেন্টিমিটার (1 c c.) স্বর্ণের ওজন = 18·5 গ্রাম এবং 1 c c. রৌপ্যের ওজন = 10·5 গ্রাম। রূপা ও সোনা মিশ্রিত 14 c.c. আয়তন একটি ধাতুপিণ্ডের ওজন 219 গ্রাম হইলে, উহাতে কত গ্রাম সোনা ও কত গ্রাম রূপা আছে ? (উঃ = 166·5, 52·5)

(*c*) যদি $2s = a + b + c$ হয়, প্রমাণ কর যে

$$(s-a)^3 + (s-b)^3 + 3\,(s-a)\,(s-b)\,c = c^3.$$

(*d*) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হইলে, দেখাও যে

$$a : d = (a^3 + b^3 + c^3) : (b^3 + c^3 + d^3).$$

(*e*) একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ দেওয়া আছে. এবং অন্য বাহুদ্বয়ের সমষ্টিও দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

(অঙ্কনের পূর্ণ চিহ্নগুলি ও প্রমাণ দিতে হইবে।)

(*f*) পরস্পর ছেদ করা দুইটি সরল রেখা হইতে সমদূরবর্তী একটি গতিশীল বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল হইলে সঞ্চারপথ কি হইবে ?

MATHEMATICS (Compulsory)

(S. F.) 1968 (Compt)

Time—Three Hours Full Marks—100

1 (*a*) সরল কর :

$$\frac{1\frac{1}{4} - \frac{5}{12}}{1\frac{1}{4} + \frac{5}{12}} + \frac{7}{8} \text{ of } \frac{9 \times 5}{14 \times 3} - \frac{\text{Rs. } 11.\ 25 \text{ p.}}{\text{Rs. } 15}.$$

(উঃ = $\frac{11}{16}$)

অথবা

(*a*) এক গ্যালন জলের ওজন 10 পাউণ্ড ; কিউবিক সেন্টিমিটারে (c.c.) ইহার আয়তন নির্ণয় কর। ধর যে 1 কিলোগ্রাম = $2\frac{1}{5}$ পাউণ্ড এবং 1 c. c. জলের ওজন 1 গ্রাম। (উঃ = $\frac{50000}{11}$)

(*b*) যদি $x = 2·5$ এবং $y = 7·5076$ হয়, তবে $x\sqrt{y}$ এর মান নির্ণয় কর। (উঃ = 6·85)

2. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) দৈনিক 8 ঘণ্টা খাটিয়া 12 দিনে 45 জন লোক একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে। দৈনিক $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টা খাটিয়া যদি ঐ কার্যটি 9 দিনে সম্পন্ন করিতে হয় তবে অতিরিক্ত কত জন নিযুক্ত করিতে হইবে ? উঃ = (19)

(b) একটি বানর 67 মিটার উচ্চ একটি তৈলাক্ত খুঁটি বাহিয়া উপরে উঠিতে লাগিল। উহা 1 মিনিটে 10 মিটার উঠে, কিন্তু পরবর্তী মিনিটে 3 মিটার নামিয়া পড়ে। খুঁটির মাথায় উঠিতে বানরটির কত সময় লাগিবে ? উঃ = ($18\frac{4}{7}$মি.)

(c) একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 43 ডেসিমিটার এবং উচ্চতা 30 ডেসিমিটার। প্রতি বর্গমিটার 6 টাকা হারে উহার চারি দেওয়াল রং করাইতে মোট 270 টাকা খরচ হইলে, ঘরের প্রস্থ নির্ণয় কর। উঃ = (32 ডেসি মি.)

(d) একটি থলিতে টাকা, আধুলি ও সিকি মুদ্রা আছে এবং তাহাদের সংখ্যার অনুপাত যথাক্রমে 4 : 5 : 6। যদি থলিতে সর্বসমেত মোট 256 টাকা মূল্যের মুদ্রা থাকে, তবে প্রত্যেক প্রকারের মুদ্রার সংখ্যা নির্ণয় কর। উঃ = (128,160,192)

3. কোন টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি-সুদ 920 টাকা 25 পয়সা এবং ঐ পরিমাণ টাকার একই হারে 2 বৎসরের সরল সুদ 900 টাকা। বার্ষিক সুদের শতকরা হার নির্ণয় কর। উঃ — ($4\frac{1}{2}$%)

(ধর যে চক্রবৃদ্ধি-সুদে প্রতি বৎসরান্তে সুদ আসলে গণ্য হয়।)

অথবা

নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির যৌগিক গড় (Arithmetic mean) নির্ণয় কর :

16, 17, 18, 22, 23, 27, 31, 36 উঃ = (23 75)

4. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) যে কোন দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $x^2+16x+48$. উঃ = $(x+12)(x+4)$

(ii) $5y^2-y^4-4$. উঃ = $(-y+2)(y-2)(y+1)(y-4)$

(iii) $x^4-7x^2y^2+y^4$. উঃ = $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

(b) নিম্নলিখিত রাশি দুইটির গ. সা. গু নির্ণয় :

$3x^3+12x^2+16x+7$ এবং $3x^3+11x^2+13x+5$. উঃ = $(x+1)$

(c) নিম্নলিখিত রাশিগুলির ল সা. গু. নির্ণয় কর :

$a^2+bc+ca+ab$, $b^2+ca+ab+bc$ এবং $c^2+ab+bc+ca$

উঃ = $(a+b)(b+c)(c+a)$

(*d*) সরল কর :

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}.\quad \text{উ:} = (1)$$

5. (*a*) যে-কোন দুইটি সমীকরণের সমাধান কর :

(*i*) $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}$ উ: $=(x=3)$

(*ii*) $\left.\begin{array}{r}17x-7y=64,\\ 3x=5y\end{array}\right\}$ উ: $=(x=5, y=6)$

(*iii*) $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$ উঃ $=(x=\pm 2)$

(*a*) 5টি টেবিল ও 7টি চেয়ারের মূল্য 216 টাকা এবং 3টি টেবিল ও 5টি চেয়ারের মূল্য 140 টাকা . 2টি টেবিল ও 4টি চেয়ারের মোট মূল্য কত ? (উ: টা 102)

6 একই একক ও একই অক্ষদ্বয় (Axes of co-ordinates) লইয়া নিম্নলিখিত সমীকরণ দুইটির লেখাচিত্র অঙ্কিত কর :

$$7x-2y=14$$

$$x+2y=2.$$ উ. = (2, 0)

(প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।)

লেখচিত্র হইতে লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজ ও কোটি নির্ণয় কর।

7. (*a*) এবং (*b*), অথবা (*c*) এবং (*d*) উত্তর কর : 7+5

(*a*) প্রমাণ কর যে চতুর্ভুজের উভয় বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

(*b*) প্রমাণ কর যে রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(*c*) প্রমাণ কর যে যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি সমকোণ হইবে।

(*d*) ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ O একটি বিন্দু এবং O হইতে OX, OY, OZ যথাক্রমে BC, CA, AB বাহুর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে

$$AZ^2+BX^2+CY^2=AY^2+CX^2+BZ^2$$

8. (a) এবং (b), অথবা (c) এবং (d) উত্তর কর :

(a) প্রমাণ কর যে একই বৃত্তে কেন্দ্র হইতে সমদূরে অবস্থিত জ্যাগুলি পরস্পর সমান।

(b) যদি কোন বৃত্তে দুইটি জ্যা পরস্পর ছেদ করে এবং ছেদবিন্দুর সহিত কেন্দ্রসংযোজক সরল রেখার সহিত উহারা সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে প্রমাণ কর যে জ্যা দুইটির দৈর্ঘ্য সমান।

(c) প্রমাণ কর যে দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত হইবে।

(d) 1 সেঃ মিঃ পুরু একটি ফাঁপা ধাতব নলের ভিতরের ব্যাসার্ধ 24 সেঃ মিঃ। উহাকে গলাইয়া সমান দৈর্ঘ্যের একটি ভরাট চোঙ নির্মাণ করা হইল, ইহার ব্যাসার্ধ কত ? (7 সে. মি)

9. (a) হইতে (f) প্রশ্নগুলির যে-কোন দুইটি উত্তর কর :

(a) একজন বাড়ী-ওয়ালা 55,000 টাকায় একটি বাড়ী খরিদ করিয়া বাড়ীটি ভাড়া দিলেন। বাড়ী ভাড়া হইতে মেরামত খরচ বাবদ বার্ষিক 450 টাকা বাদ দিয়া যদি তিনি তাঁহার খরিদ মূল্যের উপর শতকরা 7 টাকা হিসাবে আয় করেন, তাহা হইলে বাড়ীটির বার্ষিক ভাড়া কত নির্ণয় কর। (টা. 4300)

(b) যদি বিনিময়ের হার

37 টাকা 68 পঃ = 44 ফ্রাঙ্ক, 47 টাকা 28 পঃ = 2 পাউণ্ড হয়, তাহা হইলে 78 পাউণ্ড 10 শিঃ এর পরিবর্তে কত ফ্রাঙ্ক পাওয়া যাইবে? (2137 ফ্রাঙ্ক)

(c) যদি $a^2=b+c$, $b^2=c+a$, $c^2=a+b$ হয়, তবে দেখাও যে

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1.$$

(d) যদি $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ হয়, প্রমাণ কর যে

$$xyz\,(x+y+z)^3=(xy+yz+zx)^3.$$

(e) ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় ও শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর। [শুধু অঙ্কনের পূর্ণ চিহ্নগুলি দিতে হইবে।]

(f) ABC একটি ত্রিভুজ, ইহার AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D এবং E পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে DBC, BCE এবং BAC কোণ তিনটির সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখা তিনটি সমবিন্দু।